RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PATRIZIA LONGOBARDI
MERCEDE MAJ

Epimorfismi $\bigvee$-completi tra reticoli di sottogruppi normali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 79 (1988), p. 275-280
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__275_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 79 (1988)

Epimorfismi $\vee$-completi tra reticoli di sottogruppi normali.

PATRIZIA LONGOBARDI - MERCEDE MAJ (*)

1. Introduzione.

Sia G un gruppo e si denoti con $n(G)$ il reticolo dei sottogruppi normali di G. Se H è un gruppo e φ un isomorfismo di $n(G)$ in $n(H)$, è a volte possibile ottenere informazioni sulla struttura di H a partire da proprietà di G.

In particolare molti autori (cfr. [2], [3], [5], [6], [7]) hanno studiato questo problema quando G è un p-gruppo nilpotente di classe 2; nel 1986 è stato infine dimostrato il teorema seguente (cfr. [8]):

TEOREMA A. *Siano G un p-gruppo nilpotente di classe 2 e H un gruppo con $n(G) \overset{\varphi}{\simeq} n(H)$. Allora:*

(i) *se $Z(G)$ non è localmente ciclico, H è un p-gruppo nilpotente di classe* $\leqslant 3$;

(ii) *se $Z(G)$ è localmente ciclico, detto N l'unico sottogruppo normale minimale di G, è H/N^φ un p-gruppo nilpotente di classe* $\leqslant 3$.

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica e Applicazioni « R. Caccioppoli », Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli, Italy.

Lavoro eseguito col contributo M.P.I.

Questo lavoro ha avuto origine da un soggiorno degli autori presso l'Università di Warwick in qualità di professori visitatori; essi desiderano ringraziare il Dipartimento di Matematica e in particolare il Prof. S. Stonehewer per la splendida ospitalità ricevuta.

Inoltre, se H è risolubile, H è un p-gruppo nilpotente di classe $\leqslant 3$ e, in particolare, di classe 2, se G' ha esponente infinito.

Sia ora φ un epimorfismo $\vee$-completo di $n(G)$ in $n(H)$, ossia un epimorfismo tale che $\left(\bigvee_{i\in I} K_i\right)^\varphi = \bigvee_{i\in I} (K_i)^\varphi$, per ogni famiglia $(K_i)_{i\in I}$ di elementi di $n(G)$. Nel 1982 è stato dimostrato (cfr. [5]) che se G è un p-gruppo nilpotente di classe 2, H un gruppo risolubile e φ un tale epimorfismo, allora H è un p-gruppo ipercentrale o un gruppo di ordine primo.

In questo lavoro si prova che se φ non è iniettivo, cioè non un isomorfismo, è possibile ottenere maggiori informazioni su H, come mostrato dal teorema seguente:

TEOREMA B. *Siano G un p-gruppo nilpotente di classe 2, $H \neq 1$ un gruppo e $\varphi: n(G) \to n(H)$ un epimorfismo $\vee$-completo non iniettivo. Allora:*

(i) *se $Z(G)$ non è localmente ciclico, H è un p-gruppo abeliano elementare, $G' = Z(G)$ ha esponente p e per ogni sottogruppo K normale in G si ha $K \geqslant G'$ o $K \leqslant G'$;*

(ii) *se $Z(G)$ è localmente ciclico e N è l'unico sottogruppo normale minimale di G, è H semplice o $n(H) \simeq n(G/N)$ con $Z(G/N)$ non localmente ciclico.*

Nel caso (i) non ci sono ulteriori restrizioni sulla struttura di H, come mostrato dagli esempi in 3. Pertanto il Teorema *B*, insieme con il succitato Teorema *A* e il Lemma 6 in [3], completa lo studio degli epimorfismi $\vee$-completi di $n(G)$ in $n(H)$, con G p-gruppo nilpotente di classe 2.

Notazioni e nomenclatura sono per lo più quelle usuali (cfr. ad es. [9]); in particolare $Z(G)$ è il centro del gruppo G.

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. G. Zacher per aver proposto loro il problema e per molte stimolanti discussioni.

2. Dimostrazione del Teorema B.

(i) Sia $Z(G)$ non localmente ciclico.

φ induce un epimorfismo $\vee$-completo φ_1 di $l(G/Z(G))$ in $n(H/Z(G)^\varphi)$, e un epimorfismo $\vee$-completo φ_2 di $l(Z(G))$ nel reticolo $\mathfrak{L}_1$ dei sottogruppi normali di H contenuti in $Z(G)^{\varphi}$.

(1) *È* $\varphi_1 = 0$ *o* $\varphi_2 = 0$.

Per assurdo si supponga $\varphi_1 \neq 0$ e $\varphi_2 \neq 0$. $G/Z(G)$ non è localmente ciclico, poichè G non è abeliano; pertanto 1.1 di [4] comporta che φ_1 e φ_2 sono isomorfismi. Allora, ragionando come in 2.2 di [12], si ha che φ è iniettivo, contro le ipotesi.

(2) *È* $H \simeq Z(G)$ *o* $H \simeq G/Z(G)$; *in ogni caso* H *è abeliano.*

Per (1) si ha $\varphi_1 = 0$ e quindi $\varphi_2 \neq 0$ è iniettivo, oppure $\varphi_2 = 0$ e quindi $\varphi_1 \neq 0$ è iniettivo. Si ha allora, nel primo caso

$$Z(G)^{\varphi} = H\,, \qquad l(Z(G)) \overset{\varphi_2}{\simeq} n(H) \qquad \text{e} \qquad Z(G) \simeq H\,;$$

nel secondo

$$Z(G)^{\varphi} = 1\,, \qquad l(G/Z(G)) \overset{\varphi_1}{\simeq} n(H) \qquad \text{e} \qquad G/Z(G) \simeq H$$

(cfr. Lemma 6 di [3]).

(3) *È* $G' = Z(G)$.

Per assurdo, sia $G' \neq Z(G)$. Allora è $H/(G')^{\varphi} \neq 1$; infatti, se è $\varphi_2 = 0$, si ha $(G')^{\varphi} = Z(G)^{\varphi} = 1 < H$; se invece è $\varphi_1 = 0$ e quindi $\varphi_2 \neq 0$ è iniettivo, da $G' < Z(G)$, si ottiene $(G')^{\varphi} < Z(G)^{\varphi} = H$. Pertanto, per 1.1 di [4], φ induce un isomorfismo $\bar{\varphi}$ di $l(G/G')$ in $n(H/(G')^{\varphi})$, contro l'essere

$$(Z(G)/G')^{\bar{\varphi}} = (Z(G)^{\varphi})/(G')^{\varphi} = G^{\varphi}/(G')^{\varphi} = (G/G')^{\bar{\varphi}}\,, \qquad \text{se } \varphi_1 = 0\,,$$

e

$$(Z(G)/G')^{\bar{\varphi}} = (Z(G)^{\varphi})/(G')^{\varphi} = 1\,, \qquad \text{se } \varphi_2 = 0\,.$$

(4) *Se* $K \lhd G$, *si ha* $K \geqslant G'$ *o* $K \leqslant G'$.

Per (3) è $G' = Z(G)$.

Per assurdo, esista $K \lhd G$ tale che $K \ngeqslant G'$ e $K \nleqslant G'$. Si ha allora $K \cap G' < G' < KG'$ e

$$(KG')/(K \cap G') = \big(K/(K \cap G')\big) \times \big(G'/(K \cap G')\big) \leqslant Z\big(G/(K \cap G')\big) .$$

Pertanto φ induce un epimorfismo φ_3 di $l\big((KG')/(K \cap G')\big)$ nel reticolo $\mathfrak{L}_2$ dei sottogruppi normali di $H/(K \cap G')^\varphi$ contenuti in $\big(K^\varphi(G')^\varphi\big)/(K \cap G')^\varphi$, con $(KG')/(K \cap G')$ non localmente ciclico.

Se fosse $\big(K^\varphi(G')^\varphi\big)/(K \cap G')^\varphi = 1$ si avrebbe $K^\varphi(G')^\varphi = (K \cap G')^\varphi \leqslant (G')^\varphi$, da cui $(KG')^\varphi = (G')^\varphi = (K \cap G')^\varphi$. Ma allora $(KG'/G')^{\varphi_1} = 1$ e $(K \cap G')^{\varphi_2} = (G')^{\varphi_2}$, contro l'essere φ_1 o φ_2 iniettivo. Pertanto è $\big(K^\varphi(G')^\varphi\big)/(K \cap G')^\varphi \neq 1$, cioè $\mathfrak{L}_2 \neq 1$; quindi 1.1 di [4] comporta φ_3 iniettivo, il che contraddice $(KG')^\varphi = (G')^\varphi$ se $\varphi_1 = 0$, e $(K \cap G')^\varphi = (G')^\varphi$, se $\varphi_2 = 0$.

(5) *G', G/G' e H sono p-gruppi abeliani elementari.*

Per assurdo, sia $\exp G' > p$.

Se $a \in G$ ha ordine p mod G', allora per (4) si ha $\langle a\rangle^G \geqslant G'$ da cui

$$G' = G' \cap \langle a\rangle^G = G' \cap \big(\langle a\rangle [\langle a\rangle, G]\big) = \\ = (G' \cap \langle a\rangle)[\langle a\rangle, G] = \langle a^p\rangle [\langle a\rangle, G] ,$$

con $[\langle a\rangle, G]$ di esponente p. È poi $\Omega_2(G) \leqslant G'$, altrimenti si avrebbe $G' = [\langle a\rangle, G]\langle a^p\rangle$ per un opportuno a di ordine p^2, e G' di esponente p. Quindi è $G'/\Omega_1(G)$ ciclico e $\Omega_1\big(G/\Omega_1(G)\big) = \Omega_2(G)/\Omega_1(G) \leqslant G'/\Omega_1(G)$ ha ordine primo, sicchè $G/\Omega_1(G)$ è localmente ciclico o localmente quaternionale.

$G/\Omega_1(G)$ non è localmente ciclico, altrimenti da $\Omega_1(G) \leqslant G' \leqslant Z(G)$ seguirebbe G abeliano, un assurdo. Allora è $G/\Omega_1(G)$ localmente quaternionale.

Si ha $G/\Omega_1(G) \simeq Q_8$, essendo G di classe 2, e quindi $|G'/\Omega_1(G)| = 2$ e $\exp G' = 4$. Pertanto è $G' = \langle b\rangle \times T$ con $|b| = 4$ e $T < \Omega_1(G)$. Da $\Omega_1(G/T) \leqslant \Omega_2(G)/T \leqslant G'/T \simeq \langle b\rangle$ segue, come prima, che è G/T localmente ciclico o $G/T \simeq Q_8$. Ma è $|(G/T)'| = |G'/T| = 4$ sicchè $G/T \not\simeq Q_8$. Pertanto è G/T localmente ciclico, e da $T \leqslant Z(G)$ segue G abeliano, assurdo. È quindi $\exp G' = p$.

Sia ora $x \in G$. Si ha $1 = [x, g]^p = [x^p, g]$ per ogni $g \in G$, il che comporta $|xZ(G)| \leqslant p$; da (3) segue allora $\exp G/G' = p$ e, per (2), $\exp H = p$.

(ii) Si supponga ora $Z(G)$ localmente ciclico, e si denoti con N l'unico sottogruppo normale minimale di G. φ induce un epimorfismo $\vee$-completo $\psi: n(G/N) \to n(H/N^\varphi)$ e, per il Lemma 3 di [7], è $Z(G/N)$ non localmente ciclico.

Se $N^\varphi = H$, H è semplice.

Se $N^\varphi \neq H$ e G/N è abeliano, ψ è iniettivo per 1.1 di [3]. Se G/N non è abeliano, è ancora ψ iniettivo, altrimenti per (i) (3) si avrebbe $Z(G/N) = (G/N)' = G'/N \leqslant Z(G)/N$ e $Z(G/N) = Z(G)/N$ localmente ciclico, un assurdo. Per le ipotesi, φ è non iniettivo; quindi è $N^\varphi = 1$ e $n(H) \simeq n(G/N)$, come volevasi.

In particolare, se G/N è abeliano, si ha $H \simeq G/N$ per il Lemma 6 di [3].

3. Esempi.

Siano H un p-gruppo abeliano elementare finito di ordine p^n $(n > 1)$ e G un p-sottogruppo di Sylow di $SL(3, p^n)$. G è un gruppo ultraspeciale [1] (cfr. [1] e anche [10]); pertanto G' ha ordine p^n, $G' = Z(G)$ ha esponente p e per ogni sottogruppo normale N di G, si ha $N \leqslant G'$ o $N \geqslant G'$. Allora G soddisfa le ipotesi del Teorema B (i) e, essendo $G' \simeq H$, è possibile definire in maniera ovvia un epimorfismo $\vee$-completo non iniettivo $\varphi: n(G) \to n(H)$.

Si supponga ora H un p-gruppo abeliano elementare di cardinalità α. Sia poi P un p-sottogruppo di Sylow di $SL(3, p^n)$ $(n > 1)$ e G il prodotto centrale di α copie di P (con i centri amalgamati).

Ovviamente G soddisfa le ipotesi del Teorema B (i) ed è $G/G' \simeq H$. Pertanto è possibile definire in modo ovvio un epimorfismo $\vee$-completo non iniettivo $\varphi: n(G) \to n(H)$.

(1) Un p-gruppo finito G è detto semiextraspeciale se, per ogni sottogruppo massimale M di $Z(G)$, il gruppo G/M è extraspeciale. Un p-gruppo ultraspeciale è un gruppo semiextraspeciale G con rang $G = 2$ rang G'.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Beisiegel, *Semiextraspezielle p-Gruppen*, Math. Z., **156** (1977), pp. 247-254.

[2] R. Brandl, *On groups with certain lattices of normal subgroups*, Arch. Math., **47** (1986), pp. 6-11.

[3] M. Curzio, *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani*, Rend. Mat. e Appl., (5) **24** (1965), pp. 1-10.
[4] F. de Giovanni - S. Franciosi, *Alcuni epimorfismi tra reticoli di sottogruppi e reticoli di sottogruppi normali*, Rend. di Matematica, **13** (1980), pp. 531-540.
[5] F. de Giovanni - S. Franciosi, *Alcuni epimorfismi tra reticoli di sottogruppi normali*, Istituto Lombardo (Rend. Sci.), A **116** (1982), pp. 45-53.
[6] H. Heineken, *Über die Charakterisierung von Gruppen durch gewisse Untergruppenverbände*, J. Reine Angew. Math., **220** (1965), pp. 30-36.
[7] P. Longobardi - M. Maj, *Su di un teorema di Heineken*, Riv. Mat. Univ. Parma, **2** (1976), pp. 315-320.
[8] P. Longobardi - M. Maj, *On the nilpotence of groups with a certain lattice of normal subgroups*, Proceed. Intern. Group Theory Conference, Bressanone, May 1986, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, in corso di stampa.
[9] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
[10] L. Verardi, *Due sottoclassi di gruppi semiextraspeciali*, Boll. U.M.I., **4** D (1985), pp. 85-121.
[11] L. Verardi, *Gruppi semiextraspeciali di esponente p*, Ann. Mat. Pura Appl., in corso di stampa.
[12] G. Zacher, *Sottogruppi normali e r-omomorfismi completi tra gruppi*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **139** (1985), pp. 83-106.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 maggio 1987.