RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO TOFFALORI

Dalle teorie $p - \aleph_0$-categoriche a quelle $\aleph_0$-categoriche : un passo intermedio

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 78 (1987), p. 155-174

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1987__78__155_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 78 (1987)

Dalle teorie $p-\aleph_0$-categoriche a quelle $\aleph_0$-categoriche: un passo intermedio.

CARLO TOFFALORI (*)

SUMMARY - A theory T is said to be $b-\aleph_0$-categorical (Booleanly $\aleph_0$-categorical) if, for every $n \in \omega - \{0\}$ and for every countable M, $N \models T$, $B_n(M)$ is isomorphic to $B_n(N)$. In this paper we study the basic properties of $b-\aleph_0$-categorical theories, in particular we consider the problem of classifying the sequences $(B_n: n \in \omega - \{0\})$ of countable atomic Boolean algebras such that there is a $b-\aleph_0$-categorical theory T satisfying $B_n \simeq B_n(M)$ for all $n \in \omega - \{0\}$ (where M is any countable model of T).

1. Introduzione.

Sia T una teoria del 1° ordine (che si sottointende completa, contabile, priva di modelli finiti); per ogni modello M di T e per ogni $n \in \omega - \{0\}$, indichiamo con $B_n(M)$ l'algebra di Boole dei sottoinsiemi definibili di M^n, e con $S_n(M)$ lo spazio duale di $B_n(M)$, ovvero lo spazio di Boole degli n-tipi su M. In [MM] e [MT] è studiato il concetto di teoria $p-\lambda$-categorica (dove λ è un qualunque cardinale infinito): T si dice $p-\lambda$-categorica (pseudo-λ-categorica) se, comunque si scelgano M, $N \models T$ con $|M| = |N| = \lambda$, si ha $B_1(M) \simeq B_1(N)$. Si può notare che, per λ non contabile, T è $p-\lambda$-categorica se e solo se T è λ-categorica [MM], così che, in questo caso, il concetto di $p-\lambda$-categoricità non sembra avere altro interesse se non quello di mettere

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico Università, Viale Morgagni 67/A, Firenze.

in evidenza una nuova caratterizzazione della λ-categoricità. Invece, le teorie $p - \aleph_0$-categoriche formano una classe ben più vasta di quella delle teorie $\aleph_0$-categoriche, e comunque difficile da deliminare [MT].

Obiettivo di questa nota è introdurre e studiare una nozione più forte della $p - \aleph_0$-categoricità. Per ogni cardinale infinito λ, diremo che una teoria T è $b - \lambda$-categorica (booleanamente λ-categorica) se, comunque si scelgano M, $N \models T$ con $|M| = |N| = \lambda$ e $n \in \omega - \{0\}$, si ha $B_n(M) \simeq B_n(N)$.

È ovvio che, anche in questo caso, per λ non contabile, T è $b - \lambda$-categorica se e solo se T è λ-categorica, dunque concentreremo la nostra attenzione sulle teorie $b - \aleph_0$-categoriche.

Il § 2 è dedicato ad uno studio generale di queste teorie. Si proverà dapprima che ogni teoria categorica (in $\aleph_0$ o in $\aleph_1$) è $b - \aleph_0$-categorica; in particolare le teorie fortemente minimali sono $b - \aleph_0$-categoriche. Analogamente, ogni teoria fortemente o-minimale e $p - \aleph_0$-categorica è $b - \aleph_0$-categorica. Si vedrà però che in generale esistono teorie (anche ω-stabili con rango di Morley finito) $p - \aleph_0$-categoriche ma non $b - \aleph_0$-categoriche. Dunque il concetto di teoria $b - \aleph_0$-categorica è più forte di quello di teoria $p - \aleph_0$-categorica (non così forte, comunque, da essere equivalente a quello di teoria categorica).

Il § 3 è dedicato invece al seguente più particolare problema: sia T una teoria $b - \aleph_0$-categorica, allora T induce un'applicazione f_T definita su $\omega - \{0\}$ e tale che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = \text{tipo di isomorfismo di } B_n(M)$$

dove M è un qualunque modello contabile di T. Ci si chiede allora quali siano le possibili funzioni f_T.

Si proverà dapprima che, per ogni algebra di Boole contabile atomica B, esiste una teoria $b - \aleph_0$-categorica T tale che

$$f_T(1) = \text{tipo di isomorfismo di } B\,.$$

Il secondo passo è studiare $\{f_T(n) : n \in \omega - \{0\}\}$ in funzione di $f_T(1)$. Si noti che un problema in qualche modo analogo fu affrontato da Lachlan [L] nel caso ω-stabile. Si vedrà qui come $f_T(n)$ si può descrivere in modo assai semplice a partire da $f_T(1)$ per T $\aleph_1$-categorica oppure $\aleph_0$-categorica ed ω-stabile, ma che in generale la situazione è assai confusa e la classificazione assai difficile anche nel più semplice caso T ω-stabile.

La notazione sarà quella usuale (essenzialmente quella di [MT]). Se B è un'algebra di Boole e $x \in B$, indicheremo con $B[x]$ l'algebra di Boole di dominio $\{y \in B : y \leqslant x\}$ (e struttura definita nel modo ovvio).

Se poi B è un'algebra di Boole contabile superatomica (ad esempio se $B = B_n(M)$ dove $n \in \omega - \{0\}$ e M è un modello contabile di una teoria ω-stabile), allora, per ogni $x \in B$, CB-rango, CB-grado e CB-tipo di x sono definiti nel modo consueto. Più precisamente si pone:

1) CB-rango $x \geqslant 0$ se $x \neq 0$;

2) CB-rango $x \geqslant \lambda$ (con λ ordinale limite) se CB-rango $x \geqslant \nu$ per ogni ordinale $\nu < \lambda$;

3) CB-rango $x \geqslant \lambda$ (con $\lambda = \nu + 1$ ordinale successore) se, per ogni $n \in \omega$,

(*) esistono $x_0, \ldots, x_{n-1} \in B$ tali che $x = \bigvee_{i<n} x_i$, CB-rango $x_i \geqslant \nu$ per ogni $i < n$ e $x_i \wedge x_j = 0$ $\forall i, j$ con $i < j < n$.

Siccome B è superatomica, per ogni $x \in B$, se $x \neq 0$, esiste $\nu < \omega_1$ tale che CB-rango $x \geqslant \nu$ e CB-rango $x \ngeqslant \nu + 1$. Si pone allora

1) CB-rango $x = \nu$,

2) CB-grado $x =$ massimo $n \in \omega$ soddisfacente (*),

3) CB-tipo $x = (CB$-rango x, CB-grado $x)$.

Finalmente si definisce CB-rango $B = CB$-rango 1 (e analogamente per CB-grado B e CB-tipo B). È noto che, se B, B' sono algebre contabili superatomiche, allora $B \simeq B'$ se e solo se CB-tipo $B = CB$-tipo B'. Per una generale classificazione dei tipi di isomorfismo delle algebre di Boole contabili atomiche, si veda comunque [K].

2. Teorie $b - \aleph_0$-categoriche.

DEFINIZIONE. Una teoria T è $b - \aleph_0$-categorica (booleanamente $\aleph_0$-categorica) se, comunque si scelgano M, N modelli contabili di T e $n \in \omega - \{0\}$, si ha $B_n(M) \simeq B_n(N)$.

PROPOSIZIONE 1. Se T è una teoria categorica (in $\aleph_0$ o in $\aleph_1$), allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

DIMOSTRAZIONE. 1° *caso*: T è $\aleph_0$-categorica. Siano M, N modelli contabili di T, allora esiste un isomorfismo f di M su N, ed è facile verificare che f induce, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, un isomorfismo f_n di $B_n(M)$ su $B_n(N)$ definito nel modo che segue: per ogni $X \in B_n(M)$,

$$f_n(X) = f(X) .$$

2° *caso*: T è $\aleph_1$-categorica. Si è già visto [MT] che, allora, T è $p - \aleph_0$-categorica. Si tratta di provare che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $B_n(M) \simeq B_n(N)$. Sia L il linguaggio di T, consideriamo un nuovo linguaggio $L' = L \cup \{U, Q, p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ dove U, Q sono relazioni 1-arie, $p_0, \ldots, p_{n-1}$ applicazioni 1-arie; sia poi T' la teoria in L' i cui modelli M' sono tali che

1) $Q(M') \models T$;

2) $U(M') \cap Q(M') = \emptyset$, $U(M') \cup Q(M') = M'$;

3) $p_0, \ldots, p_{n-1}$ sono applicazioni di $U(M')$ in $Q(M')$ tali che, comunque si scelgano $x_0, \ldots, x_{n-1} \in Q(M')$, esiste uno e un solo $x \in U(M')$ tale che, per ogni $i < n$, $p_i(x) = x_i$.

Allora

1) se $M' \models T'$, si ha che $M = Q(M')$ è modello di T e $U(M')$ coincide sostanzialmente con M^n;

2) se $M \models T$, si può costruire in modo ovvio un modello M' di T' ponendo $Q(M') = M$, $U(M') = M^n$.

T' è $\aleph_1$-categorica (infatti, se M', $N' \models T'$ hanno cardinalità $\aleph_1$, allora M, N sono modelli di T di cardinalità $\aleph_1$, dunque M, N sono isomorfi ed è facile prolungare tale isomorfismo ad un isomorfismo di M' su N'); perciò T' è $p - \aleph_0$-categorica, anzi, comunque si scelgano due modelli contabili M', N' di T', si ha

$$B_1(M')[M' - M] \simeq B_1(N')[N' - N]$$

(basta osservare che CB-rango $(M' - M) > CB$-rango M, e dunque CB-tipo $(M' - M) = CB$-tipo M'; analogamente per N). Infine è ovvio che, per ogni modello (contabile) M di T,

$$B_n(M) \simeq B_1(M')[M' - M] .$$

Allora, comunque si scelgano due modelli contabili M, N di T, $B_n(M) \simeq \simeq B_n(N)$. $\square$

Val forse la pena di notare che, allora, esistono teorie $b - \aleph_0$-categoriche non $\aleph_0$-categoriche (così come teorie $b - \aleph_0$-categoriche non $\aleph_1$-categoriche). Del resto si vedrà che esistono teorie $b - \aleph_0$-categoriche non categoriche (nè in $\aleph_0$ nè in $\aleph_1$).

Corollario. Se T è una teoria fortemente minimale, allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

Infatti T è $\aleph_1$-categorica.

Proposizione 2. Sia T una teoria tale che, per ogni modello contabile M di T, $B_1(M)/(\mathrm{At}\, B_1(M))$, è priva di atomi. Allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

Dimostrazione. È ben noto che, se B_0, B_1 sono due algebre di Boole contabili, atomiche e tali che, per ogni $i \leqslant 1$, $B_i/(\mathrm{At}\, B_i)$ è priva di atomi, allora $B_0 \simeq B_1$ (vedi, ad esempio [K]). Basta allora provare che, per ogni modello contabile M di T e per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $B_n(M)/(\mathrm{At}\, B_n(M))$ è priva di atomi, ovvero che ogni elemento infinito di $B_n(M)$ si può decomporre nell'unione di due elementi infiniti disgiunti di $B_n(M)$. Procediamo per induzione su n. $n = 1$: questo caso segue dall'ipotesi.

$n \Rightarrow n + 1$. Sia $X = \varphi(M^{n+1})$ un elemento infinito di $B_{n+1}(M)$ (si omettono per semplicità i parametri di M nella formula $\varphi(v_0, \bar{v}) = = \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ che definisce X).

1° *caso*: $\exists v_0 \varphi(v_0, \bar{v})$ definisce un insieme finito; siano $\bar{a}(0), \ldots, \bar{a}(m)$ le realizzazioni distinte di tale formula in M. Si ha

$$X = \bigcup_{i \leqslant m} X_i$$

dove, per ogni $i \leqslant m$, $X_i = \{(x, \bar{a}(i)) : x \in M,\ M \models \varphi(x, \bar{a}(i))\}$. Allora esiste $i \leqslant m$ tale che X_i è infinito, e dunque $\varphi(M, \bar{a}(i)) = \{x \in M : (x, \bar{a}(i)) \in X_i\}$ è infinito. Segue che $\varphi(M, \bar{a}(i))$ si decompone nella unione di due insiemi definibili infiniti disgiunti di $M\chi_0(M)$ e $\chi_1(M)$. Poniamo per ogni $i \leqslant 1$

$$\psi_i(v_0, \bar{v}) : \chi_i(v_0) \wedge \varphi(v_0, \bar{v}) .$$

Allora $\psi_0(M^{n+1})$, $\psi_1(M^{n+1})$ sono sottoinsiemi definibili di M

1) infiniti $\big($se $x \in \chi_i(M)$, allora $(x, \bar{a}(i)) \in \psi_i(M^{n+1})\big)$,

2) disgiunti (perchè $\chi_0(M)$, $\chi_1(M)$ sono disgiunti),

3) contenuti in X.

2° *caso*: $\exists v_0 \varphi(v_0, \bar{v})$ definisce un insieme Y infinito. Per l'ipotesi induttiva, Y is decompone nella unione di due sottoinsiemi definibili infiniti disgiunti $\chi_0(M^n)$, $\chi_1(M^n)$. Si pone per ogni $i \leqslant 1$

$$\psi_i(v_0, \bar{v}) \colon \chi_i(\bar{v}) \wedge \varphi(v_0, \bar{v}) .$$

Come sopra si ha che $\psi_0(M^{n+1})$, $\psi_1(M^{n+1})$ sono sottoinsiemi definibili di X, infiniti e disgiunti.

Corollario. Se T è una teoria $p - \aleph_0$-categorica di strutture linearmente ordinate, allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

Infatti, per ogni modello M contabile di T, $B_1(M)/(\mathrm{At}\, B_1(M))$ è priva di atomi (vedi [ST]). In particolare, una teoria fortemente o-minimale e $p - \aleph_0$-categorica è $b - \aleph_0$-categorica (le teorie fortemente o-minimali e $p - \aleph_0$-categoriche sono classificate in [ST]).

Si potrebbe essere indotti a sperare a questo punto che ogni teoria $p - \aleph_0$-categorica (magari ω-stabile) sia anche $b - \aleph_0$-categorica. Sfortunatamente questo non è vero. Ecco un esempio di una teoria ω-stabile di rango di Morley 4 che è $p - \aleph_0$-categorica ma non è $b - \aleph_0$-categorica (infatti, comunque si fissano due modelli contabili M, N di T, si ha $B_1(M) \simeq B_1(N)$, ma esistono due modelli contabili M, N di T tali che $B_2(M) \not\simeq B_2(N)$; cfr. [L], § 2).

1) Consideriamo dapprima la struttura $(\mathbb{Z}, s)$ dove s è la operazione di successore tra numeri interi. In modo analogo a quanto fatto nella proposizione 1, costruiamo una nuova struttura M_0 del 1° ordine, avente come dominio $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^3$, e il cui linguaggio contiene due relazioni 1-arie U, V da interpretarsi rispettivamente in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Z}^3$, l'operazione s di successore per $\mathbb{Z}$, le proiezioni p_0, p_1, p_2 di $\mathbb{Z}^3$ su $\mathbb{Z}$, ed una costante per ogni elemento di $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^3$; è facile vedere che la relativa teoria T_0 è ω-stabile con rango di Morley 3 e grado di Morley 1; di più, T_0 è $\aleph_1$-categorica e quindi $b - \aleph_0$-categorica.

Si osservi che in M_0 (come in ogni altro modello di T_0) sono 0-definibili le seguenti biiezioni $f_{h,k,m}$ di $V(M_0)$ su $V(M_0)$: per ogni $(h, k, m) \in$

$\in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$,

$$f_{h,k,m}(v) = w \Leftrightarrow \begin{cases} s^h(p_0(v)) = p_0(w) \\ s^k(p_1(v)) = p_1(w) \\ s^m(p_2(v)) = p_2(w) \,. \end{cases}$$

Consideriamo poi il seguente sottoinsieme X' di $\mathbf{Z}^3 = V(M_0)$: $X' = \{x(n) : n \in \omega\}$ dove

$$x(0) = (0, 0, 0)\,,$$

$$x(n+1) = \Big(s^{n+1}\big(p_0(x(n))\big), s^{n+2}\big(p_1(x(n))\big), s^{n+3}\big(p_2(x(n))\big)\Big)\,,$$

così che, per ogni $n \in \omega$,

$$x(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+3)}{2}, \frac{n(n+5)}{2}\right)$$

o, ancora,

$$x(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, s^n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right), s^{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right).$$

Sia σ una enumerazione di $\omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$ secondo la somma e poi secondo l'ordine lessicografico (così che, ad esempio, $\sigma(0) = (0, 0, 1)$, $\sigma(1) = (0, 1, 0)$, $\sigma(2) = (1, 0, 0)$, $\sigma(3) = (0, 0, 2)$ etc.). Dati $h, k, m, i \in \omega$ con h, k, m non tutti nulli, poniamo

$$\bar{\sigma}(h, k, m, i) = \sum_{j \leqslant q} j + r$$

dove $r = \sigma^{-1}(h, k, m)$, $q = r + i$ $(\geqslant r)$. Chiaramente $\bar{\sigma}$ è una corrispondenza biunivoca di $\omega^4 - \{(0, 0, 0, i) : i \in \omega\}$ su ω. Definiamo allora, $\forall h, k, m, i \in \omega$ con h, k, m non tutti nulli,

$$x_{h,k,m,i} = x(\bar{\sigma}(h, k, m, i))$$

(quindi $x_{0010} = x(0)$, $x_{0011} = x(1)$, $x_{0100} = x(2)$, etc.). Siano infine

$$X'' = \{f_{h,k,m}(x_{h,k,m,i}) : (h, k, m) \in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\},\ i \in \omega\}\,,$$
$$X = X' \cup X''\,.$$

È facile vedere che, comunque si fissano un modello contabile M di T_0 e un sottoinsieme definibile S di M di CB-rango $\leqslant 2$, $S \cap X$ è finito (infatti i sottoinsiemi definibili $\neq \emptyset$ di CB-rango $\leqslant 2$ contenuti in $V(M)$ sono definiti da formule della forma

$$p_i(v) = a \qquad (\text{con } i \leqslant 2,\ a \in U(M)),$$

$$s^h(p_i(v)) = p_j(v) \qquad (\text{con } i, j \leqslant 2,\ i \neq j,\ h \in \omega)$$

o da loro combinazioni booleane positive).

2) Consideriamo adesso una nuova struttura M del 1° ordine; il relativo linguaggio L contiene anzitutto due relazioni 1-arie P, Q e un'applicazione 1-aria π tali che

a) $P(M) \cup Q(M) = M$, $P(M) \cap Q(M) = \emptyset$;

b) $Q(M)$ è la struttura già descritta al punto 1;

c) π è un'applicazione di $P(M)$ su $V(Q(M))$;

d) per ogni $a \in V(Q(M)) - X$, $\pi^{-1}(a)$ è un insieme infinito (senza ulteriore struttura);

e) per ogni $a \in X$, $\pi^{-1}(a)$ è un insieme con due relazioni di equivalenza $E_{a,0}$, $E_{a,1}$ tali che $E_{a,0} \subseteq E_{a,1}$, ogni classe di $E_{a,1}$ in $\pi^{-1}(a)$ è finita, e, più precisamente, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $E_{a,1}$ ammette esattamente n classi con n^2 elementi, ed $E_{a,0}$ ripartisce tali classi in n sottoclassi con n elementi (è facile vedere che la teoria di $\pi^{-1}(a)$ nel linguaggio contenente $E_{a,0}$, $E_{a,1}$ ed eventualmente le costanti per gli elementi di $\pi^{-1}(a)$ è ω-stabile ed ha CB-spettro $\{(1,1)\} \cup \{(2,n): n \in \omega - \{0\}\} \cup \{(3,1)\}$; assumiamo che L contenga le costanti per gli elementi di $\pi^{-1}(a)$ in M per ogni $a \in X$).

Sia $T = \mathrm{Th}\,(M)$ la relativa teoria; allora T è ω-stabile; di più T è p-$\aleph_0$-categorica e CB-Spec $T = \{(4,1)\}$; infatti, pur senza addentrarci in dettagli, possiamo osservare che, per ogni modello M' di T, i sottoinsiemi definibili contenuti in $Q(M')$ hanno CB-tipo $\leqslant (3,1)$, mentre quelli contenuti in $P(M')$ sono combinazioni booleane di insiemi della forma

$$\bigcup_{a \in S} T(a)$$

dove S è un definibile di $V(Q(M'))$ e, per ogni $a \in S$, $T(a)$ è un definibile di $\pi^{-1}(a)$ (in M').

È chiaro allora che il modello primo M di T ha CB-tipo $(4, 1)$; sia invece $\bar{M}$ modello contabile saturato di T, allora $\bar{M}$ contiene infinite copie di $\mathbb{Z}$ in $U(Q(\bar{M}))$, ed in più in $\bar{M}$, per ogni $a \in X$, $\pi^{-1}(a)$ ha CB-tipo $(3, 1)$. D'altra parte, per ogni sottoinsieme definibile S di $V(Q(\bar{M}))$ di CB-rango < 3, $X \cap S$ è finito, così che

$$CB\text{-rango} \bigcup_{a \in S} T(a) \leqslant 3 .$$

Segue che anche $\bar{M}$ ha CB-tipo $(4, 1)$, così che T è $p - \aleph_0$-categorica.

D'altra parte, T non è $b - \aleph_0$-categorica; infatti, con un po' di pazienza si può osservare che l'algebra di Boole $B_2(M)$ ha CB-tipo $(8, 1)$; consideriamo il modello contabile saturato $\bar{M}$ di T; in $B_2(\bar{M})$, comunque si fissano $(h, k, m) \in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$ e $i \in \omega$,

$$\pi^{-1}(x_{h,k,m,i}) \times \pi^{-1}(f_{h,k,m}(x_{h,k,m,i}))$$

ha CB-rango 6. Allora, per ogni $(h, k, m) \in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$,

$$S_{h,k,m} = \Big\{(x, y) \colon x, y \in P(\bar{M}),\ s^h\big(p_0(\pi(x))\big) = p_0(\pi(y)),$$
$$s^k\big(p_1(\pi(x))\big) = p_1(\pi(y)),\ s^m\big(p_2(\pi(x))\big) = p_2(\pi(y))\Big\}$$

ha CB-rango $\geqslant 7$, poichè contiene infiniti insiemi disgiunti di CB-rango 6

$$\pi^{-1}(x_{h,k,m,i}) \times \pi^{-1}(f_{h,k,m}(x_{h,k,m,i}))$$

al variare di $i \in \omega$. Analogamente

$$S_{h,k} = \Big\{(x, y) \colon x, y \in P(\bar{M}),\ s^h\big(p_0(\pi(x))\big) = p_0(\pi(y)),$$
$$s^k\big(p_1(\pi(x))\big) = p_1(\pi(y))\Big\}$$

ha CB-rango $\geqslant 8$ per ogni scelta di h, k, e

$$S_h = \Big\{(x, y) \colon x, y \in P(\bar{M}),\ s^h\big(p_0(\pi(x))\big) = p_0(\pi(y))\Big\}$$

ha CB-rango $\geqslant 9$ per ogni h. Segue che CB-rango $B_2(\bar{M}) \geqslant 10$, così che $B_2(M) \not\simeq B_2(\bar{M})$.

3. La funzione f_T.

Sia T una teoria $b-\aleph_0$-categorica, allora possiamo associare a T una applicazione f_T definita in $\omega-\{0\}$ e tale che, per ogni $n\in\omega-\{0\}$,

$$f_T(n) = \text{tipo di isomorfismo di } B_n(M)$$

(dove M è un qualunque modello contabile di T).

Il problema che vogliamo affrontare in questo paragrafo è la classificazione delle possibili funzioni f_T.

TEOREMA 1. Per ogni algebra di Boole contabile atomica B, esiste una teoria T $b-\aleph_0$-categorica tale che $f_T(1) =$ tipo di isomorfismo di B.

DIMOSTRAZIONE. Sia B un'algebra di Boole contabile atomica; in un linguaggio L con una relazione 1-aria P_e per ogni $e\in B$ ed una costante a per ogni atomo a di B, consideriamo la teoria T con i seguenti assiomi: per ogni scelta di e, $f\in B$, $a\in \mathrm{At}\, B$,

$$\forall v(P_{e\wedge f}(v)\leftrightarrow P_e(v)\wedge P_f(v))$$
$$\forall v(P_{e^*}(v)\leftrightarrow \neg P_e(v))$$
$$\forall v(P_a(v)\leftrightarrow v=a)\,.$$

Si ha che T è completa ed ammette la eliminazione dei quantificatori in L; inoltre T è superstabile, T non è $\aleph_0$-categorica, e, per ogni modello contabile M di T, $B_1(M)\simeq B$ (cfr. [MT]).

Allora basta provare che T è $b-\aleph_0$-categorica (in tal caso, infatti, $f_1(T) =$ tipo di isomorfismo di B). Siano M, N modelli contabili di T, dimostriamo che, per ogni $n\in\omega-\{0\}$, $B_n(M)\simeq B_n(N)$. Procediamo per induzione su n.

Si è già visto che la tesi è soddisfatta quando $n=1$.

Sia allora $n>1$. Si fissi anzitutto un isomorfismo f di $B_1(M)$ su $B_1(N)$ (un tale f esiste per quanto già osservato). Siccome T ha la eliminazione dei quantificatori in L, ogni elemento di $B_n(M)$ è combinazione booleana di elementi della forma

$$\{x\in M^n\colon x_i\in P_e(M)\}$$
$$\{x\in M^n\colon x_i=m\}$$

$\big($con $e \in B$, $m \in M$, $i < n$ $(x = (x_0, \ldots, x_{n-1}))\big)$, oppure della forma

$$\{x \in M^n \colon x_i = x_j\}$$

(con $i < j < n$). Altrettanto vale per $B_n(N)$. Si ponga, $\forall i < j < n$,

$$a_{ij} = \{x \in M^n \colon x_i = x_j\}\,,$$
$$b_{ij} = \{x \in N^n \colon x_i = x_j\}\,;$$

si fissino poi due enumerazioni degli ulteriori generatori di $B_n(M)$, $B_n(N)$

$$a_0, a_1, \ldots, a_h, \ldots$$
$$b_0, b_1, \ldots, b_h, \ldots$$

$(h \in \omega)$ rispettivamente. Definiamo, per ogni $h \in \omega$,

A_h sottoalgebra finita di $B_n(M)$,

B_h sottoalgebra finita di $B_n(N)$,

φ_h isomorfismo di A_h su B_h

in modo tale che:

1) se $h, k \in \omega$ e $h < k$, allora A_h è sottoalgebra di A_k, B_h è sottoalgebra di B_k, $\varphi_h \subseteq \varphi_k$;

2) se $i < j < n$, allora $a_{ij} \in A_0$, $b_{ij} \in B_0$, $\varphi_0(a_{ij}) = b_{ij}$;

3) se $h \in \omega$ e $h = 2m + 1$, allora, per ogni $s \leqslant m$, $a_s \in A_h$;

4) se $h \in \omega$ e $h = 2m + 2$, allora, per ogni $s \leqslant m$, $b_s \in B_h$;

5) se $h \in \omega$ e $a \in A_h$ è della forma $\{x \in M^n \colon x_i \in X\}$ con $X \in B_1(M)$, allora $\varphi_h(a) = \{x \in N^n \colon x_i \in f(X)\}$, e viceversa

(allora $B_n(M) = \bigcup_{h \in \omega} A_h$, $B_n(N) = \bigcup_{h \in \omega} B_h$, e $\varphi = \bigcup_{h \in \omega} \varphi_h$ è un isomorfismo di $B_n(M)$ su $B_n(N)$).

$h = 0$: si pone

$$A_0 = (a_{ij} \colon i < j < n)\,, \qquad B_0 = (b_{ij} \colon i < j < n)\,, \qquad \varphi_0(a_{ij}) = b_{ij}\,.$$

$h = 2m + 1$: se $a_m \in A_{2m}$, si pone

$$A_h = A_{2m}, \qquad B_h = B_{2m}, \qquad \varphi_h = \varphi_{2m};$$

se $a_m \notin A_{2m}$, si procede nel modo che segue. Sia

$$a_m = \{x \in M^n \colon x_i \in X_i\}$$

per un opportuno $X_i \in B_1(M)$, e si ponga

$$b'_m = \{x \in N^n \colon x_i \in f(X_i)\}.$$

Definiamo $A_h = (A_{2m}, a_m)$, $B_h = (B_{2m}, b'_m)$, $\varphi_h(a_m) = b'_m$. Allora A_h è una sottoalgebra finita di $B_n(M)$, e B_h è una sottoalgebra finita di $B_n(N)$. Inoltre la condizione $\varphi_h(a_m) = b'_m$ definisce uno ed un solo isomorfismo φ_h di A_h su B_h che sia estensione di φ_{2m}. A questo proposito, infatti, si ha:

a) $a_m \notin A_{2m}$;

b) $b'_m \notin B_{2m}$ (altrimenti, per 5, $\varphi_{2m}^{-1}(b'_m) = a_m$ appartiene ad A_{2m}).

È dunque sufficiente provare che, per ogni $s \in A_{2m}$,

a) $s \subseteq a_m$ se e solo se $\varphi_{2m}(s) \subseteq b'_m$,

b) $s \subseteq a_m^*$ se e solo se $\varphi_{2m}(s) \subseteq b'^*_m$.

Dimostrazione di *a*). Se $s = 0$, la tesi è ovvia. Sia $s \neq 0$, allora s si può decomporre in A_{2m} nella unione

$$s = \bigcup_{j \leqslant t} s_j$$

dove, per ogni $j \leqslant t$, $s_j \neq 0$ e

$$s_j = s_{j(0)} \cap \ldots \cap s_{j(n-1)} \cap \bigcup_{h<k<n} a_{hk}^{\varepsilon(j,h,k)}$$

e, per ogni $h < n$, $s_{j(h)} = \{x \in M^n \colon x_h \in Y_{j(h)}\}$ per un opportuno elemento $Y_{j(h)}$ di $B_1(M)$, mentre, per ogni scelta di h, k con $h < k < n$, $\varepsilon(j, h, k) \in \{0, 1\}$ e

$$a_{hk}^{\varepsilon(j,h,k)} = \begin{cases} a_{hk} & \text{se } \varepsilon(j, h, k) = 1 \\ a_{hk}^* & \text{se } \varepsilon(j, h, k) = 0 \end{cases}$$

(senza perdita di generalità si può assumere che, per ogni scelta di h, k con $h < k < n$, a_{hk} o a^*_{hk} occorra in s_j). Si noti che, di conseguenza

$$\varphi_{2m}(s) = \bigcup_{j \leqslant t} \varphi_{2m}(s_j)$$

$$\varphi_{2m}(s_j) = \varphi_{2m}(s_{j(0)}) \cap \ldots \cap \varphi_{2m}(s_{j(n-1)}) \cap \bigcup_{h<k<n} b_{hk}^{\varepsilon(j,h,k)}$$

dove, per 5, per ogni $h < n$, $\varphi_{2m}(s_{j(h)}) = \{x \in N^n : x_h \in f(Y_{j(h)})\}$.

Vogliamo adesso provare che

$$s \subseteq a_m$$

se e solo se, per ogni $j \leqslant t$, X_i contiene

$$Z_{ji} = Y_{j(i)} \cap \bigcap_{h \in H} Y_h \cap$$

$$\cap \bigcap_{p \leqslant d} \bigcap_{\substack{h_{01},\ldots,h_{0q_0} \in \mathcal{O}_{d_0},\ldots,h_{p1},\ldots,h_{pq_p} \in \mathcal{O}_{d_p} \\ d_0 \neq \ldots \neq d_p, \left| \bigcup_{r \leqslant p} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant q_r} Y_{h_{rl}} \right| = p+1}} \left(M - \bigcup_{r \leqslant p} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant q_r} Y_{h_{rl}}\right)$$

dove $h \in H$ se e solo se $h < n$ e $h < j(i)$ e $\varepsilon(j, h, j(i)) = 1$ oppure $j(i) < h$ e $\varepsilon(j, j(i), h) = 1$; si considera poi in $n - (H \cup \{j(i)\}$ la relazione di equivalenza $\sim$ così definita: se h, $k \in n - (H \cup \{j(i)\})$

$$h \sim k \quad \text{se e solo se} \quad h = k$$

o

$$h < k \quad \text{e} \quad \varepsilon(j, h, k) = 1$$

o

$$h > k \quad \text{e} \quad \varepsilon(j, k, h) = 1\,;$$

si indicano con $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_d$ le relative classi di equivalenza (orbite).

($\Leftarrow$) Siano $j \leqslant t$, $x \in s_j$, allora $x_i \in Z_{ji}$, dunque $x_i \in X_i$ e $x \in a_m$. Segue $s_j \subseteq a_m$ per ogni $j \leqslant t$, e dunque $s \subseteq a_m$.

($\Rightarrow$) Siano $j \leqslant t$, $z \in Z_{ji}$; costruiamo $y \in s_j$ nel modo che segue. Si pone, per $h < n$,

a) se $h = j(i)$, $y_h = z$;

b) se $h \in H$, $y_h = z$;

c) sia $h \in n - (H \cup \{j(i)\})$. Si noti anzitutto che, per ogni $p \leqslant d$ e per ogni scelta di h, $k \in \mathcal{O}_p$, deve essere $y_h = y_k$. Sia ora $h \in \mathcal{O}_0$. Distinguiamo due casi.

1) Se $|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h| = 1$ e c è l'elemento di $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h$, si pone $y_h = c_0 = c$ (infatti $c \neq z$);

2) se $|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h| > 1$, si pone $y_h = c_0 =$ elemento in $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h - \{z\}$.

Sia ora $h \in n - (H \cup \{j(i)\})$, $h \in \mathcal{O}_r$; se $|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h| = k$ con $1 \leqslant k \leqslant r + 1$, si distinguono i seguenti casi:

1) se esiste $c \in \bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h - \{z, c_0, \ldots, c_{r-1}\}$, si pone $y_h = c_r = c$;

2) se $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \subseteq \{c_0, \ldots, c_{r-1}\}$ (e $k < r + 1$), si può anzitutto supporre $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h = \{c_0, \ldots, c_{k-1}\}$, e cambiare di conseguenza l'elemento scelto in qualche $\mathcal{O}_q$ ($q < k$), come è possibile poichè altrimenti

$$\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h = \{c_0, \ldots, c_{k-1}\}$$

(assurdo perchè $s_j \neq 0$), oppure

$$\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h = \{z, c_0, \ldots, c_{k-1}\}$$

(assurdo per la definizione di Z_{ji});

3) se $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \subseteq \{z, c_0, \ldots, c_{r-1}\}$ e contiene z, ad esempio se $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h = \{z, c_0, \ldots, c_{k-2}\}$, si cambia l'elemento scelto in qualche $\mathcal{O}_q$ (con $q < k - 1$), come è possibile poichè altrimenti

$$|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k-1} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h| < k$$

(assurdo perchè $s_j \neq 0$), oppure

$$\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k-1} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h = \{z, c_0, \ldots, c_{k-2}\}$$

(assurdo per la definizione di Z_{ji}).

Se poi $|\bigcap_{h \in O_r} Y_h| > r + 1$, si sceglie $y_h = c_r \notin \{z, c_0, \ldots, c_{r-1}\}$, come è evidentemente possibile.

Si costruisce in tale modo y; è chiaro dalla definizione di s_j che $y \in s_j$. Siccome $s \subseteq a_m$, segue che $y \in a_m$, e quindi $z \in X_i$. Concludendo, $X_i \supseteq Z_{ji}$.

Terminiamo allora la dimostrazione di a). Si ha che $s \subseteq a_m$ se e solo se, per ogni $j \leqslant t$, $Z_{ji} \subseteq X_i$; ma è facile vedere che questo equivale a chiedere che, per ogni $j \leqslant t$, $f(Z_{ji}) \subseteq f(X_i)$, e cioè che $\varphi_{2m}(s) \subseteq b'_m$.

In modo analogo si prova b).

È relativamente semplice dimostrare, infine, che 1, 2, 3, 4 e 5 sono soddisfatte.

$h = 2m + 2$: si procede allo stesso modo, a partire da B_{2m+1} e da b_m. $\square$

Passiamo ora al secondo passo della nostra analisi, e cioè allo studio dei possibili insiemi

$$\{f_T(n) \colon n \in \omega - \{0\}\}$$

in funzione di $f_T(1)$, al variare di T tra le teorie $b - \aleph_0$-categoriche. Consideriamo da prima il caso T ω-stabile (la situazione ne risulta semplificata poichè, fissato un modello contabile M di T, si ha che l'algebra di Boole $B_n(M)$ è superatomica, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, così che il tipo di isomorfismo di $B_n(M)$ è dato dal CB-tipo di $B_n(M)$; confonderemo d'ora in poi, per semplicità, il tipo di isomorfismo di un'algebra di Boole contabile superatomica con il suo CB-tipo). Si può osservare che, se si fissa un'algebra di Boole contabile superatomica B di CB-tipo (α, d) e si considera la teoria T $b - \aleph_0$-categorica (e ω-stabile) associata a B nel Teorema 1, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = (\alpha n, d^n) .$$

È dunque ragionevole chiedersi se, in generale, per ogni teoria T $b - \aleph_0$-categorica ω-stabile soddisfacente $f_T(1) = (\alpha, d)$, si abbia, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = (\alpha n, d^n) .$$

Proposizione 3. Se T è una teoria $b - \aleph_0$-categorica ω-stabile e $f_T(1) = (\alpha, d)$, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) \geqslant (\alpha n, d^n) .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia M modello contabile saturato di T; per ogni $X_0, \ldots, X_{n-1} \in B_1(M)$, sia $X = \{x \in M^n \colon \forall i < n,\ x_i \in X_i\}$. Allora $X \in B_n(M)$; è facile poi provare che

$$CB\text{-rango } X \geqslant \underset{i<n}{(+)}\, CB\text{-rango } X_i$$

(si procede per induzione su $\underset{i<n}{(+)}$ CB-rango X_i). Siano ora $X_0, \ldots, X_{d-1} \in B_1(M)$ a 2 a 2 disgiunti, di CB-rango α (e CB-grado 1). Per ogni $\sigma \in d^n$, posto

$$X_\sigma = \{x \in M^n \colon \forall i < n,\ x_i \in X_{\sigma(i)}\},$$

si ha CB-rango $X_\sigma \geqslant \alpha n$. Se esiste $\sigma \in d^n$ tale the CB-rango $X_\sigma > \alpha n$, allora CB-rango $B_n(M) > \alpha n$; se per ogni $\sigma \in d^n$ CB-rango $X_\sigma = \alpha n$, ricordando che

1) se $\sigma, \tau \in d^n$ e $\sigma \neq \tau$, allora $X_\sigma \cap X_\tau = \emptyset$,

2) $M^n = \bigcup_{\sigma \in d^n} X_\sigma$,

si ha CB-grado $B_n(M) \geqslant d^n$. In ogni caso, $f_T(n) \geqslant (\alpha n, d^n)$. □

La seguente proposizione si prova usando essenzialmente le stesse idee del Lemma 8 in [L]. Tuttavia, mi sembra opportuno darne una dimostrazione completa, considerando che lo sviluppo di tale dimostrazione presenta comunque alcune differenze, se non altro di impostazione, e parzialmente anche di sostanza, rispetto a quello in [L], per evitare dunque una esposizione troppo frammentaria e discontinua.

PROPOSIZIONE 4. Se T è una teoria categorica ω-stabile e $f_T(1) = (\alpha, d)$, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = (\alpha n, d^n)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto $\alpha < \omega$ (questo segue da [B] per il caso $\aleph_1$-categorico, da [CHL] per il caso $\aleph_0$-categorico ω-stabile). Sia M modello contabile saturato di T (così che, per i definibili di M, l'analisi di Morley coincide con quella di Cantor-Bendixson); in particolare, per ogni formula $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ a parametri in M e per ogni $\beta < \omega$,

esiste $\theta(\overline{w})$ formula ancora a parametri in M tale che, per ogni $\overline{b} \in M$,

$$CB\text{-rango } \varphi(M^n, \overline{b}) < \beta \quad \text{se e solo se } M \models \theta(\overline{b})$$

(dove n è la lunghezza di $\overline{v}$; questo segue da [B] nel caso $\aleph_1$-categorico, ed è una semplice conseguenza del teorema di Ryll-Nardzewski nel caso $\aleph_0$-categorico ω-stabile).

Si vuole provare che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, CB-tipo $B_n(M) = (\alpha n, d^n)$. Si procede per induzione su n.

$n = 1$: è l'ipotesi.

$n \Rightarrow n+1$: per ogni formula $\psi(v, \overline{w})$ a parametri in M (e al più $n+1$ variabili libere), sia $\psi'(v)$: $\exists \overline{w} \psi(v, \overline{w})$. Proviamo che, comunque si scelgono β, $\gamma < \omega$ e la formula $\psi(v, \overline{w})$ (con $\psi(M^{n+1}) \neq \emptyset$), se

a) CB-rango $\psi'(M) \leqslant \gamma$,

b) CB-rango $\psi(a, M^n) \leqslant \beta$ per ogni $a \in \psi'(M)$,

allora CB-rango $\psi(M^{n+1}) \leqslant \gamma(+)\beta$. Si procede per induzione su $\gamma(+)\beta$. Il caso $\gamma(+)\beta = 0$ è ovvio; supponiamo la tesi soddisfatta per ogni scelta di γ', β' con $\gamma'(+)\beta' < \gamma(+)\beta$, e proviamola per $\gamma(+)\beta$. Si verifica facilmente che, senza perdita di generalità, si può supporre:

1) CB-rango $\psi'(M) = \gamma$;

2) CB-grado $\psi'(M) = 1$.

Sia $\theta(v)$ tale che, per ogni $a \in \psi'(M)$,

$$CB\text{-rango } \psi(a, M^n) < \beta \quad \text{se e solo se} \quad M \models \theta(a)\,,$$

e si ponga

$$\psi_0(v, \overline{w})\colon \psi(v, \overline{w}) \wedge \theta(v)\,, \qquad \psi_1(v, \overline{w})\colon \psi(v, \overline{w}) \wedge \neg\, \theta(v)\,.$$

1° *caso*: CB-rango $\psi_0'(M) = \gamma$ (così che CB-rango $\psi_1'(M) < \gamma$ per 2). Si ha che, per ogni $a \in \psi_0'(M)$, CB-rango $\psi_0(a, M^n) < \beta$, dunque esiste $\beta' < \beta$ tale che, per ogni $a \in \psi_0'(M)$, CB-rango $\psi_0(a, M^n) \leqslant \beta'$ (si ricordi che $\beta < \omega$); allora $\gamma(+)\beta' < \gamma(+)\beta$ e dunque CB-rango $\psi_0(M^{n+1}) \leqslant \gamma(+)\beta' < \gamma(+)\beta$. D'altra parte, se $\psi_1'(M) \neq \emptyset$ (ovvero se $\psi_1(M^{n+1}) \neq \emptyset$), CB-rango $\psi_1'(M) = \gamma' < \gamma$; come sopra si deduce allora che CB-rango $\psi_1(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$, così che CB-rango $\psi(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$.

2° *caso*: CB-rango $\psi_0'(M) < \gamma$ (così che CB-rango $\psi_1'(M) = \gamma$). Allora, se $\psi_0'(M) \neq \emptyset$, ovvero se $\psi_0(M^{n+1}) \neq \emptyset$, CB-rango $\psi_0(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$. D'altra parte, per ogni $a \in \psi_1'(M)$, si ha CB-rango $\psi_1(a, M^n) = \beta$. Sia

$$m = \max\{CB\text{-grado } \psi_1(a, M^n) \colon a \in \psi_1'(M)\}$$

(m esiste per la categoricità di T: si usi [B] o Ryll-Nardzewski). Allora, per ogni partizione $\varphi_0(v, \overline{w}), \ldots, \varphi_m(v, \overline{w})$ di $\psi_1(v, \overline{w})$ con $\varphi_j(M^{n+1}) \neq \emptyset$ per ogni $j \leqslant m$, per ogni $a \in \psi_1'(M)$, esiste $j \leqslant m$ tale che CB-rango $\varphi_j(a, M^n) < \beta$. Sia $j \leqslant m$ tale che

$$\{a \in \psi_1'(M) \colon CB\text{-rango } \varphi_j(a, M^n) < \beta\}$$

(insieme definibile) ha CB-rango γ. Allora:

A) se CB-rango $\varphi_j'(M) < \gamma$, segue al solito modo che CB-rango $\varphi_j(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$;

B) se CB-rango $\varphi_j'(M) = \gamma$, allora CB-grado $\varphi_j'(M) = 1$, e, per ogni $a \in \varphi_j'(M)$, CB-rango $\varphi_j(a, M^n) \leqslant \beta$. Di più è facile dedurre che $\{a \in \varphi_j'(M) \colon CB\text{-rango } \varphi_j(a, M^n) < \beta\}$ ha CB-rango γ. Segue da quanto osservato nel 1° caso che CB-rango $\varphi_j(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$. Allora, per ogni partizione $\varphi_0(v, \overline{w}), \ldots, \varphi_m(v, \overline{w})$ di $\psi_1(v, \overline{w})$, esiste $j \leqslant m$ tale che CB-rango $\varphi_j(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$. Ancora ne risulta CB-rango $\psi_1(M^{n+1}) \leqslant \gamma(+)\beta$ e dunque CB-rango $\psi(M^{n+1}) \leqslant \gamma(+)\beta$.

Siano ora $\varphi_0(\overline{w}), \ldots, \varphi_{d^n-1}(\overline{w})$, $\theta_0(v), \ldots, \theta_{d-1}(v)$ formule a 2 a 2 disgiunte di CB-tipo $(\alpha n, 1)$ in $B_n(M)$, $(\alpha, 1)$ in $B_1(M)$ rispettivamente. Si ponga, per ogni $i < d^n$ e per ogni $j < d$,

$$\psi_{ij}(v, \overline{w}) \colon \varphi_i(\overline{w}) \wedge \theta_j(v)\,;$$

allora, per ogni $i < d^n$, $j < d$,

$$CB\text{-rango } \psi_{ij}(v, \overline{w}) \leqslant \alpha n(+)\alpha = \alpha(n+1)\,.$$

Se vale $=$, siccome $\psi_{ij}'(M) = \theta_j(M)$ ha CB-tipo $(\alpha, 1)$, e, per ogni $a \in \theta_j(M)$, $\psi_{ij}(a, M^n) = \varphi_i(M^n)$ ha CB-tipo $(\alpha n, 1)$, si può procedere come nel 2° caso ($m = 1$), e dedurre che CB-grado $\psi_{ij}(M^{n+1}) = 1$.

Segue

$$CB\text{-tipo } B_{n+1}(M) \leqslant (\alpha(n+1), d^{n+1})$$

il che, unito con la proposizione 3, assicura la verità della tesi. □

Ricapitolando, se T è una teoria $b - \aleph_0$-categorica e ω-stabile e $f_T(1) = (\alpha, d)$, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $f_T(n) \geqslant (\alpha n, d^n)$. Inoltre, $=$ vale per T categorica. Purtroppo però non è detto che $=$ valga in generale. Ecco un controesempio.

Si procede come nel § 2, e si costruisce una struttura M a due piani $P(M)$, $Q(M)$ nel modo che segue.

1) Il piano inferiore $Q(M)$ ha dominio $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^2$, due relazioni 1-arie U, V per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^2$ rispettivamente, l'operazione s di successore in $\mathbb{Z}$, le proiezioni p_0, p_1 di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{Z}$, e le costanti per ogni elemento di $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^2$; è facile vedere che la relativa teoria è $\aleph_1$-categorica di rango di Morley 2 e grado di Morley 1. Come nel § 2, poi, si definisce un sottoinsieme X di $V(Q(M))$ tale che, per ogni modello N della teoria di $Q(M)$ e per ogni definibile S di N di CB-rango $\leqslant 1$, $S \cap X$ è finito.

2) È data una proiezione π del piano superiore $P(M)$ su $V(Q(M))$.

3) Per ogni $x \in V(Q(M)) - X$, $\pi^{-1}(x)$ è un insieme infinito (senza ulteriore struttura); per ogni $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ è una struttura ω-stabile $\aleph_0$-categorica di CB-tipo $(2, 1)$ (questo si può ottenere aggiungendo al linguaggio, per ogni $x \in X$, una relazione di equivalenza E_x che ha in $\pi^{-1}(x)$ infinite classi, tutte di cardinalità infinita, ed è banale fuori di $\pi^{-1}(x)$).

Procedendo come nel § 2, si vede che la teoria T di M è ω-stabile e che, inoltre, per ogni modello contabile N di T, CB-tipo $B_1(N) = (3, 1)$, mentre CB-rango $B_2(N) \geqslant 7$. Aggiungiamo al linguaggio di T infinite costanti, e a T gli assiomi per dire che le interpretazioni di tali costanti soddisfano U, e sono indipendenti rispetto a s; siano L', T' il linguaggio e la teoria così ottenuti. Si ha ancora evidentemente che T' è ω-stabile e che, per ogni modello contabile M' di T', CB-tipo $B_1(M') = (3, 1)$ mentre CB-rango $B_2(M') \geqslant 7$ Inoltre T' è $b - \aleph_0$-categorica: siano infatti M', N' modelli contabili di T', allora non c'è da aspettarsi che $M' \simeq N'$ (T' non è certo $\aleph_0$-categorica), tuttavia $M' \restriction_L \simeq N' \restriction_L$ (dimenticando le nuove costanti, $M' \restriction_L$ e $N' \restriction_L$ contengono semplicemente infinite copie di $\mathbb{Z}$ oltre quella con le proiezioni di X; inoltre, per ogni $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ ha una teoria $\aleph_0$-categorica);

allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$B_n(M' \restriction_L) \simeq B_n(N' \restriction_L) ;$$

ma $B_n(M' \restriction_L) = B_n(M')$, $B_n(N' \restriction_L) = B_n(N')$, dunque $B_n(M') \simeq B_n(N')$. Dato che $f_{T'}(1) = (3, 1)$, ma $f_{T'}(2) \neq (6, 1)$, T' è il controesempio cercato.

BIBLIOGRAFIA

[B] J. Baldwin, *α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T*, Trans. Amer. Math. Soc., **181** (1973), pp. 37-51.

[CHL] G. Cherlin - L. Harrington - A. Lachlan, *$\aleph_0$-categorical $\aleph_0$-stable structures*, Ann. Pure Appl. Logic, **28** (1985), pp. 103-135.

[K] J. Ketonen, *The structure of countable Boolean algebras*, Ann. Math., **108** (1978), pp. 41-89.

[L] A. Lachlan, *Singular properties of Morley rank*, Fund. Math., **108** (1980), pp. 145-157.

[MM] P. Mangani - A. Marcja, *$\aleph_1$-Boolean spectrum and stability*, Atti Accad. Naz. Lincei, **72** (1982), pp. 269-272.

[MT] A. Marcja - C. Toffalori, *On pseudo-$\aleph_0$-categorical theories*, Zeitschr. f. Math. Logik, **30** (1984), pp. 533-540.

[ST] C. Steinhorn - C. Toffalori, *Boolean spectra of strongly o-minimal theories*, preprint.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 giugno 1986.