Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Michael Schenke

Analoga des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie in der Gruppentheorie - I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 77 (1987), p. 255-303

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1987__77__255_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 77 (1987)

Analoga des Fundamentalsatzes der Projektiven Geometrie in der Gruppentheorie - I.

MICHAEL SCHENKE (*)

Bezeichnungen und wichtige Definitionen.

Während der ganzen Arbeit bezeichne

$\Phi(G)$	die Frattinigruppe der Gruppe G, den Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von G,
$N_G(U)$	den Normalisator der Untergruppe U von G,
$C_G(U)$	den Zentralisator der Untergruppe U von G,
$Z(G)$	das Zentrum der Gruppe G,
$Z_2(G)$	das zweite Zentrum der Gruppe G, also die Untergruppe Z von G mit $Z(G) \leqq Z$ und $Z(G/Z(G)) = Z/Z(G)$,
$\|G\|$	die Ordnung der Gruppe G,
$o(x)$	die Ordnung des Elementes x,
$\exp G$	den Exponenten der Gruppe G, also die minimale natürliche Zahl n, so daß für alle $g \in G$ gilt $g^n = 1$,
$d(G)$	die minimale Erzeugendenzahl der Gruppe G.

Es bedeuten

$N \trianglelefteq G$	N ist normal in G,
$M \lessdot G$	M ist eine maximale Untergruppe von G.

Ein Automorphismus σ der Gruppe G heißt

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, Olshausenstr. 40-60, 2300 Kiel 1, Rep. Fed. Tedesca.

innerer Automorphismus, wenn es ein $x \in G$ gibt, so daß für alle

$g \in G$ gilt $g^\sigma = g^x$,

Potenzautomorphismus, wenn für alle $U \leqq G$ gilt $U^\sigma = U$,
universeller Potenzautomorphismus, wenn es ein $z \in \mathbf{Z}$ gibt, so daß

für alle $g \in G$ gilt $g^\sigma = g^z$.

Es seien

$\mathfrak{V}(G)$	der Verband der Untergruppen von G,
$U \cap V$	der Durchschnitt von U und V,
$U \cup V$	die verbandstheoretische Vereinigung von U und V, in Untergruppenverbänden also die von U und V erzeugte Untergruppe,
$\langle\mathfrak{M}\rangle$	das gruppentheoretische Erzeugnis der Teilmenge $\mathfrak{M}$ der Gruppe G.

Eine

Projektivität der Gruppe ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{V}(G)$, eine
Autoprojektivität der Gruppe G ist eine Projektivität der Gruppe G auf ihren eigenen Untergruppenverband.

Eine Projektivität φ der Gruppe G heißt

normalisatorerhaltend, wenn für alle $U \leqq G$ gilt $(N_G(U))^\varphi = N_{G^\varphi}(U^\varphi)$,
zentralisatorerhaltend, wenn für alle $U \leqq G$ gilt $(C_G(U))^\varphi = C_{G^\varphi}(U^\varphi)$,
indexerhaltend, wenn für alle zyklischen Untergruppen U von G und alle $V \leqq U$ gilt $|U:V| = |U^\varphi : V^\varphi|$. Nach [13], Seite 41, folgt bei endlichen Gruppen daraus, daß $|U:V| = |U^\varphi : V^\varphi|$ für alle $V \leqq U \leqq G$ gilt.

Seien $x, y, x_i \in G$. Dann seien

$[x, y]$	$= x^{-1}y^{-1}xy$,
$[x_1, \ldots, x_n]$	$= [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$,
$[x, ny]$	$= [[x, (n-1)y], y]$ mit $[x, 1y] = [x, y]$,
$[U, V]$	$= \langle [u, v] \mid u \in U, v \in V\rangle$,
$K_1(G)$	$= G$,
$K_{i+1}(G)$	$= [K_i(G), G]$,
$\operatorname{cl} G$	die Klasse von G, also das minimale n mit $K_n(G) = 1$, falls dieses existiert.

Maximale Klasse hat eine Gruppe G der Ordnung p^n, wenn $\mathrm{cl}\, G = n - 1$ gilt.

In Gruppen maximaler Klasse gelten die folgenden Standardbezeichnungen:

G_i $= K_i(G)$ für alle $i \geqq 2$ und $G_1 = C_G(G_2/G_4)$.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen bezeichne auch

$L_i(G)$ die Untergruppen G_i.

Ferner seien

$GF(p)$ der Körper mit p Elementen,

$p^n\mathbb{Z}$ das Ideal $\{p^n z : z \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z}_{p^n}$ $= \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, der Faktorring modulo p^n.

0. Einleitung.

Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie besagt, daß jeder Isomorphismus des Teilraumverbandes eines n-dimensionalen Vektorraumes mit $n \geqq 3$ auf einen anderen Vektorraum durch eine semilineare Abbildung induziert ist. Insbesondere sind also die zugrunde liegenden Skalarenkörper isomorph. Da n-dimensionale Räume als Vektorräume isomorph zum n-fachen direkten Produkt des Körpers sind, liegt die folgende Fragestellung nahe:

Gegeben sei eine algebraische Struktur S. Eine Projektivität ist dann ein Isomorphismus des Verbandes gewisser Teilstrukturen. Gibt es ein n, so daß jedes Element von S oder großer Teilklassen von S durch den Verband dieser Teilstrukturen seines n-fachen direkten Produktes gekennzeichnet ist?

Für Gruppen, wo der Begriff « Projektivität » als Isomorphismus des Untergruppenverbandes festgelegt ist, ist ein sehr schönes Ergebnis in dieser Richtung der folgende Satz von Suzuki [12]:

Satz: Eine nichtabelsche endliche einfache Gruppe G ist durch den Untergruppenverband des direkten Produktes von G mit sich selbst bestimmt.

Zacher hat diesen Satz in [14] auch auf unendliche einfache Gruppen verallgemeinert, während Schmidt in [10] den gleichen Satz für perfekte Gruppen mit trivialem Zentrum erzielt. In [10] werden auch

Gegenbeispiele angegeben, wo der Satz ohne die Voraussetzung der Perfektheit falsch wird. Es handelt sich dabei um die sogenannten « Rottländergruppen ». Aus völlig anders gearteten Überlegungen von Schmidt in [11] kann jedoch geschlossen werden, daß das dreifache direkte Produkt isomorpher Rottländergruppen durch den Untergruppenverband gekennzeichnet ist.

Grundlage der auch für [14] und [10] wesentlichen Methode von Suzuki ist die Tatsache, daß die Diagonalen, das heißt Untergruppen D mit $D \cap G_1 = 1 = D \cap G_2$ und $DG_1 = G = DG_2$, im direkten Produkt G zweier isomorpher Gruppen G_1 und G_2 eineindeutig den Isomorphismen von G_1 auf G_2, also auch den Automorphismen von G_1, entsprechen. Damit induziert ein Isomorphismus φ des Untergruppenverbandes von G auf den einer Gruppe H mit $H = G_1^\varphi \times G_2^\varphi$ eine bijektive Abbildung von $\operatorname{Aut} G_1$ auf $\operatorname{Aut} G_1^\varphi$. Diagonalen und durch sie bestimmte Automorphismen werden auch in der vorliegenden Arbeit eine wichtige Rolle spielen.

0.1. *Ergebnisse der vorliegenden Arbeit.*

Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit der Frage beschäftigen, wann eine Projektivität eines gegebenen mehrfachen direkten Produktes endlicher Gruppen durch einen Isomorphisms induziert ist. In den ersten beiden Abschnitten werden wir Gruppen vom Exponenten p betrachten, im letzten vorwiegend Gruppen der Klasse zwei. Im Abschnitt 1 werden wir auch zweifache direkte Produkte behandeln, während der zweite Abschnitt solchen Gruppenklassen vorbehalten bleit, in denen die Aussage der Sätze für zweifache direkte Produkte im allgmeinen falsch wird. Wir werden folgende Sätze beweisen:

Für die Sätze 1 bis 5 gelte folgende Voraussetzung: Es sei $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine endliche Gruppe vom Exponenten p, wobei p eine ungerade Primzahl, $r \geqq 2$ und $|G| \geqq p^3$ ist; sei φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$.

Satz 1. Ist $\operatorname{cl} G_i = 2$ für alle i, so ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

Satz 2. Ist $p = 3$ und sind alle G_i nichtabelsch, so ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

Satz 3. Sind alle G_i isomorph und ist $\operatorname{cl} G_i \leqq 4$, so ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

SATZ 4. Es seien alle G_i isomorph, metabelsch von maximaler Klasse. Ferner sei $r \geqq 3$, und für alle i sei die Klasse von $C_{G_i}(K_2(G_i)/ /K_4(G_i))$ kleiner oder gleich zwei. Dann ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

SATZ 5. Sind alle G_i isomorph und metabelsch, sowie $r \geqq p-2$, so ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

SATZ 6. Es sei $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine endliche p-Gruppe der Klasse zwei zur ungeraden Primzahl p. Seien $r \geqq 3$, alle G_i isomorph und φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$. Dann ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

Wir werden ferner unsere Sätze weitgehend durch Beispiele abgrenzen. So werden wir durch ein Beispiel belegen, daß bei Satz 1 die Voraussetzung $\mathrm{cl}\, G_i = 2$ weder ersetzt werden kann durch $\mathrm{cl}\, G_i = 1$ für einige i noch durch $\mathrm{cl}\, G_i = 3$ für einige i. Wir werden ein Beispiel einer Autoprojektivität einer Gruppe der Klasse fünf angeben, die sonst alle Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, aber nicht durch einen Automorphismus induziert ist.

In einem längeren Teilabschnitt werden wir zeigen, daß es für jedes r eine Primzahl p und eine metabelsche Gruppe G vom Exponenten p gibt, so daß $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ mit isomorphen Untergruppen G_i eine Autoprojektivität besitzt, die nicht durch einen Automorphismus induziert ist. Da es sich um Gruppen maximaler Klasse handelt, zeigen diese Beispiele zunächst, daß die Voraussetzung über $L_1(G_i)$ in Satz 4 nicht ersatzlos gestrichen werden kann. Besonders aufschlußreich sind diese Gruppen aber im Hinblick auf Satz 5. Sie zeigen zwar nicht, daß $p-2$ die bestmögliche Schranke für r ist, aber sie zeigen, daß sich die angegebene Schranke nicht wesentlich verbessern läßt, insbesondere, daß es keine konstante Schranke, unabhängig von der Primzahl, geben kann.

Wir werden schließlich durch ein Beispiel belegen, daß Sätze ähnlicher Form in anderen als nilpotenten Gruppen nur schwerlich zu erwarten sind.

Zunächst sei noch etwas zur Notwendigkeit der Voraussetzungen der Sätze 1 bis 5 bemerkt:

Die Voraussetzung, daß $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$ gilt, ist unnötig, sobald eines der G_i nichtabelsch ist, die Voraussetzung $|G| \geqq p^3$ dient nur dazu, den Fall eines direkten Produktes zweier zyklischer Gruppen von Primzahlordung auszuschließen. Auch die Voraussetzung, daß die Primzahl p ungerade ist, bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da für Gruppen vom Exponenten zwei ohnehin jede Projektivität durch einen Isomorphismus induziert ist.

Unsere Ergebnisse für Gruppen vom Exponenten p stehen im Widerspruch zur sonstigen Erfahrung, die bei der Arbeit mit Untergruppenverbänden gemacht wird. Für gewöhnlich ist es so, daß, je komplizierter die Struktur einer Gruppe ist, sie desto eher durch den Verband festgelegt ist. Hier werden jedoch gerade die Gruppen kleinerer Klasse, einfachere Gruppen also, durch den Verband ihres zweifachen Produktes bestimmt, was bei den komplizierteren Gruppen von höherer Klasse nicht mehr der Fall sein muß.

Dieser scheinbare Gegensatz klärt sich dadurch auf, daß die Diagonalen eine ausgezeichnete Rolle im Verband eines zweifachen direkten Produktes spielen. Je komplizierter nun die Struktur einer Gruppe ist, desto weniger Automorphismen besitzt sie, also das zweifache Produkt auch weniger Diagonalen. Sind aber zu wenige Diagonalen vorhanden, so kann es Projektivitäten geben, die nicht durch Isomorphismen induziert sind.

0.2. *Baers Methode.*

Ein anderer Zugang zu der Untersuchung mehrfacher direkter Produkte liegt in dem folgenden Satz von Baer in [2]:

0.1 Satz (Baer). Sei G eine abelsche p-Gruppe, die mindestens drei unabhängige Elemente maximaler Ordnung enthält. Dann ist jede Projektivität von G auf eine abelsche Gruppe durch einen Isomorphismus induziert.

Da Baers Konstruktion von Isomorphismen für unsere Arbeit grundlegend ist, soll sie hier kurz für p-Gruppen geschildert werden:

Die ersten beiden Hilfssätze stammen aus [2] (Lemma 9.2.*d*, Korollar 9.3).

0.2 Lemma. Sei φ eine Projektivität einer abelschen p-Gruppe G auf eine Gruppe H. Seien $x, u \in G$ mit $\langle x\rangle \cap \langle u\rangle = 1$ und $u' \in H$ mit $\langle u\rangle^\varphi = \langle u'\rangle$. Ferner sei $o(x) \leqq o(u)$. Dann gibt es genau ein $x' \in H$ mit

$$(*) \qquad \langle x\rangle^\varphi = \langle x'\rangle \quad \text{und} \quad \langle xu\rangle^\varphi = \langle x'u'\rangle\,.$$

0.3 Lemma. Seien G eine abelsche p-Gruppe, $S \leqq G$, $u \in G$ mit $S \cap \langle u\rangle = 1$ und $o(u) \geqq \exp S$. Seien φ: $\mathfrak{V}(G) \to \mathfrak{V}(H)$ eine Projektivität und $u' \in H$ mit $\langle u\rangle^\varphi = \langle u'\rangle$. Für alle $x \in S$ gebe es genau ein $x' =: f(x; u, u')$ mit der Eigenschaft $(*)$. Dann ist $f(\cdot\,; u, u')$ eine eineindeutige Abbildung von S nach S^φ.

Von dieser Abbildung wird weiter dann gezeigt, daß sie ein Homomorphismus ist. Die nächsten beiden Hilfssätze stehen implizit im Beweis von 0.1 in [2].

0.4 Lemma. Seien G eine abelsche p-Gruppe, φ eine Projektivität von G auf eine abelsche Gruppe H und λ ein φ induzierender Isomorphismus. Seien $x, g \in G$ mit $1 \neq x$, $\langle g \rangle \cap \langle x \rangle = 1$ und $o(g) \leqq o(x)$. Dann ist $g^\lambda = f(g; x, x^\lambda)$.

0.5 Lemma. Seien G eine abelsche p-Gruppe mit drei unabhängigen Elementen maximaler Ordnung, φ eine Projektivität von G auf eine abelsche Gruppe H, $x \in G$ mit $o(x) = \exp G$ und $\bar{x} \in H$ mit $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle^\varphi$. Dann gibt es genau einen φ induzierenden Isomorphismus λ von G auf H mit $x^\lambda = \bar{x}$, und es gilt $y^\lambda = f(y; x, \bar{x})$ für alle $y \in G$ mit $\langle y \rangle \cap \langle x \rangle = 1$.

Die beiden letzten benötigten Hilfssätze zitieren wir aus anderen Quellen: 0.6 kann in [13], Proposition 2.5, S.34 gefunden, 0.7 aus [4], Bemerkung (D), S.306 entnommen werden.

0.6 Lemma. Sei $G = K \times \langle x \rangle$ eine abelsche p-Gruppe mit $o(x) \geqq \exp K$. K enthalte zwei unabhängige Elemente maximaler Ordnung. Seien φ eine Projektivität auf eine abelsche Gruppe und $\bar{x} \in G$ mit $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle^\varphi$. Sei $f(k; x, \bar{x})$ für die $k \in K$ wie in 0.3 definiert. Dann ist $f(\cdot\,; x, \bar{x})$ auf K ein φ induzierender Isomorphismus.

0.7 Lemma. Seien u, v, w unabhängige Elemente der abelschen p-Gruppe G. Es gelte $o(u) \geqq o(v), o(w)$. Seien φ eine Projektivität von G auf eine abelsche Gruppe H und $u' \in H$ mit $\langle u \rangle^\varphi = \langle u' \rangle$. Für alle $x \in \langle v, w \rangle$ gebe es genau ein x' mit der Eigenschaft $(*)$ aus 0.2. Mit der Definition wie in 0.3 gilt dann

$$f(vw; u, u') = f(v; u, u') f(w; u, u') .$$

1. Zweifache Produkte von Gruppen vom Exponenten p.

In diesem Abschnitt werden wir zunächst Baers Konstruktion auf nichtabelsche Gruppen verallgemeinern und Eigenschaften erschließen, die Baers Abbildungen in minimalen Gegenbeispielen haben müssen.

Nach diesen Überlegungen, die auch später noch von Wichtigkeit sein werden, werden wir als Folgerungen die Sätze 1, 2 und 3 beweisen. Wir werden ebenfalls durch Beispiele zeigen, daß diese Sätze sich nicht weiter verbessern lassen.

Wir treffen folgende Vereinbarungen: Es werden grundsätzlich, wenn von p-Gruppen die Rede ist, nur ungerade Primzahlen betrachtet. Auch werden in den Abschnitten 1 und 2 bei Gruppen vom Exponenten p die Exponenten von Gruppenelementen im allgemeinen als Elemente von $GF(p)$ verstanden, so daß wir dort dividieren und die bekannten Gesetze für das Rechnen in Polynomringen über Körpern anwenden können.

1.1. *Baersche Abbildungen 1.*

1.1 Definition. Seien $G = X \times Y$ und φ eine Projektivität von G auf $G^\varphi = X^\varphi \times Y^\varphi$. Es seien X und Y endliche p-Gruppen ungleich der Einsgruppe mit $\exp X = \exp Y$.

a.) Seien $x \in G$ und $\bar{x} \in G^\varphi$ mit $\langle x \rangle^\varphi = \langle \bar{x} \rangle$. Für alle $y \in C_G(x)$ mit $o(y) \leqq o(x)$ und $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$ sei $f(y; x, \bar{x})$ das nach 0.2 wohlbestimmte Element von G^φ mit

$$\langle y \rangle^\varphi = \langle f(y; x, \bar{x}) \rangle \quad \text{und} \quad \langle xy \rangle^\varphi = \langle \bar{x} f(y; x, \bar{x}) \rangle .$$

b.) Eine Abbildung α: $G \to G^\varphi$ heißt Baersche Abbildung (zur Projektivität φ, zu X, Y und den Elementen x und y), falls $x \in X$ und $y \in Y$ mit $o(x) = o(y) = \exp G$ existieren, so daß für alle $a \in X$ und $b \in Y$ gilt

$$a^\alpha = f(a; y, y^\alpha) , \; b^\alpha = f(b; x, x^\alpha) \quad \text{und} \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha .$$

1.2 Bemerkungen. *a.*) Für eine gegebene Gruppe G mit Projektivität φ, $x \in G$ und $\bar{x}$ mit $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle^\varphi$ hat der Definitionsbereich der durch 1.1.*a*) definierten Abbildung $f(\cdot\,; x, \bar{x})$ im allgemeinen keine gruppentheoretische Struktur. Er ist nur eine Teilmenge von G.

b.) Offenbar induziert eine Baersche Abbildung α die Projektivität φ auf X und Y. Wir zeigen in 1.6, daß sie φ auf ganz G induziert, wenn $\exp G = p$ und $|G| \geqq p^3$ ist.

c.) Ist λ ein φ induzierender Isomorphismus, so muß λ eine Baersche Abbildung zu geeigneten $x, y \in G$ sein.

Beweis von $c.$). Seien die Voraussetzungen wie in 1.1, λ ein φ induzierender Isomorphismus, $x, a \in X$, $y, b \in Y$ mit $o(x) = o(y) = \exp G$. Dann gilt

$$\langle a^\lambda \rangle = \langle a \rangle^\varphi \quad \text{und} \quad \langle a^\lambda y^\lambda \rangle = \langle (ay)^\lambda \rangle = \langle ay \rangle^\varphi ,$$

also ist $a^\lambda = f(a; y, y^\lambda)$. Entsprechend gilt

$$\langle b^\lambda \rangle = \langle b \rangle^\varphi \quad \text{und} \quad \langle x^\lambda b^\lambda \rangle = \langle (xb)^\lambda \rangle = \langle xb \rangle^\varphi ,$$

also $b^\lambda = f(b; x, x^\lambda)$. Da λ ein Isomorphismus ist, gilt auch $(ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda$, und λ ist eine Baersche Abbildung zu x und y.

Im Teilabschnitt 1.1 werden wir vorwiegend Baersche Abbildungen von Gruppen vom Exponenten p untersuchen.

1.3 Lemma. Seien $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine p-Gruppe, $G_i \neq 1$, $r \geqq 2$ und φ eine Projektivität von G.

a.) Sei $\exp G = p$ und mindstens eines der G_i nichtabelsch. Dann ist φ indexerhaltend, und es gilt $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$.

b.) Ist $\exp G = p$ und $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$, dann ist φ normalisator- und zentralisatorerhaltend.

c.) Gilt $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$, dann ist φ indexerhaltend.

d.) Sind alle G_i isomorph und gilt $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$, so ist φ normalisator- und zentralisatorerhaltend.

Beweis. *a.*) und *c.*): Nach [13], Theorem 12, S. 12 sind p-Gruppen, die eine nicht-indexerhaltende Projektivität zulassen, zyklisch oder elementarabelsch. In *a.*) ist jedoch vorausgesetzt, daß die Urbildgruppe nichtabelsch ist. Da $r \geqq 2$ ist, kann auch bei *c.*) die Gruppe G nicht zyklisch sein. Ist G elementarabelsch, so folgt die Behauptung von *c.*) aus [13], Proposition 1.4, S. 11. Seien zum Beweis der zweiten Aussage von *a.*) nun g, h aus verschiedenen direkten Faktoren G_i und G_j. Da φ indexerhaltend ist, ist dann $|\langle g, h \rangle| = |\langle g, h \rangle^\varphi| = p^2$, also $\langle g, h \rangle^\varphi$ abelsch. Das heißt, daß auch G_i^φ und G_j^φ einander zentralisieren.

b.) Seien $U \leqq G$ und $x \in N_G(U)$. Ist $x \in U$, so ist auch $\langle x \rangle^\varphi \leqq U^\varphi$. Ist $x \notin U$, so ist $|\langle U, x \rangle : U| = p$, also auch, da nach *c.*) schon φ indexerhaltend ist, $|\langle U^\varphi, \langle x \rangle^\varphi \rangle : U^\varphi| = p$. Das heißt aber $\langle x \rangle^\varphi \leqq N_{G^\varphi}(U^\varphi)$. Nach [10] ist φ dann auch zentralisatorerhaltend.

d.) Dies ist ebenfalls eine Folgerung aus [10].

Für die nächsten Hilfssätze verabreden wir die folgende Generalvoraussetzung:

(GV) Es seien $G = X \times Y$, φ eine Projektivität von G auf $G^\varphi = X^\varphi \times Y^\varphi$, X, Y endliche Gruppen vom Exponenten p, $|G| \geqq p^3$, $1 \neq x \in X$, $1 \neq y \in Y$ und α eine Baersche Abbildung zu φ, X, Y, x und y.

1.4 Lemma. Es gelte (GV).

a.) Für alle $g, h \in G$ mit $[g, h] = 1$ ist $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha$.

b.) Für alle $g \in G$ und $i \in GF(p)$ ist $(g^i)^\alpha = (g^\alpha)^i$.

c.) Die Abbildung α ist bijektiv.

Beweis. *a.*) Seien zunächst $g, h \in X$ mit $[g, h] = 1$, Wegen $|G| \geqq p^3$ gibt es dann eine elementarabelsche Gruppe A der Ordnung p^3 mit $\langle y, g, h \rangle \leqq A$. Sei K ein $\langle g, h \rangle$ enthaltendes Komplement zu $\langle y \rangle$ in A, also $A = K \times \langle y \rangle$. Dann liegt K im Definitionsbereich der Abbildung $f(\cdot\,; y, y^\alpha)$, und nach 0.5 läßt sich $f(\cdot\,; y, y^\alpha)|_K$ zu einem Isomorphismus λ von A auf A^φ fortsetzen. Wegen $\langle g, h \rangle \leqq X$ und der Definition der Baerschen Abbildung gilt

$$(gh)^\alpha = f(gh; y, y^\alpha) = (gh)^\lambda = g^\lambda h^\lambda = f(g; y, y^\alpha) f(h; y, y^\alpha) = g^\alpha h^\alpha .$$

Seien $g, h \in Y$, so betten wir $\langle x, g, h \rangle$ in eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^3 ein und schließen genauso.

Seien $g = g_1 g_2$, $h = h_1 h_2 \in G$ mit $g_1, h_1 \in X$ und $g_2, h_2 \in Y$. Dann ist

$$(gh)^\alpha = (g_1 g_2 h_1 h_2)^\alpha = (g_1 h_1 g_2 h_2)^\alpha = (g_1 h_1)^\alpha (g_2 h_2)^\alpha =$$
$$= g_1^\alpha h_1^\alpha g_2^\alpha h_2^\alpha = g_1^\alpha g_2^\alpha h_1^\alpha h_2^\alpha = g^\alpha h^\alpha .$$

Dabei folgen die dritte und die letzte Gleichheit aus der Definition der Baerschen Abbildung, die vierte aus dem, was soeben bewiesen wurde.

b.) Ist eine einfache durch Induktion zu erschließende Folgerung aus *a.*).

c.) Da φ von α auf X und Y induziert wird und $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha$ für alle $g \in X$, $h \in Y$ gilt, ist nur zu zeigen, daß α auf zyklischen Untergruppen von X und Y bijektiv ist. Dies folgt aus *b.*).

1.5 Lemma. Es gelte (GV). Seien $\bar{x} \in X$ und $\bar{y} \in Y$. Dann gilt

$$\langle \bar{x}\bar{y} \rangle^\varphi = \langle \bar{x}^\alpha \bar{y}^\alpha \rangle = \langle (\bar{x}\bar{y})^\alpha \rangle \,.$$

Beweis. Ist $\bar{x} = 1$ oder $\bar{y} = 1$, so ist die Behauptung trivial. Seien also $\bar{x} \neq 1 \neq \bar{y}$. Wir wählen ein Element $k \in G$ auf folgende Weise:

— Ist $[x, \bar{x}] \neq 1$, also weder x noch $\bar{x}$ in $Z(X)$, so sei $1 \neq k \in Z(X)$ gewählt.

— Ist $[x, \bar{x}] = 1$ und $|\langle x, \bar{x} \rangle| = p^2$, so sei $k := x\bar{x}$.

— Ist $\langle x \rangle = \langle \bar{x} \rangle$ und X nicht zyklisch, dann sei $1 \neq k$ beliebig aus $C_X(x) \setminus \langle x \rangle$.

— Ist X zyklisch, so ist wegen $|G| \geqq p^3$ dann Y nicht zyklisch, und wir wählen $k \in C_Y(y) \cap C_Y(\bar{y})$ in diesem Falle genauso, wie wir es in den ersten drei Fällen für x und $\bar{x}$ getan haben. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß X nicht zyklisch und daher $k \in X$ ist. In jedem Falle sind damit die Gruppen

$$A_1 := \langle x, k, y \rangle \,, \; A_2 := \langle x, k, \bar{y} \rangle \,, \; A_3 := \langle \bar{x}, k, y \rangle \,, \; A_4 := \langle \bar{x}, k, \bar{y} \rangle$$

elementarabelsch der Ordnung p^3. Es müssen diese Gruppen aber nicht paarweise verschieden sein. Nach 0.5 gibt es für jedes i genau einen φ auf A_i induzierenden Isomorphismus λ_i, so daß für alle $m \in A_i$ mit $\langle m \rangle \cap \langle k \rangle = 1$ gilt $m^{\lambda_i} = f(m; k, k^\alpha)$. Insbesondere ist

$$(*) \qquad m^{\lambda_i} = m^{\lambda_j} \qquad \text{für alle } m \in A_i \cap A_j \text{ mit } \langle m \rangle \cap \langle k \rangle = 1 \,.$$

1) Wir betrachten A_1:

Nach Definition von α ist $k^\alpha = f(k; y, y^\alpha)$, also ist $\langle k^\alpha y^\alpha \rangle = \langle ky \rangle^\varphi$. Wegen $y \in A_1$ gilt $y^{\lambda_1} = f(y; k, k^\alpha)$, also $\langle ky \rangle^\varphi = \langle k^\alpha y^{\lambda_1} \rangle$. Ferner ist $\langle y^\alpha \rangle = \langle y \rangle^\varphi = \langle y^{\lambda_1} \rangle$. Nach 0.2 ist also $y^\alpha = y^{\lambda_1}$. Nach 0.4 ist auch

$$x^{\lambda_1} = f(x; y, y^{\lambda_1}) = f(x; y, y^\alpha) = x^\alpha \,.$$

Die erste Gleichheit folgt aus 0.4, die letzte aus der Definition der Baerschen Abbildung α.

2) Wir betrachten A_2:

Dort ist $\bar{y}^{\lambda_2} = f(\bar{y}; x, x^{\lambda_2}) = f(\bar{y}; x, x^{\lambda_1}) = f(\bar{y}; x, x^{\alpha}) = \bar{y}^{\alpha}$. Die erste Gleichheit folgt aus 0.4, die zweite aus (∗) und die letzte aus der Definition von α.

3) Wir betrachten A_3:

Dort ist $\bar{x}^{\lambda_3} = f(\bar{x}; y, y^{\lambda_3}) = f(\bar{x}; y, y^{\lambda_1}) = f(\bar{x}; y, y^{\alpha}) = \bar{x}^{\alpha}$, wobei die erste Gleichheit aus 0.4, die zweite aus (∗) und die letzte aus der Definition von α folgen.

4) Wir betrachten A_4:

Es ist $\bar{x}^{\alpha}\bar{y}^{\alpha} = \bar{x}^{\lambda_3}\bar{y}^{\lambda_2} = \bar{x}^{\lambda_4}\bar{y}^{\lambda_4} = (\bar{x}\bar{y})^{\lambda_4}$, wobei die mittlere Gleichheit wieder (∗) ist. Da λ_4 die Projektivität φ auf A_4 induziert, folgt $\langle \bar{x}^{\alpha}\bar{y}^{\alpha}\rangle = \langle \bar{x}\bar{y}\rangle^{\varphi}$. Wegen 1.4*a*) ist diese Untergruppe gleich $\langle(\bar{x}\bar{y})^{\alpha}\rangle$, was 1.5 beweist.

Lemma 1.5 besagt insbesondere, daß die Baersche Abbildung unabhängig von der Auswahl von x und y ist. Denn sind $1 \neq \bar{x} \in X$ und $1 \neq \bar{y} \in Y$, so gilt für alle $a \in X$ und $b \in Y$:

$$f(a; y, y^{\alpha}) = a^{\alpha} = f(a; \bar{y}, \bar{y}^{\alpha}) \qquad \text{und} \qquad f(b; x, x^{\alpha}) = b^{\alpha} = f(b; \bar{x}, \bar{x}^{\alpha}) \, .$$

1.6 Lemma. Ist (GV) erfüllt, so gilt:

$$\alpha \text{ induziert } \varphi \, .$$

Beweis. Nach 1.5 gilt $\langle g\rangle^{\varphi} = \langle g\rangle^{\alpha}$ für alle $g \in G$. Sei nun $U \leqq G$. Dann ist, zunächst verbandstheoretisch,

$$U^{\varphi} = \bigcup_{u \in U} \langle u\rangle^{\varphi} = \bigcup_{u \in U} \langle u\rangle^{\alpha} \, .$$

Daraus folgt $U^{\varphi} = U^{\alpha}$ als Menge.

Wir führen nun zwei im Verlauf der Arbeit wiederholt vorkommende Schreibweisen ein:

1.7 Definition. *a.*) Sei G eine endliche Gruppe. Ist $i \in \mathbb{Z}$ oder $\exp G = p$ und $i \in GF(p)$, so sei ϱ_i die Abbildung von G nach G mit

$g^{\varrho_i} = g^i$ für alle $g \in G$. Die Abbildungen ϱ_i heißen auch universelle Potenzabbildungen.

b.) Sei $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ mit $r \in \mathrm{N}$ eine endliche Gruppe. Ist $i \in \{1, \ldots, r\}$, so sei π_i die Abbildung von G nach G_i, die jedem $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ mit $g_j \in G_j$ für alle j das Element g_i zuordnet. Diese Abbildungen heißen Projektionen.

1.8 LEMMA. Es gelte (GV).

a.) Für alle $i \neq 0$ ist $\varrho_i \circ \alpha$ eine Baersche Abbildung.

b.) Ist β eine weitere Baersche Abbildung von G zu φ und $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ mit $G = \bar{X} \times \bar{Y}$, $1 \neq \bar{x} \in \bar{X}$ und $1 \neq \bar{y} \in \bar{Y}$, so gibt es ein $i \in GF(p) \setminus \{0\}$, so daß $\beta = \varrho_i \circ \alpha$ ist.

BEWEIS. *a.*) Sei $i \neq 0$ gegeben. Wegen 1.4 und 1.6 gilt für alle $g \in X$ und $h \in Y$ dann

$$\langle g^{\varrho_i \circ \alpha} \rangle = \langle g^\alpha \rangle = \langle g \rangle^\varphi , \qquad \langle h^{\varrho_i \circ \alpha} \rangle = \langle h \rangle^\alpha = \langle h \rangle^\varphi ,$$

$$\langle g^{\varrho_i \circ \alpha} y^{\varrho_i \circ \alpha} \rangle = \langle (gy)^{\varrho_i \circ \alpha} \rangle = \langle (gy)^\alpha \rangle = \langle gy \rangle^\varphi ,$$

$$\langle x^{\varrho_i \circ \alpha} h^{\varrho_i \circ \alpha} \rangle = \langle (xh)^{\varrho_i \circ \alpha} \rangle = \langle (xh)^\alpha \rangle = \langle xh \rangle^\varphi \quad \text{und} \quad (gh)^{\varrho_i \circ \alpha} = g^{\varrho_i \circ \alpha} h^{\varrho_i \circ \alpha} .$$

Dies aber sind die Bedingungen dafür, daβ $\varrho_i \circ \alpha$ eine Baersche Abbildung ist.

b.) Da α bijektiv ist, gibt es α^{-1}, und $\beta \circ \alpha^{-1}$ induziert nach 1.6 die triviale Projektivität auf G. Sei $1 \neq z \in Z(G)$ und $z^{\beta \circ \alpha^{-1}} = z^i$. Dann ist $i \neq 0$, da $\alpha|_{\langle z \rangle}$ und $\beta|_{\langle z \rangle}$ Isomorphismen sind. Für alle $g \in G$ ist $\langle g, z \rangle$ abelsch, mit 1.4 also $\beta \circ \alpha^{-1}|_{\langle g, z \rangle}$ ein Potenzautomorphismus und daher $g^{\beta \circ \alpha^{-1}} = g^i$, was *b.*) beweist.

Wir kommen nun zu besonders für Induktionen wichtigen Hilfssätzen:

1.9 LEMMA. Es gelte (GV). Sei $N = N_1 \times N_2$ ein Normalteiler von G mit $N_1 = N \cap X \neq X$ und $N_2 = N \cap Y \neq Y$. Sei $U = U_1 \times U_2$ eine Untergruppe von G mit $U_1 = U \cap X \neq 1$ und $U_2 = U \cap Y \neq 1$.

a.) Sei $\bar{\varphi}$ die von φ auf G/N induzierte Projektivität. Dann induziert α auf G/N eine Baersche Abbildung zu $\bar{\varphi}$.

b.) Auf U induziert α eine Baersche Abbildung zu der von φ dort induzierten Projektivität.

c.) Ist $\beta \neq \alpha$ eine weitere Baersche Abbildung von G zu φ, so ist die von β auf G/N induzierte Abbildung ungleich der von α dort induzierten Abbildung. Entsprechendes gilt für U.

Beweis. *a.*) wird durch Induktion nach $|N|$ bewiesen. Wegen 1.3.*b*) ist $N^\varphi \trianglelefteq G^\varphi$. Ist $|N| = p$, also N zentral, so zeigen wir zunächst, daß α eine Abbildung auf G/N induziert. Sei $g \in G$. Dann ist $\langle g, N\rangle$ abelsch und gemäß 1.4 folglich

$$(gN)^\alpha = \{gn\colon n \in N\}^\alpha = \{(gn)^\alpha\colon n \in N\} = \{g^\alpha n^\alpha\colon n \in N\} =$$
$$= \{g^\alpha n^\alpha\colon n^\alpha \in N^\alpha\} = g^\alpha N^\alpha .$$

Also werden Nebenklassen auf Nebenklassen abgebildet. Sei die so erhaltene Abbildung von G/N auf G^φ/N^φ mit $\bar{\alpha}$ bezeichnet. Seien nun $\bar{x} \in X \setminus N_1$, $\bar{y} \in Y \setminus N_2$, $a \in X$, $b \in Y$ beliebig gewählt. Nach 1.5 ist dann

$$\langle \bar{x}b\rangle^\varphi = \langle \bar{x}^\alpha b^\alpha\rangle \quad \text{und} \quad \langle a\bar{y}\rangle^\varphi = \langle a^\alpha \bar{y}^\alpha\rangle .$$

Ferner ist nach der Definition der Baerschen Abbildung

$$\langle a^\alpha\rangle = \langle a\rangle^\varphi , \quad \langle b^\alpha\rangle = \langle b\rangle^\varphi \quad \text{und} \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha .$$

Wegen $N^\alpha = N^\varphi$ und der Tatsache, daß die Einschränkung von α auf jede abelsche Untergruppe ein Isomorphismus ist, gilt

$$\langle \bar{x}NbN\rangle^\varphi = \big(\langle \bar{x}b\rangle N\big)^\varphi = \langle \bar{x}b\rangle^\varphi N^\varphi = \langle \bar{x}^\alpha b^\alpha\rangle N^\alpha = \langle (\bar{x}b)^\alpha\rangle N^\alpha =$$
$$= \langle (\bar{x}b)\rangle^\alpha N^\alpha = \langle (\bar{x}b)N\rangle^\alpha = \langle \bar{x}NbN\rangle^\alpha = \langle (\bar{x}N)^\alpha (bN)^\alpha\rangle$$

und somit $\langle (\bar{x}N)(bN)\rangle^{\bar{\varphi}} = \langle (\bar{x}N)^{\bar{\alpha}}(bN)^{\bar{\alpha}}\rangle$. Entsprechend wird

$$\langle (aN)(\bar{y}N)\rangle^{\bar{\varphi}} = \langle (aN)^{\bar{\alpha}}(\bar{y}N)^{\bar{\alpha}}\rangle$$

gezeigt. Weiter gilt

$$\langle (aN)^\alpha\rangle = \langle aN\rangle^\varphi , \ \langle (bN)^\alpha\rangle = \langle bN\rangle^\varphi \ \text{und} \ (aNbN)^\alpha = (aN)^\alpha (bN)^\alpha .$$

Damit wird $\bar{\alpha}$ eine Baersche Abbildung von G/N zu $\bar{\varphi}$, $\bar{x}N$ und $\bar{y}N$.

Sei nun $|N| > p$, so sei $Z \leqq N$ eine zentrale Untergruppe der

Ordnung p. Sei $\bar{\bar{\varphi}}$ die von φ auf G/Z induzierte Projektivität und $\bar{\bar{\alpha}}$ die von α auf G/Z induzierte Baersche Abbildung zu $\bar{\bar{\varphi}}$. Gemäß Induktionsvoraussetzung induziert dann $\bar{\bar{\alpha}}$ eine Baersche Abbildung $\bar{\alpha}$ zu der von φ auf $(G/Z)/(N/Z)$ induzierten Projektivität. Diese stimmt aber mit der von φ auf G/N induzierten Projektivität überein, und $\bar{\alpha}$ definiert eine Baersche Abbildung von G/N zu dieser Projektivität. Da die Induktion von Abbildungen transitiv ist, induziert α diese Baersche Abbildung von G/N.

b.) Wir wählen beliebige $1 \neq \bar{x} \in U_1$ und $1 \neq \bar{y} \in U_2$. Nach 1.5 ist α dann auch Baersche Abbildung zu $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Daher gelten die definierenden Gleichungen mit $\bar{x}$ und $\bar{y}$ für alle $a \in X$ und $b \in Y$; insbesondere gelten sie für alle $a \in U_1$ und $b \in U_2$.

c.) Es ist $N^\alpha = N^\varphi = N^\beta$. Seien $g \in G \setminus N$ und i das nach 1.8.*b*) existierende Element von $GF(p)$ mit $\beta = \varrho_i \circ \alpha$. Ist $g^\alpha N^\alpha = g^\beta N^\beta$, so enthält $N^\beta = N^\alpha$ das Element $g^{-\alpha} g^\beta = (g^{-1})^\alpha (g^i)^\alpha = (g^{i-1})^\alpha$. Es folgt $g^{i-1} \in N$, also $i = 1$, das heißt $\alpha = \beta$. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung. Die Verschiedenheit der Einschränkungen auf U folgt sofort aus 1.8.*b*).

1.10 Lemma. Es gelte (GV). Seien $V < U \leqq G$ mit $V \trianglelefteq U$,

$$U = U_1 \times U_2, \quad U_1 = U \cap X, \quad U_2 = U \cap Y,$$

$$V = V_1 \times V_2, \quad V_1 = V \cap X, \quad V_2 = V \cap Y.$$

Sei $\bar{\varphi}$ die von φ auf U/V induzierte Projektivität.

a.) Ist $V_1 \neq U_1$, $V_2 \neq U_2$, $|U/V| \geqq p^3$ und $\bar{\beta}$ eine Baersche Abbildung von U/V zu $\bar{\varphi}$, so gibt es eine Baersche Abbildung β zu φ, die $\bar{\beta}$ induziert.

b.) Sind α und β Baersche Abbildungen zu φ, so daß die auf U/V induzierten Abbildungen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ übereinstimmen, so ist $\alpha = \beta$.

Beweis. *a.*) Wegen 1.3.*b*) ist $V^\varphi \trianglelefteq U^\varphi$. Dann gilt (GV) für U/V. Nach 1.9 induziert α eine Baersche Abbildung $\bar{\alpha}$ von U/V zu $\bar{\varphi}$. Nach 1.8 gibt es ein $i \in GF(p)$, so daß $\bar{\beta} = \varrho_i \circ \bar{\alpha}$ ist. Daher wird $\bar{\beta}$ von der Baerschen Abbildung $\varrho_i \circ \alpha$ von G induziert.

b.) In jedem Fall induzieren α und β Abbildungen auf U/V, wenn auch für $V_1 = U_1$ oder $V_2 = U_2$ keine Baerschen Abbildungen.

Sei $\beta = \varrho_i \circ \alpha$. Dann erschließen wir durch die Wahl eines $g \in U \setminus V$ wie im Beweis von 1.9.c), daß $i = 1$ gilt.

1.11 Lemma. Sei $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine Gruppe vom Exponenten p. Es seien $r \geqq 2$, alle $G_i \neq 1$, und mindestens eines der G_i sei nichtabelsch. Sei φ eine Projektivität von G. Dann hat G genau $p - 1$ Baersche Abbildungen zu φ.

Beweis. Wegen 1.3.a) ist φ indexerhaltend, und es gilt $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$. Seien

$$1 \neq y \in G_r =: Y \qquad \text{und} \qquad 1 \neq x \in X := G_1 \times \ldots \times G_{r-1}\,.$$

Sei $\bar{x} \in G^\varphi$ gewählt mit $\langle x \rangle^\varphi = \langle \bar{x} \rangle$. Wir definieren eine Abbildung α auf folgende Weise:
Für alle $a \in X$ und $b \in Y$ sei

$$b^\alpha := f(b;\, x, \bar{x})\,, \qquad a^\alpha := f(a;\, y, y^\alpha)\,, \qquad (ab)^\alpha := a^\alpha b^\alpha\,.$$

Dann ist $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle^\varphi = \langle x^\alpha \rangle$. Ferner ist

— $\langle \bar{x} y^\alpha \rangle = \langle xy \rangle^\varphi$ nach der Definition von $\alpha|_Y$ und

— $\langle x^\alpha y^\alpha \rangle = \langle xy \rangle^\varphi$ nach der Definition von $\alpha|_X$.

Nach 0.2 ist also $\bar{x} = x^\alpha$. Für alle $b \in Y$ ist daher $b^\alpha = f(b;\, x, x^\alpha)$. Damit ist α eine Baersche Abbildung zu φ, X, Y, x und y.

Es ist $|G| \geqq p^4$, da eines der G_i nichtabelsch ist. Dann gilt (GV), und nach 1.8 sind die $\varrho_i \circ \alpha$ für $i \in GF(p) \setminus \{0\}$ genau die Baerschen Abbildungen von G zu φ.

Als nächstes brauchen wir eine Beschreibung des Untergruppenverbandes eines direkten Produktes mit zwei Faktoren, die wohlbekannt und auch leicht nachzuweisen ist. Deshalb wird sie hier nicht bewiesen.

1.12 Lemma. a.) Seien $G \times H$ eine Gruppe,

$$N_1 \trianglelefteq U_1 \leqq G\,, \qquad N_2 \trianglelefteq U_2 \leqq H$$

und $\sigma\colon U_1/N_1 \to U_2/N_2$ ein Isomorphismus. Dann ist

$$U := \{uv\colon u \in U_1,\ v \in (uN_1)^\sigma\}$$

eine Untergruppe von $G \times H$.

b.) Ist umgekehrt U eine Untergruppe von $G \times H$, und sind $U_1 = UH \cap G$ und $U_2 = UG \cap H$ die Bilder der Projektionen von U in G und H, sowie N_1 und N_2 die Schnitte von U mit G nnd mit H, so gibt es einen Epimorphismus $\sigma\colon U_1 \to U_2/N_2$ mit $\operatorname{Ker}\sigma = N_1$, so daß

$$U = \{uv\colon u \in U_1,\ v \in u^\sigma\} \quad \text{ist}\,.$$

1.13 Lemma. Seien $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine Gruppe, φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$, $r \geqq 2$, $G_i \neq 1$ für alle i und $\lambda\colon G \to G^\varphi$ eine bijektive Abbildung, so daß gilt

1.) Die Projektivität φ wird von λ induziert.

2.) Für alle $g_1 \in G_1, \ldots, g_r \in G_r$ gilt

$$(g_1 \cdot \ldots \cdot g_r)^\lambda = g_1^\lambda \ldots g_r^\lambda\,.$$

Für alle i sei $\lambda_i := \lambda|_{G_i}$. Dann gilt

a.) Sei σ ein Homomorphismus von G_i in G_j mit $i \neq j$. Dann ist auch $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_j$ ein Homomorphismus. Ist σ ein Isomorphismus, so ist auch $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_j$ ein Isomorphismus.

b.) Sei σ ein Endomorphismus von G_i: Es gebe ein G_j mit $j \neq i$, so daß G_j zu G_i isomorph ist. Dann ist auch $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_i$ ein Endomorphismus. Ist σ ein Automorphismus, so ist auch $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_i$ ein Automorphismus.

Beweis. *a.*) Sei $U := \{uv\colon u \in G_i,\ v \in G_j,\ v = u^\sigma\}$. Dann sind U und somit auch

$$U^\varphi = U^\lambda = \{uv\colon u \in G_i,\ v = u^\sigma\}^\lambda = \{u^\lambda v^\lambda\colon u \in G_i,\ v = u^\sigma\} = \\ = \{u^\lambda v^\lambda\colon u^\lambda \in G_i^\lambda,\ v^\lambda = (u^\lambda)^{\lambda^{-1}\sigma\lambda}\}$$

Untergruppen.

Die Projektionen von U in G_i und G_j sind genau G_i und G_i^σ, also sind die Projektionen von U^λ in G_i^λ und G_j^λ genau G_i^λ und $G_i^{\sigma\lambda}$. Es sind $U \cap G_j = 1$ und $U \cap G_i = \operatorname{Ker} \sigma$, also $U^\varphi \cap G_j^\varphi = 1$ und $U^\varphi \cap \cap G_i^\varphi = (\operatorname{Ker} \sigma)^\varphi$. Nach 1.12 gibt es nun einen Homomorphismus $\tau\colon G_i^\lambda \to G_i^{\sigma\lambda}$ mit $\operatorname{Ker} \tau = (\operatorname{Ker} \sigma)^\varphi = (\operatorname{Ker} \sigma)^\lambda$, so daß gilt

$$U^\lambda = \{u^\lambda v^\lambda\colon u^\lambda \in G_i^\lambda,\, v^\lambda = u^{\lambda\tau}\}\,.$$

Andererseits ist nach bereits Bewiesenem $v^\lambda = (u^\lambda)^{\lambda^{-1}\sigma\lambda}$. Das heißt: Für alle $h \in G_i^\lambda$ ist $h^{\lambda^{-1}\sigma\lambda} = h^\tau$. Also ist $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_j = \tau$ ein Homomorphismus. Ist σ sogar ein Isomorphismus, so ist $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_j$ als Hintereinanderausführung bijektiver Abbildungen bijektiv, also ebenfalls ein Isomorphismus.

b.) Sei G_i isomorph zu G_j vermöge $\eta\colon G_i \to G_j$. Dann ist $\sigma\eta$ ein Homomorphismus von G_i in G_j. Nach Teil *a.*) ist dann auch $\lambda_i^{-1}\sigma\eta\lambda_j = \lambda_i^{-1}\sigma\lambda_i\lambda_i^{-1}\eta\lambda_j$ ein Homomorphismus. Da $\lambda_i^{-1}\eta\lambda_j$ nach Teil *a.*) ein Isomorphismus ist, ist auch $\lambda_i^{-1}\sigma\lambda_i$ ein Homomorphismus, also ein Endomorphismus. Der zweite Teil der Aussage von *b.*) folgt wieder daraus, daß die Hintereinanderausführung bijektiver Abbildungen bijektiv ist.

1.2. *Fastisomorphismen.*

In diesem sehr technischen Kapitel werden einige Schlußweisen gesammelt werden, die wir in verschiedenen minimalen Gegenbeispielen benötigen werden.

1.14 Definition. Sind G eine beliebige Gruppe und α eine Bijektion von G auf eine Gruppe H, so sei a die Abbildung von $G \times G$ in G mit

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha a(x, y)^\alpha$$

für alle $x, y \in G$. Die Abbildung a heiße Amorphie von α.

1.15 Definition. Die bijektive Abbildung α der Gruppe G auf die Gruppe H heiße Fastisomorphismus, genau dann wenn die Eigenschaften i.)-iii.) gelten:

i.) Die Einschränkung von α auf jede maximale Untergruppe von G ist ein Isomorphismus.

ii.) Für jeden minimalen Normalteiler N von G ist N^α ein Normalteiler von H, und für alle $x, y \in G$ gilt

$$x^\alpha N^\alpha = (xN)^\alpha \quad \text{und} \quad (xN)^\alpha (yN)^\alpha = (xyN)^\alpha .$$

Das heißt: Auf jeder Faktorgruppe nach einem minimalen Normalteiler von G induziert α einen Isomorphismus.

iii.) Für alle $\tau \in \operatorname{Aut} G$ ist $\alpha^{-1}\tau\alpha \in \operatorname{Aut} H$.

1.16 Lemma. Sei α eine bijektive Abbildung der endlichen, nicht zyklischen p-Gruppe G auf die Gruppe H. Dann gilt:

a.) Die Bedingung i.) in 1.15 ist äquivalent zu
i$'$.) Für alle $x, y \in G$ mit $\langle x, y\rangle < G$ ist $a(x, y) = 1$.

b.) Unter der Voraussetzing i.) ist Bedingung ii.) in 1.15 äquivalent zu

ii$'$.) Für alle $x, y \in G$, $1 \neq N \trianglelefteq G$ ist $a(x, y) \in N$.

Beweis. *a.*) Es gelte i.). Seien $x, y \in G$ mit $\langle x, y\rangle < G$ gegeben. Dann ist $\alpha|_{\langle x,y\rangle}$ ein Isomorphismus, insbesondere ist $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, also $a(x, y) = 1$.

Es gelte i$'$.). Seien M eine maximale Untergruppe von G und $x, y \in M$. Dann ist $\langle x, y\rangle < G$, also $a(x, y) = 1$ und daher $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

b.) Es gelte ii.). Für alle $x, y \in G$, $1 \neq N \trianglelefteq G$ heißt das: Es gilt $x^\alpha N^\alpha = (xN)^\alpha$ und $(xN)^\alpha (yN)^\alpha = (xyN)^\alpha$, da jeder Normalteiler $N \neq 1$ einen minimalen Normalteiler enthält, also ist $x^\alpha y^\alpha N^\alpha = x^\alpha N^\alpha y^\alpha N^\alpha = (xy)^\alpha N^\alpha$ und somit $a(x, y)^\alpha = y^{-\alpha} x^{-\alpha} (xy)^\alpha \in N^\alpha$.

Es gelte ii$'$.). Sei N ein minimaler Normalteiler von G. Falls es noch einen weiteren minimalen Normalteiler von G gibt, so ist α wegen ii$'$.) ein Isomorphismus, und ii.) gilt. Ist nun N der einzige minimale Normalteiler, so ist für alle $x \in G$ die Gruppe $\langle N, x\rangle$ echt in G enthalten, da sonst $G = N\langle x\rangle$ zyklisch wäre. Wegen i.) ist dann $x^\alpha \in N_H(N^\alpha)$ und daher $N^\alpha \trianglelefteq H$. Sei nun weiter $n \in N$. Dann ist $(xn)^\alpha = x^\alpha n^\alpha a(x, n)^\alpha$, was, da $N^\alpha \leqq H$ ist, in $x^\alpha N^\alpha$ liegt. Daher ist $(xN)^\alpha = x^\alpha N^\alpha$. Für alle $x, y \in G$ ist entsprechend

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha a(x, y)^\alpha \in x^\alpha y^\alpha N^\alpha ,$$

also

$$(xyN)^\alpha = (xy)^\alpha N^\alpha = x^\alpha y^\alpha N^\alpha = x^\alpha N^\alpha y^\alpha N^\alpha = (xN)^\alpha (yN)^\alpha .$$

1.17 Definition. Sei λ eine bijektive Abbildung der Gruppe G auf die Gruppe H. Dann seien

$$\operatorname{Reg}(\lambda) := \{x \in G\colon \text{Für alle } y \in G \text{ ist } (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda \text{ und } (yx)^\lambda = y^\lambda x^\lambda\}$$

und

$$A(\lambda) := \langle a(x, y)\colon\ x, y \in G\rangle\ ,$$

wobei a die Amorphie von λ sei.

1.18 Lemma. Sei λ eine Bijektion der Gruppe G auf die Gruppe H mit $A(\lambda) \leqq \operatorname{Reg}(\lambda)$. Für alle $g \in G$ sei $(g^\lambda)^{-1} = (g^{-1})^\lambda$. Dann sind äquivalent

i.) Für alle $U \leqq G$ ist $U^\lambda \leqq G^\lambda$.

ii.) Für alle $x, y \in G$ ist $a(x, y) \in \langle x, y\rangle$.

Beweis. Es gelte i.). Seien $x, y \in G$. Dann sind in $U^\lambda := \langle x, y\rangle^\lambda$ die Elemente x^λ, y^λ, $(xy)^\lambda$, also auch $a(x, y)^\lambda = (y^\lambda)^{-1}(x^\lambda)^{-1}(xy)^\lambda$ enthalten.

Es gelte ii.). Seien $U \leqq G$ und $x, y \in U$, wegen ii.) also dann $a(x, y) \in U$. Daher ist

$$x^\lambda y^\lambda = (xy)^\lambda\big(a(x, y)^\lambda\big)^{-1} = (xy)^\lambda\big(a(x, y)^{-1}\big)^\lambda = \big(xya(x, y)^{-1}\big)^\lambda \in U^\lambda\ .$$

Mit y^λ ist auch $(y^\lambda)^{-1} = (y^{-1})^\lambda \in U^\lambda$, insgesamt ist daher $U^\lambda \leqq G^\lambda$.

1.19 Lemma. Seien λ eine Bijektion der Gruppe G auf die Gruppe H und τ ein Endomorphismus von G.

a.) Ist $\lambda^{-1}\tau\lambda$ ein Endomorphismus von H, so ist $a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau)$ für alle $x, y \in G$.

b.) Ist zusätzlich $A(\lambda)^\lambda \subseteq \operatorname{Reg}(\lambda^{-1})$ und $A(\lambda)^\tau \subseteq \operatorname{Reg}(\lambda)$, so gilt die Umkehrung von *a.*).

c.) Seien λ, φ und G wie in 1.13, ferner τ ein Isomorphismus zwischen den Untergruppen G_i und G_j mit $i \neq j$. Für alle $x, y \in G_i$ ist dann $a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau)$.

Beweis. Nach 1.13 ist im Falle $c.$) dann $\lambda_i^{-1}\tau\lambda_j$ ein Isomorphismus. In jedem Falle gilt:

$$(*)\qquad \big(x^\lambda y^\lambda a(x,y)^\lambda\big)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} = \big((xy)^\lambda\big)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} = (xy)^{\tau\lambda} = \\ = (x^\tau y^\tau)^\lambda = x^{\tau\lambda} y^{\tau\lambda} a(x^\tau, y^\tau)^\lambda .$$

Unter den Voraussetzungen von $a.$) und $c.$) gilt weiter

$$\big(x^\lambda y^\lambda a(x,y)^\lambda\big)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} = x^{\tau\lambda} y^{\tau\lambda} a(x,y)^{\tau\lambda} ,$$

also wegen (*) die Behauptung.

Seien nun $A(\lambda)^\lambda \subseteq \mathrm{Reg}\,(\lambda^{-1})$, $A(\lambda)^\tau \subseteq \mathrm{Reg}\,(\lambda)$ und $a(x,y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau)$. Dann ist

$$(x^\lambda y^\lambda)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} a(x,y)^{\tau\lambda} = \big((x^\lambda y^\lambda)^{\lambda^{-1}} a(x,y)\big)^{\tau\lambda} = \big(x^\lambda y^\lambda a(x,y)^\lambda\big)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} = \\ = x^{\tau\lambda} y^{\tau\lambda} a(x^\tau, y^\tau)^\lambda = (x^\lambda)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} (y^\lambda)^{\lambda^{-1}\tau\lambda} a(x,y)^{\tau\lambda} .$$

Die vorletzte Gleichheit ist (*). Wir kürzen von rechts mit $a(x,y)^{\tau\lambda}$, und die Behauptung folgt, da λ surjektiv ist.

1.20 Lemma. Sei λ eine Bijektion der Gruppe G auf die Gruppe H mit $A(\lambda)^\lambda \subseteq Z(H)$. Aus $[x,y]=1$ folge $(xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda$.

a.) Für alle $x, y, z \in G$ ist $a(x, yz)a(y,z) = a(xy, z)a(x,y)$.

b.) Für alle $x, y \in G$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a(x^{m+n}, y) = a(x^m, x^n y) a(x^n, y) .$$

Beweis. $a.$) Folgt aus dem Assoziativgesetz:

$$(xyz)^\lambda = (xy)^\lambda z^\lambda a(xy,z)^\lambda = x^\lambda y^\lambda a(x,y)^\lambda z^\lambda a(xy,z)^\lambda = \\ = x^\lambda y^\lambda z^\lambda \big(a(xy,z)a(x,y)\big)^\lambda \cdot$$

Andererseits gilt:

$$(xyz)^\lambda = x^\lambda (yz)^\lambda a(x,yz)^\lambda = x^\lambda y^\lambda z^\lambda a(y,z)^\lambda a(x,yz)^\lambda = \\ = x^\lambda y^\lambda z^\lambda \big(a(x,yz)a(y,z)\big)^\lambda .$$

Da λ bijektiv ist, folgt die Behauptung von $a.$).

b.) Folgt aus *a.*) mit x^m, x^n, y anstelle von x, y, z und der Tatsache, daß $a(x^m, x^n) = 1$ ist.

1.21 Lemma. Sind λ wie in 1.20 und N ein in $\operatorname{Reg}(\lambda)$ enthaltener Normalteiler von G, so ist die Amorphie bezüglich λ konstant auf Restklassen nach N, genauer: Für alle $h \in N$, $x, y \in G$ ist

$$a(hx, y) = a(x, y) = a(xh, y) \qquad \text{und} \qquad a(x, yh) = a(x, y) = a(x, hy)\,.$$

Beweis. Dies ist eine Folgerung von 1.20.*a*): Setzt man dort h für z ein, erhält man die erste Gleichheit der zweiten Gleichungskette. Die zweite folgt aus der Tatsache, daß $N \trianglelefteq G$ ist: $a(x, hy) = a(x, yh^y) = a(x, y)$. Für den Beweis der ersten Gleichungskette setze man in 1.20.*a*) nun h, x, y statt x, y, z und verfahre entsprechend.

Für den Rest dieses Teilabschnittes sei G eine endliche, nicht zyklische p-Gruppe mit $p \neq 2$ und α ein Fastisomorphismus der Gruppe G auf die Gruppe H, der kein Isomorphismus ist. Wir sammeln einige einfache Bemerkungen als

1.22 Lemma.

a.) Sei $Z := \Omega(Z(G))$. Dann ist $|Z| = p$.

b.) Es ist $|G/\Phi(G)| = p^2$.

c.) G ist nichtabelsch.

d.) Es ist $A(\alpha) \leqq Z \leqq \Phi(G) \leqq \operatorname{Reg}(\alpha)$.

e.) Es ist $Z^\alpha \subseteq Z(H)$.

f.) Für alle $x, y \in G$ mit $[x, y] = 1$ ist $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

g.) Für alle $i \in \mathbb{Z}$, $x \in G$ ist $(x^\alpha)^i = (x^i)^\alpha$.

h.) Es ist $A(\alpha)^\alpha \subseteq \operatorname{Reg}(\alpha^{-1})$.

i.) Für alle $\tau \in \operatorname{Aut} G$, $x, y \in G$ ist $a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau)$.

j.) Es ist $A(\alpha)^\alpha \subseteq Z(H)$, also werden die Voraussetzungen von 1.20 für α erfüllt.

k.) Die Amorphie ist konstant auf Restklassen nach $\Phi(G)$, insbesondere gilt:

l.) Für alle $x, y, z \in G$ ist $a(xy, z) = a(yx, z)$ und $a(x, yz) = a(x, zy)$.

Beweis. *a.*) Falls $|Z| > p$ ist, seien Z_1 und Z_2 Untergruppen der Ordnung p von Z mit $Z_1 \cap Z_2 = 1$. Nach 1.16.*b*) ist dann $a(x, y) \in \in Z_1 \cap Z_2 = 1$ für alle $x, y \in G$, also α ein Isomorphismus.

b.) Sei $|G/\Phi(G)| > p^2$. Für alle $x, y \in G$ ist dann $\langle x, y \rangle < G$, also $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

c.) Wäre G abelsch, so wäre nach *a.*) dann $|\Omega(G)| = |Z| = p$, also G zyklisch im Widersprunch zur Voraussetzung.

d.) Nach Teil *a.*) ist Z der einzige minimale Normalteiler von G und daher in $\Phi(G)$ enthalten. Nach 1.16.*b*) enthält Z andererseits $A(\alpha)$. Seien $g \in \Phi(G)$, $h \in G$. Dann ist $\langle g, h \rangle < G$, also $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha$ und $(hg)^\alpha = h^\alpha g^\alpha$, und daher ist $\Phi(G) \leqq \mathrm{Reg}\,(\alpha)$.

e.) Seien $z \in Z$ und $g \in G$. Dann ist $\langle z, g \rangle$ abelsch, also echt in G enthalten. Dann ist $z^\alpha g^\alpha = (zg)^\alpha = (gz)^\alpha = g^\alpha z^\alpha$. Somit ist $z^\alpha \in Z(H)$.

f.) folgt aus 1.15.i) und Teil *c.*).

g.) folgt durch Induktion aus *f.*).

h.) Seien $z \in Z$ und $g \in G$. Nach *f.*) ist $(gz)^\alpha = g^\alpha z^\alpha$ und $(zg)^\alpha = = z^\alpha g^\alpha$, also $(g^\alpha z^\alpha)^{\alpha^{-1}} = gz = (g^\alpha)^{\alpha^{-1}}(z^\alpha)^{\alpha^{-1}}$ und genauso $(z^\alpha g^\alpha)^{\alpha^{-1}} = = (z^\alpha)^{\alpha^{-1}}(g^\alpha)^{\alpha^{-1}}$. Daher ist $A(\alpha)^\alpha \subseteq Z^\alpha \subseteq \mathrm{Reg}\,(\alpha^{-1})$.

i.) Folgt aus 1.15.iii) und 1.19.*a*).

j.) Wegen *d.*) und *e.*) ist $A(\alpha)^\alpha \subseteq Z(H)$. Zusammen mit *f.*) heißt dies, daß die Voraussetzungen von 1.20 erfüllt sind.

k.) Wir setzen in 1.21 nun $N := \Phi(G)$, was wegen *d.*) möglich ist.

l.) Ist wegen $G' \leqq \Phi(G)$ ein Korollar von *k.*).

Sei nun σ_x der von x auf G induzierte innere Automorphismus, entsprechend für $\sigma_{(x^\alpha)}$. Dann ordnen wir jedem $x \in G$ einen Automorphismus η_x von H zu und definieren eine weitere zweistellige Funktion c auf G.

1.23 Lemma. *a.*) Sei $\eta_x := \alpha^{-1} \circ (\sigma_x) \circ \alpha \circ (\sigma_{(x^\alpha)})^{-1}$. Dann ist $\eta_x \in \mathrm{Aut}\, H$.

b.) Sei $(y^\alpha)^{\eta_x} =: y^\alpha c(x, y)^\alpha$. Dann ist $c(x, y) \in Z$.

c.) Es ist $\eta_x|_{Z^\alpha} = id_{Z^\alpha}$.

Beweis. *a.*) Folgt aus 1.15.iii.).

b.) Folgt aus 1.15.ii.), angewandt auf Z.

c.) Sei $z^\alpha \in Z^\alpha$. Dann ist $\langle z, x\rangle < G$, also

$$z^{\alpha\eta_x} = z^{(\sigma_x)\circ\alpha\circ(\sigma_{(x\alpha)})^{-1}} = (x^{-\alpha} z^\alpha x^\alpha)^{(\sigma_{(x\alpha)})^{-1}} = z^\alpha .$$

Die Abbildung c läßt sich noch auf zwei weitere Arten berechnen:

1.24 Lemma. Für alle $x, y \in G$ ist

a.) $(y^x)^\alpha = (y^\alpha)^{x^\alpha} c(x, y)^\alpha$ und

b.) $c(x, y)^\alpha = [y^\alpha, x^\alpha]^{-1}[y, x]^\alpha$.

Beweis. *a.*) $(y^\alpha)^{\eta_x} = (x^{-1}yx)^{\alpha\circ(\sigma_{(x^\alpha)})^{-1}}$ impliziert $\big(y^\alpha c(x, y)^\alpha\big)^{(\sigma_{(x^\alpha)})} = (y^x)^\alpha$. Wegen 1.23.*b*) und 1.22.*e*) folgt daraus die Behauptung *a.*).

b.) Es gilt

$$[y^\alpha, x^\alpha]^{-1}[y, x]^\alpha = \big(y^{-\alpha}(y^\alpha)^{x^\alpha}\big)^{-1} y^{-\alpha}(y^x)^\alpha = \big((y^\alpha)^{x^\alpha}\big)^{-1}(y^x)^\alpha = c(x, y)^\alpha .$$

Die erste Gleichheit folgt daraus, daß $\langle y^{-1}, y^x\rangle < G$, dort also α ein Isomorphismus ist, die letzte ist eine Anwendung von Teil *a.*).

1.25 Lemma. Für alle $x \in G$ ist $c(x, \cdot)$ ein Homomorphismus.

Beweis. Seien $g, h, x \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned}(gh)^\alpha c(x, gh)^\alpha &= (gh)^{\alpha\eta_x} = \big(g^\alpha h^\alpha a(g, h)^\alpha\big)^{\eta_x} = \\ &= g^{\alpha\eta_x} h^{\alpha\eta_x} a(g, h)^\alpha = g^\alpha c(x, g)^\alpha h^\alpha c(x, h)^\alpha a(g, h)^\alpha = \\ &= g^\alpha h^\alpha a(g, h)^\alpha c(x, g)^\alpha c(x, h)^\alpha = (gh)^\alpha\big(c(x, g)\, c(x, h)\big)^\alpha ,\end{aligned}$$

woraus 1.25 folgt. Dabei folgt die dritte Gleichheit aus 1.23.*a*) und 1.23.*c*).

1.26 Lemma.

a.) Für alle $x, y \in G$ ist $c(x, y) = a(y, x)\,a(x, y)^{-1}$.

b.) Für alle $x, y \in G$ ist $c(x, y) = c(y, x)^{-1}$.

c.) Für alle $y \in G$ ist $c(\cdot, y)$ ein Homomorphismus.

BEWEIS. *a.*) Seien $x, y \in G$. Dann ist

$$(y^\alpha)^{\eta_x} = \left((x^{-1}yx)^\alpha\right)^{(x^\alpha)^{-1}} = x^\alpha(x^{-1}yx)^\alpha(x^\alpha)^{-1} =$$

$$= x^\alpha x^{-\alpha}(yx)^\alpha a(x^{-1}, yx)^\alpha x^{-\alpha} = y^\alpha x^\alpha a(y, x)^\alpha a(x^{-1}, yx)^\alpha x^{-\alpha} ,$$

also ist $c(x, y) = a(y, x)a(x^{-1}, yx)$.

Mit 1.22.*j*) folgt nach 1.20.*b*) für $m = -1$ und $n = 1$ nun

$$1 = a(1, y) = a(x^{-1}, xy)\, a(x, y) ,$$

mit 1.20.*l*) also $a(x^{-1}, yx) = a(x, y)^{-1}$, und die Behauptung folgt daraus.

b.) Für alle $x, y \in G$ ist

$$c(x, y) = a(y, x)a(x, y)^{-1} = \left(a(x, y)a(y, x)^{-1}\right)^{-1} = c(y, x)^{-1} .$$

c.) Für alle $g, h, y \in G$ ist folglich

$$c(gh, y) = c(y, gh)^{-1} = \left(c(y, g)\, c(y, h)\right)^{-1} =$$

$$= c(y, g)^{-1}c(y, h)^{-1} = c(g, y)\, c(h, y) .$$

1.27 BEMERKUNG. Da a konstant auf Restklassen nach $\Phi(G)$ ist, gilt dies nach 1.26.*a*) auch für die Abbildung c. Diese induziert eine symplektische Form auf dem Vektorraum $G/\Phi(G)$. Ist insbesondere $c(x, y) = 1$ für irgendwelche Elemente $x, y \in G$ mit $G = \langle x, y\rangle$, so ist $c = 1$, das heißt $c(g, h) = 1$ für alle $g, h \in G$.

Das nächste Lemma gilt in beliebigen Gruppen:

1.28 LEMMA. Sei G eine beliebige Gruppe, und seien $x, y \in G$ und $m \in \mathbf{N}$ mit $m \geqq 2$. Dann gilt

$$(xy)^m = x^m y^m \cdot \prod_{j=m-1}^{1} [y, x^j]^{y^j} .$$

BEWEIS. Wir machen Induktion über m. Für $m = 2$ gilt

$$x^2 y^2 [y, x]^y = x^2 y^2 y^{-1} y^{-1} x^{-1} yxy = (xy)^2 .$$

Sei nun $m \geqq 2$ und die Aussage für m richtig. Dann gilt

$$(xy)^{m+1} = xyx^m y^m \cdot \prod_{j=m-1}^{1} [y, x^j]^{v^j} =$$

$$= x^{m+1} y[y, x^m] y^m \cdot \prod_{j=m-1}^{1} [y, x^j]^{v^j} = x^{m+1} y^{m+1} \cdot \prod_{j=m}^{1} [y, x^j]^{v^j} .$$

Das war zu zeigen.

1.29 LEMMA. Für alle $x, y \in G$, $m \in \mathbf{Z}$ ist

$$a(x, y)^m = a(x^m, y^m)\, c(x, y)^{\binom{m}{2}} .$$

BEWEIS. Sei zunächst $m \geqq 2$. Dann ist

$$(x^\alpha)^m (y^\alpha)^m \cdot \prod_{j=m-1}^{1} [y^\alpha, (x^\alpha)^j]^{(y^\alpha)^j} \cdot \big(a(x, y)^\alpha\big)^m = (x^\alpha y^\alpha)^m \big(a(x, y)^\alpha\big)^m =$$

$$= \big(x^\alpha y^\alpha a(x, y)^\alpha\big)^m = \big((xy)^\alpha\big)^m = \big((xy)^m\big)^\alpha = \Big(x^m y^m \cdot \prod_{j=m-1}^{1} [y, x^j]^{y^j}\Big)^\alpha =$$

$$= (x^m y^m)^\alpha \Big(\prod_{j=m-1}^{1} [y, x^j]^{y^j}\Big)^\alpha = (x^m)^\alpha (y^m)^\alpha a(x^m, y^m)^\alpha \cdot \prod_{j=m-1}^{1} \big([y, x^j]^\alpha\big)^{(y^\alpha)^j} .$$

Die vorletzte Gleichheit beruht darauf, daß das rechte Produkt in $G' \leqq \Phi(G)$ liegt, die letzte darauf, daß die Homomorphieeigenschaft von α in der Einschränkung auf die echte Untergruppe $G' \cup \langle y \rangle$ angewandt wird. So folgt nun:

$$\big(a(x, y)^m\big)^\alpha = \Big(\prod_{j=m-1}^{1} [y^\alpha, (x^\alpha)^j]^{(y^\alpha)^j}\Big)^{-1} \cdot \prod_{j=m-1}^{1} \big([y, x^j]^\alpha\big)^{(y^\alpha)^j} \cdot a(x^m, y^m)^\alpha =$$

$$= \prod_{j=1}^{m-1} \big([y^\alpha, (x^j)^\alpha]^{-1}\big)^{(y^\alpha)^j} \cdot \prod_{j=m-1}^{1} \big([y, x^j]^\alpha\big)^{(y^\alpha)^j} \cdot a(x^m, y^m)^\alpha =$$

$$= \prod_{j=1}^{m-1} c(x^j, y)^\alpha a(x^m, y^m)^\alpha = \Big(c(x, y)^{\binom{m}{2}} a(x^m, y^m)\Big)^\alpha .$$

Für die vorletzte Gleichheit wird dabei sukzessive von innen nach außen gerechnet, 1.24.*b*) benutzt, sowie die Tatsache, daß c ins Zentrum abbildet. Die letzte Gleichheit folgt aus 1.26.*c*).

Ist $m < 2$, so folgt die Behauptung daraus, daß wir in einer Gruppe von endlichem Exponenten rechnen.

Die letzte Formel dieses Teilabschnittes ist

1.30 LEMMA. Für alle $x, y \in G$, $i, j, k, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a(x^i y^j, x^k y^m) = a(x^{i+k}, y^{j+m})\, a(x^i, y^j)^{-1} a(x^k, y^m)^{-1} c(x, y)^{jk}\,.$$

BEWEIS. Es ist

$$(x^i y^j x^k y^m)^\alpha = (x^i y^j)^\alpha (x^k y^m)^\alpha a(x^i y^j, x^k y^m)^\alpha =$$

$$= x^{i\alpha} y^{j\alpha} x^{k\alpha} y^{m\alpha} a(x^i y^j, x^k y^m)^\alpha a(x^i, y^j)^\alpha a(x^k, y^m)^\alpha\,.$$

Andererseits gilt

$$(x^i y^j x^k y^m)^\alpha = \big(x^{i+k} y^j [y^j, x^k] y^m\big)^\alpha = \big(x^{i+k} y^{j+m} [y^j, x^k]^{y^m}\big)^\alpha =$$

$$= (x^{i+k} y^{j+m})^\alpha \big([y^j, x^k]^{y^m}\big)^\alpha = (x^{i+k})^\alpha (y^{j+m})^\alpha a(x^{i+k}, y^{j+m})^\alpha [y^j, x^k]^{\alpha(y^{m\alpha})} =$$

$$= x^{i\alpha} y^{j\alpha} x^{k\alpha} y^{m\alpha} [x^{k\alpha}, y^{j\alpha}]^{(y^{m\alpha})} [y^j, x^k]^{\alpha(y^{m\alpha})} a(x^{i+k}, y^{j+m})^\alpha =$$

$$= x^{i\alpha} y^{j\alpha} x^{k\alpha} y^{m\alpha} a(x^{i+k}, y^{j+m})^\alpha \big([y^{j\alpha}, x^{k\alpha}]^{-1} [y^j, x^k]^\alpha\big)^{(y^{m\alpha})} =$$

$$= x^{i\alpha} y^{j\alpha} x^{k\alpha} y^{m\alpha} a(x^{i+k}, y^{j+m})^\alpha c(x^k, y^j)^\alpha\,.$$

Die dritte Gleichheit folgt daraus, daß $[y^j, x^k]^{y^m} \in \Phi(G)$ ist, die letzte aus 1.24.b). Mit 1.25 und 1.26.c) folgt die Behauptung.

Die Bedeutung des letzten Hilfssatzes liegt darin, daß er erlaubt, einzusehen, welche Werte die Amorphie festlegen. Er wird häufig in der folgenden Form zitiert werden:

1.31 BEMERKUNG. Sei G eine endliche, nicht zyklische p-Gruppe, α ein Fastisomorphismus, der kein Isomorphismus ist und $g, h \in G$ mit $\langle g, h\rangle = G$. Dann gibt es $x \in \langle g\rangle$, $y \in \langle h\rangle$ mit $G = \langle x, y\rangle$, so daß $a(x, y) \neq 1$ oder $c(x, y) \neq 1$ ist.

BEWEIS. Seien für alle $x \in \langle g\rangle$, $y \in \langle h\rangle$ die Werte $a(x, y) = 1 = c(x, y)$. Dann sind wegen 1.30 alle Ausdrücke der Form $a(g^i h^j, g^k h^m)$ gleich eins, wegen 1.22.k) ist die Amorphie trivial, also α im Widerspruch zur Annahme ein Isomorphismus.

1.3. *Der nichtisomorphe Fall.*

Das Ziel dieses Teilabschnittes ist der Beweis von Satz 1 und und Satz 2. Wir werden ferner die in der Einleitung angekündigten Beispiele vorführen, die zeigen, daß sich diese beiden Sätze nicht weiter verbessern lassen.

Es wird im weiteren Verlaufe der Arbeit verschiedentlich nützlich sein, in konkreten Gruppen Automorphismen zu konstruieren. Hilfreich ist dabei

1.32 Lemma. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, die durch Relationen definiert ist, also

$$G = \langle x_1, \ldots, x_n \colon r_i(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, m \rangle .$$

Dabei seien $m, n \in \mathbb{N}$. Seien weiter $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n \in G$, so daß $r_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) = 1$ für alle i gilt. Dann gibt es einen Endomorphismus τ von G mit $x_i^\tau = \hat{x}_i$ für alle i.

Dieses Lemma ist wohlbekannt und wird hier nicht bewiesen.

1.33 Bezeichnung. Die nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3 vom Exponenten p werde künftig mit $G(p)$ abgekürzt.

Wichtig für unsere weiteren Betrachtungen, ja letztlich sogar entscheidend dafür, daß wir uns weitgehend auf Gruppen vom Exponenten p beschränken, ist der folgende wohlbekannte Hilfssatz:

1.34 Lemma. *a.*) Sei G nichtabelsch vom Exponenten p. Dann gibt es $U \leqq G$ mit $U \simeq G(p)$.

b.) Sei G eine nichtabelsche Gruppe vom Exponenten p, deren sämtliche maximalen Untergruppen abelsch sind. Dann ist $G \simeq G(p)$.

c.) Sei $G = X \times Y$ eine p-Gruppe mit $\exp X = \exp Y$. Dann ist jeder Potenzautomorphismus von G universell.

d.) Sei $G = X \times Y$ nichtabelsch vom Exponenten p. Dann ist die Identität der einzige Potenzautomorphismus von G.

Aus Lesbarkeitsgründen werden wir künftig unsere Sätze oft lediglich für Gruppen mit minimaler Anzahl von direkten Faktoren formulieren und beweisen. Die Verallgemeinerung auf Gruppen mit mehr Faktoren kann durch eine leichte Induktion bewerkstelligt werden:

1.35 LEMMA. Seien G eine Gruppe vom Exponenten p und $m, r \in \mathrm{N}$ mit $2 \leqq r \leqq m$. Es sei jede Projektivität des r-fachen direkten Produktes von G durch einen Isomorphismus induziert. Dann gilt dies auch für jede Projektivität des m-fachen Produktes.

BEWEIS. Der Beweis wird durch Induktion geführt. Sei die Behauptung schon für m richtig. Sei φ eine Projektivität von $G_1 \times \ldots \times G_{m+1}$, wobei alle G_i zu G isomorph sind. Auf $G_1 \times \ldots \times G_m$ sei φ durch σ induziert. Dann ist σ gemäß 1.2.*c*) eine Baersche Abbildung zu der von φ dort induzierten Projektivität. Sei α eine Baersche Abbildung von $G_1 \times \ldots \times G_{m+1}$, die σ gemäß 1.10.*a*) fortsetzt. Wegen 1.13 und 1.19.*c*) ist α ein Isomorphismus, der φ wegen 1.6 induziert.

1.36 LEMMA. Sei $G = G_1 \times G_2$ mit $G_1 \simeq G_2 \simeq G(p)$ für ein p. Dann ist jede Projektivität von G durch genau einen Isomorphismus induziert.

BEWEIS. Sei φ eine Projektivität von G. Nach 1.3.*a*) ist $G^\varphi = G_1^\varphi \times G_2^\varphi$. Nach 1.11 hat G genau $p-1$ Baersche Abbildungen zu φ. Wir behaupten, daß genau eine von diesen ein Isomorphismus ist. Die Eindeutigkeit eines φ induzierenden Isomorphismus folgt dabei aus 1.34.*d*). Sei $G_1 = \langle x, y \rangle$, und sei α eine beliebige Baersche Abbildung zu φ. Dann ist $\alpha|_{G_1}$ ein Fastisomorphismus, denn alle maximalen Untergruppen von G_1 sind abelsch, und aus 1.4 folgt die Voraussetzung 1.15.i). Ebenso sind alle echten Faktorgruppen von G_1 abelsch. Auf $G/Z(G)$ induziert α aber wegen 1.9.*a*) eine Baersche Abbildung, und wieder wegen 1.4 ist diese ein Isomorphismus, was 1.15.ii) beweist. Aus 1.13.*b*) folgt die Forderung 1.15.iii).

Seien $i, j, k, m \in GF(p)$ beliebig vorgegeben. Wegen 1.32 gibt es für den Fall, daß $im - jk \neq 0$ ist, einen Automorphismus τ mit $x^\tau = x^i y^j$ und $y^\tau = x^k y^m$. Sei $z := [x, y]$. Dann ist

$$z^\tau = [x^\tau, y^\tau] = [x^i y^j, x^k y^m] = z^{im-jk} .$$

Wegen 1.16.*b*) ist $a(x, y) \in \langle z \rangle$, also folgt mit 1.19.*a*):

$$a(x^i y^j, x^k y^m) = a(x^\tau, y^\tau) = a(x, y)^\tau = a(x, y)^{im-jk} .$$

Ist $im - jk = 0$, so ist $\langle x^i y^j, x^k y^m \rangle$ abelsch, nach 1.4 also ebenfalls $a(x^i y^j, x^k y^m) = 1 = a(x, y)^{im-jk}$. Da nach 1.22.*k*) die Amorphie zu $\alpha|_{G_1}$ konstant auf Resklassen nach $\Phi(G_1) = \langle z \rangle$ ist, induziert sie eine symplektische Form auf $G_1/\Phi(G_1)$.

Der Raum der symplektischen Formen auf einem zweidimensionalen Vektorraum ist eindimensional. In unserem Falle wird er also von der Kommutatorfunktion erzeugt. Das heißt, es gibt ein $s \in GF(p)$ mit

$$a(\cdot, \cdot\cdot) = [\cdot, \cdot\cdot]^s .$$

Wir behaupten, daß $s \neq 1/2$ ist. Sonst wäre nämlich

$$x^{-\alpha}y^{-\alpha}x^{\alpha}y^{\alpha} = (x^{-1}y^{-1})^{\alpha}(xy)^{\alpha}a(x^{-1}, y^{-1})^{-\alpha}a(x, y)^{-\alpha} =$$
$$= (x^{-1}y^{-1})^{\alpha}(xy)^{\alpha}[x^{-1}, y^{-1}]^{-s\alpha}[x, y]^{-s\alpha} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{\alpha}[x, y]^{-2s\alpha} ,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\langle x^{-1}y^{-1}, xy\rangle$ in der echten Untergruppe $\Phi(G_1)\langle xy\rangle$ von G_1 enthalten ist. Damit gilt

$$[x^{\alpha}, y^{\alpha}] = [x, y]^{(1-2s)\alpha} ,$$

und für den Fall $s = 1/2$ wäre G_1^{φ} abelsch, aber nach 1.3.a) und 1.3.b) sind φ und φ^{-1} zentralisatorerhaltend.

Sei nun $u := 1/(1-2s)$, also $2su - u + 1 = 0$, und daher

$$su^2 - \binom{u}{2} = su^2 - \frac{1}{2}u(u-1) = 0 .$$

Sei $\beta := \varrho_u \circ \alpha$. Für alle $g, h \in G_1$ gilt dann

$$(gh)^{\beta} = (gh)^{u\alpha} = \left(g^u h^u [h, g]^{\binom{u}{2}}\right)^{\alpha} = g^{u\alpha}h^{u\alpha}a(g^u, h^u)^{\alpha}[h, g]^{\binom{u}{2}\alpha} =$$
$$= g^{u\alpha}h^{u\alpha}\left([g, h]^{su^2-\binom{u}{2}}\right)^{\alpha} = g^{u\alpha}h^{u\alpha} = g^{\beta}h^{\beta} .$$

Dabei folgt die zweite Gleichheit aus [5], Hifssatz 1.3.b), S.253. Damit ist $\beta|_{G_1}$ ein Isomorphismus. Sei nun η ein Isomorphismus von G_1 auf G_2. Dann sind die Voraussetzungen von 1.19.c) erfüllt, daher auch $\beta|_{G_2}$ und wegen 1.1.b) damit β ein Isomorphismus.

Wir kommen nun zu unserem ersten wichtigen Ergebnis:

Satz 1. *Sei $G = G_1 \times G_2$ eine endliche Gruppe vom Exponenten p mit $\mathrm{cl}\, G_1 = \mathrm{cl}\, G_2 = 2$. Dann ist jede Projektivität von G durch genau einen Isomorphismus induziert.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über $|G|$. Der Induktionsanfang wird durch 1.36 gelegt. Seien also G wie oben gegeben und φ eine Projektivität von G. Nach 1.3.a) ist $G^\varphi = G_1^\varphi \times G_2^\varphi$, und nach 1.11 hat G genau $p-1$ Baersche Abbildungen zu φ. Wir haupten, daß genau eine von diesen ein φ induzierender Isomorphismus ist. Die Eindeutigkeit eines solchen Isomorphismus folgt dabei aus 1.34.d).

Fall 1. Beide G_i sind extraspeziell.

Nach [5], Satz 13.7, S.353 ist dann $G_1 = K_1 \cdot \ldots \cdot K_m$ und $G_2 = L_1 \cdot \ldots \cdot L_n$ mit $m, n \in \mathrm{N}$, $[K_i, K_j] = 1$, $K_i \cap K_j = Z(G_1)$ für alle $i \neq j$ und $K_i \simeq G(p)$ für alle i. Entsprechendes gilt für die L_i. Nach 1.36 gibt es für alle $i \leqq n$ Isomorphismen $\bar{\alpha}_i$, die φ auf $K_1 \times L_i$ induzieren, nach 1.2 sind dieses Baersche Abbildungen von $K_1 \times L_i$, und nach 1.10.a) gibt es Baersche Abbildungen α_i von G, die $\bar{\alpha}_i$ induzieren. Auf K_1 induzieren die α_i dieselbe Projektivität. Wegen 1.34 stimmen also alle α_i auf K_1 überein, wegen 1.10.b) daher auch auf ganz G. Sei diese Baersche Abbildung mit α bezeichnet. Entsprechend gibt es eine Baersche Abbildung β, deren Einschränkung auf alle Untergruppen der Form $K_j \times L_1$ ein Isomorphismus ist. Durch Betrachtung von $K_1 \times L_1$ sieht man mit 1.34 und 1.10.b), daß $\alpha = \beta$ ist. Mit 1.4.a) folgt nun, daß α ein Isomorphismus ist.

Fall 2. Eines der G_i ist nicht extraspeziell.

Sei o.B.d.A. G_1 nicht extraspeziell. Dann ist $|Z(G_1)| \geqq p^2$. Sei also Z eine Untergruppe der Ordnung p^2 von $Z(G_1)$. Enthielte Z zwei Untergruppen X_1 und X_2 der Ordnung p mit abelscher Faktorgruppe G_1/X_1 und G_1/X_2, so wäre G_1 abelsch, aber es ist $\mathrm{cl}\, G_1 = 2$. Seien also $Z_1, \ldots, Z_p$ paarweise verschiedene Untergruppen der Ordnung p von Z mit nichtabelscher Faktorgruppe G_1/Z_i. Wir können daher die Induktionsvorassetzung auf G/Z_i anwenden und erhalten Isomorphismen $\bar{\alpha}_i$, die φ auf G/Z_i induzieren. Nach 1.2.c) sind dieses wieder Baersche Abbildungen, die nach 1.10.a) von Baerschen Abbildungen von ganz G induziert werden. Da G nur genau $p-1$ Baersche Abbildungen zu φ besitzt, wir hier aber p Untergruppen betrachten, gibt es eine Baersche Abbildung α und $i \neq j$, so daß α auf G/Z_i und G/Z_j einen Isomorphismus induziert. Wegen $Z_i \cap Z_j = 1$ ist dann α ein Isomorphismus, der φ wegen 1.6 induziert, und Satz 1 ist bewiesen.

Wir werden nun durch zwei Beispiele belegen, daß auf die Voraussetzung $\operatorname{cl} G_i = 2$ in Satz 1 nicht verzichtet werden kann. Sie läßt sich weder ersetzen durch $\operatorname{cl} G_1 = 2$ und $\operatorname{cl} G_2 = 1$ noch durch $\operatorname{cl} G_1 = 2$ und $\operatorname{cl} G_2 = 3$.

Der Konstruktion liegt ein allgemeiner Hilfssatz zugrunde:

1.37 Lemma. *a.*) Seien G_1 eine endliche p-Gruppe mit $d(G_1) = 2$ und genau einem minimalen Normalteiler sowie G_2 eine endliche Gruppe. Für alle $M \lessdot G_1$ sei $\lambda_M \colon M \to \Omega(Z(G_1))$ ein Homomorphismus mit $\Phi(G_1) \leqq \operatorname{Ker} \lambda_M$. Es gebe keinen Monomorphismus von G_1 in G_2. Dann induziert die Abbildung λ mit

$$(g_1 g_2)^\lambda := g_1 g_1^{\lambda_M} g_2$$

eine Autoprojektivität φ von $G := G_1 \times G_2$. Dabei seien g_1 ein Element der maximalen Untergruppe M von G_1 und $g_2 \in G_2$.

b.) Ist $\exp G = p$, $G/Z(G_1)$ nichtabelsch und gibt es genau eine maximale Untergruppe M, so daß die Abbildung λ_M nicht die Nullabbildung ist, das heißt, es gibt $x \in M$ mit $x^{\lambda_M} \neq 1$, so ist φ von keinem Automorphismus induziert.

Beweis. *a.*) Für jede maximale Untergruppe M von G_1 ist $\Phi(G_1) \leqq \leqq \operatorname{Ker} \lambda_M$. Ist nun g_1 in zwei verschiedenen maximalen Untergruppen M und N von G_1 enthalten, so ist $g_1 \in \Phi(G_1)$, also $g_1^{\lambda_M} = 1 = g_1^{\lambda_N}$. Daher ist λ wohldefiniert. Es ist $A(\lambda) \leqq \Omega(Z(G_1))$ und $\Phi(G_1) \times G_2 \leqq \leqq \operatorname{Reg}(\lambda)$. (Für die Definitionen vgl. 1.17.) Mithin ist $A(\lambda) \leqq \operatorname{Reg}(\lambda)$. Da ferner für alle $g \in G$ gilt $(g^{-1})^\lambda = (g^\lambda)^{-1}$, sind die Voraussetzungen von 1.18 erfüllt.

Seien $x, y \in G$, $U := \langle x, y \rangle$. Ist $\pi_1(U) \neq G_1$, so gibt es ein $M \lessdot G_1$, so daß $U \leqq M \times G_2$ gilt. Auf $M \times G_2$ ist λ ein Isomorphismus, also $1 = a(x, y) \in U$. Sei nun $\pi_1(U) = G_1$. Nach 1.12 gibt es dann einen Epimorphismus σ mit $\sigma \colon G_1 \to \pi_2(U) \leqq G_2$, so daß $\operatorname{Ker} \sigma \leqq U$ ist. Nach Voraussetzung ist σ kein Monomorphismus. Da $\operatorname{Ker} \sigma \trianglelefteq G_1$ ist, enthält es den minimalen Normalteiler von G_1. Daher gilt:

$$a(x, y) \in A(\lambda) \leqq \Omega(Z(G_1)) \leqq \operatorname{Ker} \sigma \leqq U .$$

Nach 1.18 werden also durch λ Untergruppen auf Untergruppen abgebildet. Da deren Anordnung erhalten bleibt und λ eine bijektive Abbildung von G nach G ist, induziert λ eine Autoprojektivität.

b.) Sei $G_1 = \langle g, h\rangle$ mit $g \in M_1$, $h \in M_2$, so daß λ_{M_1} und λ_{M_2} Nullabbildungen sind. Sei τ ein φ induzierender Isomorphismus. Dann gibt es $m, n \in GF(p)$ mit $g^\tau = g^m$ und $h^\tau = h^n$. Da die von τ auf $G/Z(G_1)$ induzierte Projektivität trivial ist, ist der von τ dort induzierte Isomorphismus nach 1.34 die Identität, also sind $g^\tau \in gZ(G_1)$ und $h^\tau \in hZ(G_1)$ und deshalb $m = n = 1$. Da $G_1 = \langle g, h\rangle$ ist, ist $\tau|_{G_1}$ die Identität. Da jedoch eine der Abbildungen λ_M nichttrivial ist, ist φ auf G_1 nicht die identische Projektivität, was Teil *b*.) beweist.

Unser erstes Beispiel zeigt, daß wir bei Satz 1 nicht voraussetzen können, daß eines der G_i abelsch ist.

1.38 Beispiel. Sei $G = G_1 \times G_2$ mit elementarabelschem G_2 und mit $G_1 \simeq G(p)$. Sei $G_1 = \langle x, y\rangle$. Wir definieren die Abbildungen λ_M folgendermaßen: Ist $M = \langle xy^{-1}, z\rangle$, so sei $(xy^{-1})^{\lambda_M} := z$. Dabei sei $z := [x, y]$. Auf allen anderen maximalen Untergruppen M sei λ_M die triviale Abbildung. Sei die von λ induzierte Projektivität mit φ bezeichnet. Wir behaupten, daß φ durch keinen Isomorphismus induziert wird.

Sei τ ein φ induzierender Isomorphismus. Dann gibt es $k, m, n \in$ $\in GF(p)$, so daß $x^\tau = x^k$, $y^\tau = y^m$, $(xy)^\tau = (xy)^n$ gilt. Es folgt

$$(xy)^n = (xy)^\tau = x^\tau y^\tau = x^k y^m .$$

Aus der Betrachtung der Faktorgruppe nach $\langle z\rangle$ folgt $k = m = n$, und es gilt

$$x^k y^k = (xy)^k = x^k y^k [y, x]^{\binom{k}{2}} ,$$

und daher $0 = \binom{k}{2} = \frac{1}{2} k(k-1)$, also $k = 1$, und $\tau|_{G_1}$ ist die Identität, aber wegen $(xy^{-1})^\lambda = xy^{-1}z \notin \langle xy^{-1}\rangle$ ist φ dort nicht die identische Projektivität.

Das nächste Beispiel zeigt, daß sich die Aussage von Satz 1 nicht auf höhere Klassen erweitern läßt.

1.39 Beispiel. Sei $G = G_1 \times G_2$ mit $G_2 \simeq G(p)$ und $p \geqq 5$. G_1 habe die Relationen

$$G_1 = \langle x, a_1, a_2, a_3 \colon x^p = a_i^p = [a_i, a_j] = [a_1, x] = 1,$$
$$[a_2, x] = a_1, [a_3, x] = a_2\rangle .$$

Wir definieren die Abbildungen λ_M:

$$\text{Ist } M = \langle a_3 \rangle \Phi(G_1)\,, \text{ so sei } \lambda_M \text{ festgelegt durch } a_3^{\lambda_M} := a_1\,.$$

Auf allen übrigen maximalen Untergruppen sei λ_M die triviale Abbildung.

Nach 1.37.*b*) ist die gemäß 1.37.*a*) existierende Autoprojektivität nicht durch einen Automorphismus induziert.

Bei 1.39 wurde $p \geqq 5$ vorausgesetzt. In der Tat läßt sich Satz 1 für $p = 3$ verbessern:

Satz 2. Sei $G = G_1 \times G_2$. G_1 und G_2 seien nichtabelsche Gruppen vom Exponenten 3. Dann ist jede Projektivität von G durch genau einen Isomorphismus induziert.

Beweis. Wir machen Induktion nach $|G|$. Der Induktionsanfang wird durch 1.36 gelegt.

Sei U eine maximale Untergruppe von G_i. Ist U nichtabelsch, so gibt es vermöge der Induktionsvoraussetzung und 1.10.*a*) genau eine Baersche Abbildung α von G, die auf $U \times G_2$ ein Isomorphismus ist. Besitzt auch G_2 eine maximale Untergruppe V, die nichtabelsch ist, so wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $G_1 \times V$ an und erhalten eine Baersche Abbildung β von G, die auf $G_1 \times V$ ein Isomorphismus ist. Durch Betrachtung von $U \times V$ erkennt man mit 1.10.*b*), daß $\alpha = \beta$ und dieses daher auf ganz G ein Isomorphismus ist. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß in G_2 alle maximalen Untergruppen abelsch sind. Nach 1.34.*b*) ist daher $G_2 \simeq G(3)$. Ist auch $G_1 \simeq G(3)$, so folgt die Behauptung aus 1.36. Sei $G_1 \not\simeq G(3)$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe M von G_1, die nichtabelsch ist. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung und 1.10.*a*) gibt es eine Baersche Abbildung α von G, deren Einschränkung auf $M \times G_2$ ein Isomorphismus ist. Sei N eine beliebige weitere maximale Untergruppe von G_1. Ist N abelsch, so ist $\alpha|_N$ nach 1.3.*a*) ein Isomorphismus. Ist N nichtabelsch, so gibt es eine Baersche Abbildung β von G, die auf $N \times G_2$ ein Isomorphismus ist, und durch Betrachtung von G_2 erkennt man mit Hilfe von 1.10.*b*), daß $\alpha = \beta$ gilt. Also ist α auf allen maximalen Untergruppen von G_1 ein Isomorphismus. Wäre α kein Isomorphismus von G, so müßte G_1 von zwei Elementen erzeugt werden. Nach [5], Satz 6.6.*b*), S.290 wäre die Ordnung von G_1 dann ein Teiler von 27, also doch $G_1 \simeq G(3)$, ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Mit den Sätzen 1 und 2 und den Beispielen ist der Fall, daß wir

Produkte nichtisomorpher Gruppen vor uns haben, geklärt, und wir können für den Rest der Arbeit davon ausgehen, daß alle direkten Faktoren isomorph sind.

1.4. *Gruppen höherer Klasse.*

In diesem Teilabschnitt werden wir zunächst sehen, daß in minimalen Gegenbeispielen Fastisomorphismen auftreten. Das Ziel ist dann der Beweis von Satz 3.

1.40 HAUPTLEMMA. Seien $r \in \mathrm{N}$, $r \geqq 2$ und X eine minimale Gruppe vom Exponenten p mit der Eigenschaft, daß es $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ mit $G_i \simeq X$ für alle i, $|G| \geqq p^3$ und eine Projektivität φ von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$ gibt, die nicht durch einen Isomorphismus induziert ist. Dann gibt es eine Baersche Abbildung α von G zu φ, so daß $\alpha|_{G_i}$ für alle i ein Fastisomorphismus ist.

BEWEIS. Wäre X abelsch, so wäre nach 1.3.*b*) auch G abelsch und wegen $|G| \geqq p^3$ nach 0.1 dann φ durch einen Isomorphismus induziert. im Widerspruch zur Wahl von φ.

Seien η_i: $X \to G_i$ Isomorphismen. Seien $1 \neq Z \leq Z(X)$ und

$$\bar{Z} := Z^{\eta_1} \times \ldots \times Z^{\eta_r}.$$

Dann ist $|G/\bar{Z}| \geqq p^3$. Wegen 1.3.*b*) ist $\bar{Z}^\varphi$ zentral in G^φ, und wir wenden die Voraussetzung der Minimalität von X auf $G/\bar{Z}$ und die von φ dort induzierte Projektivität $\bar{\varphi}$ an. Wir erhalten dann einen $\bar{\varphi}$ induzierenden Isomorphismus $\bar{\alpha}$. Nach 1.2.*c*) ist $\bar{\alpha}$ eine Baersche Abbildung von $G/\bar{Z}$ zu $\bar{\varphi}$, und mit 1.10.*a*) haben wir bewiesen:

(∗) Seien $1 \neq Z \leqq Z(X)$ und $\bar{Z} := Z^{\eta_1} \times \ldots \times Z^{\eta_r}$. Dann gibt eine Baersche Abbildung von G, die auf $G/\bar{Z}$ einen Isomorphismus induziert.

Wäre nun $Z(X)$ nicht zyklisch, so seien $Z_1, \ldots, Z_p$. Untergruppen von $Z(X)$ mit $|Z_i| = p$ sowie $Z_i \cap Z_j = 1$ für alle $i \neq j$. Da X nichtabelsch ist, ist für alle i dann $|G/Z_i^{\eta_1} \times \ldots \times Z_i^{\eta_r}| \geqq p^3$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ die nach (∗) vorhandenen Baerschen Abbildungen von G, so daß α_i auf $G/Z_i^{\eta_1} \times \ldots \times Z_i^{\eta_r}$ einen Isomorphismus induziert. Da G nach 1.11 genau $p - 1$ Baersche Abbildungen zu φ besitzt, gibt es $i \neq j$, so daß $\alpha_i = \alpha_j$ ist. Diese Abbildung ist wegen $Z_i \cap Z_j = 1$ ein Isomorphismus, der φ wegen 1.6 induziert, im Widerspruch zur Wahl von φ.

Also ist $Z(X)$ zyklisch. Wäre $X/Z(X)$ abelsch, so wäre $\operatorname{cl} X = 2$, also nach Satz 1 jede Projektivität von G durch einen Isomorphismus induziert. Daher ist $X/Z(X)$ nichtabelsch und somit $|G/Z(G)| \geqq p^3$. Nach (*) gibt es eine Baersche Abbildung α von G, die auf $G/Z(G)$ einen Isomorphismus induziert. Da $X/Z(X)$ nichtabelsch ist, ist α nach 1.34.*d*) und 1.10.*b*) die einzige Baersche Abbildung von G, die dies tut. Wir behaupten, daß $\alpha|_{G_i}$ für alle i ein Fastisomorphismus ist.

Seien $M < X$ und $\bar{M} := M^{\eta_1} \times \ldots \times M^{\eta_r}$ Ist M abelsch, so auch $\bar{M}$, und nach 1.4.*a*) ist $\alpha|_{\bar{M}}$ ein Isomorphismus. Sei M nichtabelsch. Dann ist $|\bar{M}| \geqq p^3$, und wegen der Minimalität von X gibt es einen Isomorphismus $\bar{\beta}$, der φ auf $\bar{M}$ induziert. Nach 1.2.*c*) ist $\bar{\beta}$ eine Baersche Abbildung von $\bar{M}$ zu der von φ auf $\bar{M}$ induzierten Projektivität $\bar{\varphi}$. Nach 1.10.*a*) gibt es eine Baersche Abbildung β von G zu φ mit $\beta|_{\bar{M}} = \bar{\beta}$. Wir haben $\alpha = \beta$ zu zeigen. Dann sind wir fertig, denn dann erfüllt $\alpha|_{G_i}$ die Bedingungen 1.15.i) und 1.15.ii). Wegen 1.13.*b*) erfüllt jede Einschränkung einer Baerschen Abbildung auf die direkten Faktoren G_i die Bedingung 1.15.iii), falls ein direktes Produkt isomorpher Gruppen vorliegt.

Nach 1.34.*a*) gibt es $U \leqq M$ und V mit $Z(X) \leqq V \leqq X$ und $U \simeq G(p) \simeq V/Z(X)$. Sei $\bar{U} := V^{\eta_1} \times U^{\eta_2} \times \ldots \times U^{\eta_r}$. Wegen 1.3.*b*) ist $\bar{U}^{\varphi} \leqq G^{\varphi}$, ebenso ist $(Z(X)^{\eta_1})^{\varphi} \trianglelefteq \bar{U}$. Nach 1.36 gibt es einen Isomorphismus $\bar{\gamma}$, der φ auf $\bar{U}/Z(X)^{\eta_1}$ induziert. Nach 1.10.*a*) gibt es eine Baersche Abbildung γ von G, die $\bar{\gamma}$ induziert. Auf $V^{\eta_1}/Z(X)^{\eta_1}$ induzieren α und γ Isomorphismen, die ihrerseits dieselbe Projektivität induzieren, nach 1.34.*d*) dort also übereinstimmen. Nach 1.10.*b*) ist dann $\alpha = \gamma$.

Für $U^{\eta_2} \times \ldots \times U^{\eta_r}$ schließen wir ganz entsprechend und erhalten $\beta = \gamma$, was 1.40 beweist.

1.41 Definition. Eine Gruppe G heiße *MA*-Gruppe, genau dann wenn sie eine maximale Untergruppe besitzt, die abelsch ist.

1.42 Lemma. Sei $G = G_1 \times G_2$. $G_1 \simeq G_2$ seien nichtabelsche *MA*-Gruppen vom Exponenten p. Dann ist jede Projektivität von G durch genau einen Isomorphismus induziert.

Beweis. Nach 1.3.*a*) gilt für jede Projektivität φ einer solchen Gruppe $G^{\varphi} = G_1^{\varphi} \times G_2^{\varphi}$. Sei nun G ein minimales Gegenbeispiel und sei φ eine Projektivität von G, die durch keinen Isomorphismus induziert ist. Sei α die nach 1.40 existierende Baersche Abbildung zu φ, so daß $\alpha|_{G_i}$ für alle i ein Fastisomorphismus ist.

Sei $G_1 = \langle x, y \rangle$, so daß $\langle x \rangle \Phi(G_1)$ abelsch ist. Wegen 1.31 können wir annehmen, daß $a(x, y) \neq 1$ oder $c(x, y) \neq 1$ ist, in den Bezeichnungen des Teilabschnittes 1.2. Sei $a_1 := x$ und $a_{i+1} := [a_i, y]$. Sei $A := \langle a_i : i \in \mathrm{N} \rangle$. Dann ist $A \leqq \langle x \rangle \Phi(G_1)$ und $A \trianglelefteq G_1$. Wegen $A\langle y \rangle = G_1$ ist daher $A = \langle x \rangle \Phi(G_1)$. Wegen [5], Hilfssatz 1.11.b), S. 258 ist $K_i(G_1) = \langle a_i \rangle K_{i+1}(G_1)$ für alle $i \geqq 2$. Daher bilden die a_i mit $a_i \neq 1$ eine Basis von A, und G_1 ist von maximaler Klasse. Sei $\mathrm{cl}\, G_1 = n$. Nach [7] ist dann $n \leqq p-1$, da G_1 metabelsch und von zwei Elementen erzeugt ist. G_1 hat also die Form

$$G_1 = \langle y, a_1, \ldots, a_n : y^p = a_i^p = [a_i, a_j] = [a_n, y] = 1, [a_i, y] = a_{i+1} \rangle .$$

Sei nun $k \in GF(p) \setminus \{0\}$. Es seien $y^\tau := y^k$, $a_1^\tau := a_1^k$, $a_{i+1}^\tau := [a_i^\tau, y^k]$. Nach 1.32 läßt sich τ zu einem Automorphismus von G_1 hochheben. Es ist $Z(G_1) = \langle a_n \rangle = \langle [x, (n-1)y] \rangle$. Nach [5], Hilfssatz 6.8, S. 292, gilt daher $a_n^\tau = [x^k, (n-1)y^k] = a_n^{k^n}$, also

$$c(x, y)^{k^2} = c(x^k, y^k) = c(x^\tau, y^\tau) = c(x, y)^\tau = c(x, y)^{k^n} .$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Bilinearität der Abbildung c, die dritte aus 1.19 und 1.26.a) und die letzte daraus, daß c in $Z(G_1) = \langle a_n \rangle$ abbildet.

Da G ein Gegenbeispiel ist, ist wegen Satz 1 nun $n \geqq 3$. Da andererseits $n \leqq p-1$ ist, gibtes ein $k \in GF(p)$, das nicht Nullstelle des Polynoms $t^n - t^2$ ist. Daher ist $c(x, y) = 1$. Nach 1.27 ist somit $c = 1$. Mit 1.29 gilt nun

$$a(x, y)^k = a(x^k, y^k) = a(x^\tau, y^\tau) = a(x, y)^\tau = a(x, y)^{k^n} .$$

Da es ein $k \in GF(p)$ gibt, das nicht Nullstelle des Polynoms $t^n - t$ ist, folgt $a(x, y) = 1$ im Widerspruch zur Wahl von x und y, was den Hilfssatz beweist.

1.43 Lemma. Sei G eine metabelsche Gruppe. Für alle $i \in \mathrm{N}$, $g, h, k \in G$ und $v, w \in G'$ gilt dann

$a.$) $[gh, k] = [g, k][h, k][g, k, h]$.

$b.$) $[g, hk] = [g, h][g, k][g, h, k]$.

$c.$) $[vw, g] = [v, g][w, g]$.

$d.$) $[w, g, h] = [w, h, g]$.

$e.)\ [g, h^i] \quad = [g, h]^{\binom{i}{1}} [g, 2h]^{\binom{i}{2}} \cdot \ldots \cdot [g, ih]^{\binom{i}{i}}$.

$f.)\ [g^i, h] \quad = [g, h]^{\binom{i}{1}} [g, h, g]^{\binom{i}{2}} \cdot \ldots \cdot [g, h, (i-1)g]^{\binom{i}{i}}$.

Beweis. *a.*) und *b.*) sind die Formeln von [5], Hilfssatz 1.2.*b*) und 1.2.*c*), S.253, für den Fall, daß die Kommutatorgruppe abelsch ist, *c.*) folgt sofort aus *a.*).

d.) Es ist $[gv, w] = [g, w][v, w][g, w, v] = [g, w]$ für alle $g \in G$, $v, w \in G'$, insbesondere ist $[gh, w] = [hg, w]$. Wegen

$$[gh, w] = [g, w][h, w][g, w, h] \qquad \text{und} \qquad [hg, w] = [h, w][g, w][h, w, g]$$

folgt daraus $[g, w, h] = [h, w, g]$, also

$$[w, g, h] = \big[[g, w]^{-1}, h\big] = [g, w, h]^{-1} = [h, w, g]^{-1} = [w, h, g]\,.$$

Die Beweise von *e.*) und *f.*) erfolgen durch Induktion über i.

Satz 3. Sei $G = G_1 \times G_2$ eine endliche Gruppe vom Exponenten p mit $|G| \geqq p^3$, $\mathrm{cl}\, G \leqq 4$, $G_1 \simeq G_2$ und φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times G_2^\varphi$. Dann ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

Beweis. Sei $G = G_1 \times G_2$ ein minimales Gegenbeispiel. Sei φ eine nicht durch einen Isomorphismus induzierte Projektivität, und sei α die nach 1.40 existierende Baersche Abbildung, deren Einschränkung auf G_1 und auf G_2 ein Fastisomorphismus ist. Da G_i Fastisomorphismen besitzen, die keine Isomorphismen sind, ist $|G_1\colon \Phi(G_1)| = p^2$ und $|Z(G_1)| = p$.

Wegen 0.1 ist G_1 nichtabelsch, wegen Satz 1 ist $\mathrm{cl}\, G_1 \geqq 3$. Wäre $\mathrm{cl}\, G_1 = 3$, so wäre $1 \neq K_3(G_1) \leqq Z(G_1)$, also $|K_3(G_1)| = p$. Ferner wäre $\Phi(G_1) = K_2(G_1)$, also $|G_1/K_2(G_1)| = p^2$. Da G_1 von zwei Elementen erzeugt ist, ist wegen [5], Hilfssatz 1.11.*c*), S.258 die Gruppe $K_2(G_1)/$ $/K_3(G_1)$ zyklisch, also von der Ordnung p. Insgesamt hat G_1 also die Ordnung p^4. Wegen Satz 2 ist $p \geqq 5$. Aus der Liste der Gruppen der Ordnung p^4 mit $p \geqq 5$ in [5], Satz 12.6, S.346, ist zu entnehmen, daß nur eine von diesen die Klasse 3 und Exponenten p hat, nämlich die als Nummer 12 aufgelistete. Diese ist aber eine *MA*-Gruppe und nach 1.42 wäre φ doch durch einen Isomorphismus induziert.

Sei also $\mathrm{cl}\, G_1 = 4$. Da G_1 von zwei Elementen erzeugt wird, ist es nach [5], Satz 2.12.*b*), S. 265, metabelsch. Sei zunächst G_1 von maximaler Klasses, der Ordnung p^5 also. Nach [5], Satz 14.11, S.365, ist G_1 keine Ausnahmegruppe (im Sinne der Definition 14.5, S.362). Setzen wir also $L_i(G_1) := K_i(G_1)$ für $i \geqq 2$ und $L_1(G_1) := C_{G_1}(G_1'/L_4(G_1))$ und dann $L_1(G_1) = \langle x \rangle G_1'$ und $G_1 = \langle y \rangle L_1(G_1)$, so bilden wegen [5], Hilfssatz 14.8, S.363, die Elemente $[x, y]$, $[x, 2y]$, $[x, 3y]$ eine Basis von G_1'. Wegen $x \in L_1(G_1)$ ist $[x, y, x] \in K_4(G_1) = Z(G_1)$. Das heißt, es gibt ein c aus $GF(p)$ mit $[x, y, x] = [x, 3y]^c$. Wegen $1 = [x, y, x, y] = [x, 2y, x]$ zentralisiert x die Basiselemente $[x, 2y]$ und $[x, 3y]$.

Wegen 1.31 können wir annehmen, daß, wieder in den Bezeichnungen des Teilabschnittes 1.2, $a(x, y) \neq 1$ oder $c(x, y) \neq 1$ ist.

Seien $x_1 := x$ und $x_{i+1} := [x_i, y]$. Dann ist G_1 bestimmt durch die Relationen $[x_i, x_j] = 1$ für alle $i, j \geqq 2$, $y^p = y_i^p = 1$ für alle i, $[x_i, x_1] = 1$ für $i = 3, 4$ und $[x_2, x_1] = x_4^c$.

Seien nun $m, n \in GF(p)$, $m \neq 0$, $\bar{y} := x^n y^m$, $\bar{x}_1 := x^{m^2}$ und $\bar{x}_{i+1} := [\bar{x}_i, \bar{y}]$. Dann gilt auch $[\bar{x}_i, \bar{x}_j] = 1$ für alle $i, j \geqq 2$, $\bar{y}^p = \bar{x}_i^p = 1$ für alle i, $[\bar{x}_i, \bar{x}_1] = 1$ für $i = 3, 4$ und

$$[\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}] = [x^{m^2}, x^n y^m, x^{m^2}] = [x^{m^2}, y^m, x^{m^2}] = [x, y, x]^{m^5} = $$
$$= [x, 3y]^{cm^5} = [x^{m^2}, 3y^m]^c = [x^{m^2}, 3x^n y^m]^c = [\bar{x}, 3\bar{y}]^c .$$

Also erfüllen $\bar{x}_1$ und $\bar{y}$ dieselben Relationen wie x_1 und y. Nach 1.32 gibt es also Automorphismen $\tau_{m,n} =: \tau$ mit $x^\tau = x^{m^2}$ und $y^\tau = x^n y^m$. Dann ist

$$x_4^\tau = [x, 3y]^\tau = [x^{m^2}, 3x^n y^m] = [x^{m^2}, 3y^m] = [x, 3y]^{m^5} = x_4^{m^5} .$$

Wählt man nun $n = 0$ und m so, daβ es nicht Nullstelle des Polynoms $t^5 - t^3$ ist, was möglich ist, da $p \geqq 5$ und 0 eine dreifache Nullstelle ist, so gilt

$$c(x, y)^{m^5} = c(x, y)^\tau = c(x^\tau, y^\tau) = c(x^{m^2}, y^m) = c(x, y)^{m^3} .$$

Daher ist $c(x, y) = 1$ und wegen 1.27 dann $c = 1$.

Für $\tau = \tau_{1,n}$ und mit 1.20.b) folgt

$$a(x, y) = a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau) = a(x, x^n y) = a(x^{n+1}, y)\, a(x^n, y)^{-1} ,$$

also $a(x^{n+1}, y) = a(x^n, y)\, a(x, y)$. Mit vollständiger Induktion folgt $a(x^n, y) = a(x, y)^n$. Zusammen mit 1.29 folgt hieraus, falls wieder

$\tau = \tau_{m,0}$ gewählt wird, wobei diesmal m keine Nullstelle des Polynoms $t^5 - t^2$ ist,

$$a(x, y)^{m^5} = a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau) = a(x^{m^2}, y^m) = a(x^m, y)^m = a(x, y)^{m^2}.$$

Daher ist $a(x, y) = 1$, im Widerspruch zu unserer Wahl der Elemente x und y.

Also ist G_1 nicht von maximaler Klasse. Wegen $d(G_1) = 2$ ist nach [5], Hilfssatz 1.11.*c*), S.258, wieder $K_2(G_1)/K_3(G_1)$ zyklisch und nach Teil *b*.) desselben Satzes aus [5] sind für beliebige Erzeugende x und y von G_1 die Elemente $[x, y, x]$ und $[x, y, y]$ ein Erzeugendensystem von $K_3(G_1)$ modulo $K_4(G_1)$. Da ferner $K_4(G_1) \leqq Z(G_1)$, der Ordnung p also, ist, ist $|K_3(G_1)/K_4(G_1)| = p^2$. Sonst wäre G_1 von maximaler Klasse. Mithin gilt

(i) Es ist $|G_1| = p^6$, und für beliebige Erzeugende x, y von G_1 sind die Elemente $[x, y, x]$ und $[x, y, y]$ eine Basis von $K_3(G_1)$ modulo $K_4(G_1)$.

Seien $g, h, a, b \in G_1$ und $i, j, k, m \in GF(p)$. Dann gilt

(ii) $[h^i g^j, h^k g^m, a, b] = [h, g, a, b]^{im-jk}$,

(iii) $[h, g, h^i g^j, h^k g^m] = [h, g, h, h]^{ik}[h, g, h, g]^{im+jk}[h, g, g, g]^{jm}$.

Es gibt nämlich ein $w \in K_3(G_1)$, so daß gilt

$$[h^i g^j, h^k g^m, a, b] = [[h, g]^{im-jk} w, a, b] =$$
$$= [[h, g]^{im-jk}, a, b][w, a, b] = [h, g, a, b]^{im \cdot jk}.$$

Das beweist (ii). Nach 1.43.*b*) gibt es $u \in K_4(G_1)$, nach 1.43.*e*) gibt es $v, w \in K_4(G_1)$ mit

$$[h, g, h^i g^j, h^k g^m] = [[h, g, h^i][h, g, g^j]u, h^r g^m] =$$
$$[[h, g, h]^i v[h. g, g]^j w, h^k g^m] = [[h, g, h]^i, h^k g^m][[h, g, g]^j, h^k g^m] =$$
$$= [h, g, h, h]^{ik}[h, g, h, g]^{im}[h, g, g, h]^{jk}[h, g, g, g]^{jm},$$

was (iii) beweist, wobei, wie auch im Beweis von (ii), alle Gleichheiten aus Teilpunkten von 1.43 folgen.

Sei nun $x \in G_1 \setminus K_2(G_1)$. Dann gibt es ein a aus $K_2(G_1) \setminus K_4(G_1)$, das x zentralisiert. Sonst wäre $C_{G_1}(x) = \langle x \rangle Z(G_1)$, also $|\{x^g \colon g \in G_1\}| = p^4$ und daher nach [5], Satz 14.23, S.375, dann G_1 doch von maximaler Klasse. Wäre $a \in K_2(G_1) \setminus K_3(G_1)$, dann gäbe es $g \in G_1$, $b \in K_3(G_1)$, so daß $G_1 = \langle x, g \rangle$ und $a = [x, g]b$ gölten, Dann wäre

$$1 = [[x, g]b, x] = [x, g, x][b, x][x, g, x, b] .$$

Da $b \in K_3(G_1)$ ist, ist in dem rechten Produkt der letzte Faktor gleich 1 und der vorletzte in $K_4(G_1)$ enthalten, damit dann auch $[x, g, x]$, im Widerspruch zu (i). Also ist $a \in (K_3(G_1) \cap C_{G_1}(x)) \setminus K_4(G_1)$.

Angenommen, ganz $K_3(G_1)$ zentralisierte x, dann wäre für beliebiges y mit $G_1 = \langle x, y \rangle$ nun

$$[x, y, x, x] = 1 = [x, y, y, x] = [x, y, x, y] .$$

Die letzte Gleichheit folgt wieder aus 1.43.d). Insgesamt ist dann $[x, y, x] \in Z(G_1)$, im Widerspruch zu (i). Folglich gilt:

(iv) Für jede maximale Untergruppe X von G_1 ist $K_4(G_1) < < C_{G_1}(X) < K_3(G_1)$, und für $X \neq Y \lessdot G_1$ ist $C_{G_1}(X) \neq C_{G_1}(Y)$, also ist die Zuordnung $X \to C_{G_1}(X)$ bijektiv von der Menge der maximalen Untergruppen von G_1 auf die Menge der U mit $K_4(G_1) < U < K_3(G_1)$.

Aus (ii) und (iii) folgt nun, daß es $x, \bar{y} \in G_1$ gibt mit $G_1 = \langle x, \bar{y} \rangle$ und $[x, \bar{y}, x, x] \neq 1$. Für beliebige Erzeugende g, h von G_1 wäre sonst

$$1 = [hg, g, hg, hg] = [h, g, hg, hg] =$$
$$= [h, g, h, h][h, g, h, g]^2 [h, 3g] = [h, g, h, g]^2 .$$

Damit enthielte $C_{G_1}([h, g, h])$ neben h auch g, also G_1, ein Widerspruch zu (i).

Wegen (i) ist $|\langle [x, \bar{y}, x] \rangle K_4(G_1)| = p^2$. Nach (iv) gibt es daher ein $y \in G_1 \setminus K_2(G_1)$ mit $[x, \bar{y}, x, y] = 1$. Wegen $[x, \bar{y}, x, x] \neq 1$ und der Bijektivität in (iv) ist $G_1 = \langle x, y \rangle$. Sei o.B.d.A. $y = x^i \bar{y}^j$. Dann ist $j \neq 0$, und mit (ii) ist

$$[x, y, x, y] = 1 \neq [x, y, x, x] .$$

Wegen $[x, 3y] \in K_4(G_1)$ gibt es ein $c \in GF(p)$ mit

$$[x, 3y] = [x, y, x, x]^c .$$

Seien $a_1 := [x, y]$, $a_2 := [a_1, x]$, $a_3 := [a_1, y]$, $a_4 := [a_2, x]$. Damit ist G_1 festgelegt:

$$G_1 = \langle x, y \colon [a_i, a_j] = a_i^p = x^p = y^p = [a_2, y] = [a_3, x] = \\ = [a_4, x] = [a_4, y] = 1,\ [a_3, y] = a_4^c \rangle .$$

Wieder können wir wegen 1.31 annehmen, daß $a(x, y) \neq 1$ oder $c(x, y) \neq 1$ gilt.

Seien $i \in GF(p) \setminus \{0\}$, $\bar{x} := x^i$ und $\bar{y} := y^i$. Dazu seien die $\bar{a}_i$ in $\bar{x}$ und $\bar{y}$ genauso definiert wie die a_i in x und y. Dann sind die $\bar{a}_i \in K_2(G_1)$, kommutieren also miteinander und haben die Ordnung p. Es gibt $v_3 \in K_3(G_1)$, v_4, $w_4 \in K_4(G_1)$, so daß gilt

$$\bar{a}_1 = a_1^{i^2} v_3 , \qquad \bar{a}_2 = a_2^{i^3} v_4 , \qquad \bar{a}_3 = a_3^{i^3} w_4 , \qquad \bar{a}_4 = a_4^{i^4} .$$

Daher gilt auch $[\bar{a}_2, \bar{y}] = [a_2^{i^3} v_4, y^i] = [a_2, y^i]^{i^3} = 1$ und entsprechend $[\bar{a}_3, \bar{x}] = 1$. Daß ferner $[\bar{a}_4, \bar{x}] = [\bar{a}_4, \bar{y}] = 1$ gilt, ist klar. Schließlich ist

$$[\bar{a}_3, \bar{y}] = [a_3^{i^3} w_4, y^i] = a_4^{ci^4} = \bar{a}_4^c .$$

Damit erfüllen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ alle Relationen von x und y, und mit 1.32 folgt, daß es Automorphismen $\tau = \tau_i$ mit $x^\tau = x^i$ und $y^\tau = y^i$ gibt. Es ist $Z(G_1) = \langle a_4 \rangle$, und wegen $\bar{a}_4 = a_4^{i^4}$ ist $z^\tau = z^{i^4}$ für jedes $z \in Z(G_1)$. Dann erhalten wir mit den bekannten Schlüssen

$$c(x, y)^{i^4} = c(x, y)^\tau = c(x^\tau, y^\tau) = c(x^i, y^i) = c(x, y)^{i^2}$$

und dann $c = 1$ und wie üblich

$$a(x, y)^{i^4} = a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau) = a(x^i, y^i) = a(x, y)^i ,$$

woraus $a(x, y) = 1$ im Widerspruch zur Wahl von x und y folgt. Damit ist der Satz beweisen.

1.44 KOROLLAR. Es sei $G = G_1 \times G_2$ eine metabelsche, nichtabelsche Gruppe vom Exponenten 5. Ist $G_1 \simeq G_2$, so ist jede Projektivität von G durch genau einen Isomorphismus induziert.

BEWEIS. Vermöge 1.40 können wir annehmen, daß für ein minimales Gegenbeispiel $d(G_i) = 2$ gilt. Wegen [7] ist dann $\mathrm{cl}\, G_i \leqq \leqq p - 1 = 4$, und die Behauptung folgt aus Satz 3.

1.5. *Ein Beispiel der Klasse 5.*

Der Sinn dieses Teilabschnittes ist es, zu zeigen, daß sich Satz 3 nicht auf höhere Klassen ausdehnen läßt.

Unser erster Hilfssatz ist in gewisser Weise eine Umkehrung von 1.40 für den Fall $r = 2$:

1.45 LEMMA. *a.*) Seien X und Y nichtzyklische p-Gruppen und α: $X \to Y$ ein Fastisomorphismus. Es sei α^{-1} ein Fastisomorphismus oder, äquivalent dazu, $|\mathrm{Aut}\, X| = |\mathrm{Aut}\, Y|$. Dann induziert α eine Projektivität des zweifachen direkten Produktes auf folgende Weise:

Seien $G = G_1 \times G_2$, $H = H_1 \times H_2$ mit Isomorphismen

$$\varepsilon_1\colon X \to G_2\,, \quad \varepsilon_2\colon X \to G_2\,, \qquad \eta_1\colon Y \to H_1\,, \quad \eta_2\colon Y \to H_2\,.$$

Für alle $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ sei

$$(g_1 g_2)^\beta := g_1^{\varepsilon_1^{-1}\alpha\eta_1} \cdot g_2^{\varepsilon_2^{-1}\alpha\eta_2}\,.$$

Dann induziert β eine Projektivität von G auf H.

b.) Seien X und Y wie in Teil *a.*) und α: $X \to Y$ eine bijektive Abbildung, die auf allen maximalen Untergruppen ein Isomorphismus ist und auf die in *a.*) angegebene Weise eine Projektivität φ des zweifachen Produktes induziert. Ist $\exp X = p$ und X keine MA-Gruppe, so ist φ nur dann durch einen Isomorphismus induziert, wenn α schon einer ist.

BEWEIS. Mit α hat in jedem Falle auch α^{-1} die Eigenschaften i.) und ii.) aus 1.15. Die Abbildung, die jedem $\tau \in \mathrm{Aut}\, X$ den Automorphismus $\alpha^{-1}\tau\alpha$ von Y zuordnet, ist offenbar injektiv. Für den Fall, daß $|\mathrm{Aut}\, X| = |\mathrm{Aut}\, Y|$ gilt, ist sie dann auch surjektiv. Das heißt aber, daß auch α^{-1} die Eigenschaft iii.) von 1.15 hat. Umgekehrt folgt aus 1.15.iii) für α^{-1} genauso $|\mathrm{Aut}\, X| = |\mathrm{Aut}\, Y|$. Aus Symmetriegründen reicht es daher in beiden Fällen, zu zeigen:

Für alle $U \leqq G_1 \times G_2$ ist $U^\beta \leqq H_1 \times H_2$.

Sei also $U \leqq G_1 \times G_2$. Seien U_1 und U_2 die Bilder der Projektionen in G_1 und G_2, und seien $N_1 := U \cap G_1$ und $N_2 := U \cap G_2$. Dann sind $N_i \trianglelefteq U_i$, und nach 1.12.*b*) gibt es einen Epimorphismus $\sigma\colon U_1 \to U_2/N_2$ mit $\operatorname{Ker} \sigma = N_1$, so daß $U = \{uv\colon u \in U_1, v \in u^\sigma\}$ ist. Ist $U_1 < G_1$ oder $N_1 > 1$, so ist auch $|U_2/N_2| < |G_2|$. Es induziert also β sowohl auf U_1/N_1 als auch auf U_2/N_2 einen Isomorphismus. Daher ist auch $\beta^{-1}\sigma\beta$ als Abbildung von U_1^β/N_1^β nach U_2^β/N_2^β ein Isomorphismus und somit

$$U^\beta = \{u^\beta v^\beta\colon u \in U_1, v \in u^\sigma\} = \{u^\beta v^\beta\colon u^\beta \in U_1^\beta, v^\beta \in (u^\beta)^{\beta^{-1}\sigma\beta}\}$$

eine Untergruppe von H. Seien also $U_1 = G_1$ und $N_1 = 1$, und daher auch $U_2 = G_2$ und $N_2 = 1$. Dann ist U eine Diagonale in $G_1 \times G_2$. Seien $\bar\varepsilon := \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2$ und $\bar\eta := \eta_1^{-1}\eta_2$. Damit gibt es ein $\tau \in \operatorname{Aut} G_1$, so daß U die Form hat $U = \{g^\tau g^{\bar\varepsilon}\colon g \in G_1\}$, und

$$U^\beta = \{g^\tau g^{\bar\varepsilon}\colon g \in G_1\}^\beta = \{g^{\tau\beta} g^{\bar\varepsilon\beta}\colon g \in G_1\} = \{(g^\beta)^{\beta^{-1}\tau\beta}(g^\beta)^{\beta^{-1}\bar\varepsilon\beta}\colon g^\beta \in H_1\}\,.$$

Nach 1.15.iii) ist $\beta^{-1}\tau\beta \in \operatorname{Aut} H_1$. In der Einschränkung auf H_1 ist ferner

$$\beta^{-1}\bar\varepsilon\beta = \beta^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\beta = \eta_1^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1}\alpha\eta_2 = \bar\eta\,,$$

folglich also U^β eine Diagonale in $H_1 \times H_2$: Daher induziert β eine Projektivität von G.

b.) Sei τ ein φ induzierender Isomorphismus. Sei M eine beliebige maximale Untergruppe von X. Dann ist $\beta\tau^{-1}$ auf $M^{\varepsilon_1} \times M^{\varepsilon_2}$ ein Isomorphismus, sogar ein Potenzautomorphismus, da β und τ beide φ induzieren. Wegen 1.34.*d* gilt dann, daß β und τ auf $M^{\varepsilon_1} \times M^{\varepsilon_2}$ übereinstimmen, also insgesamt $\beta = \tau$ gilt. Damit ist auch α ein Isomorphismus und der Hilfssatz beweisen.

Um für Gruppen vom Exponenten p also Projektivitäten des zweifachen direkten Produktes zu finden, die nicht durch Isomorphismen induziert sind, reicht es, eine Gruppe zu finden, die keine MA-Gruppe ist und einen Fastisomorphismus besitzt, der kein Isomorphismus ist.

Zur Konstruktion einer Gruppe mit einem derartigen Fastisomorphismus benutzen wir einen Hilfssatz, der erst später weitergehend gebraucht werden wird.

1.46 Lemma. Seien p eine Primzahl und natürliche Zahlen n und k gegeben mit $p > n \geqq k \geqq 4$. Ferner seien $m_k, \ldots, m_n \in GF(p)$. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine metabelsche Gruppe maximaler Klasse n vom Exponenten p, $G = \langle s, s_1 \rangle$ mit der zusätzlichen Relation

$$[s_2, s_1] = s_k^{m_k} \cdot \ldots \cdot s_n^{m_n}.$$

Dabei sei $s_i := [s_1, (i-1)s]$.

Der Beweis benutzt einige Rechnungen entbehrt aber jeglichen Tiefganges und bleibt deshalb dem Leser überlassen.

Wir benutzen jetzt diesen Hilfsastz, um in einer konkreten Gruppe einen Fastisomorphismus zu finden, der kein Isomorphismus ist.

1.47 Beispiel. Sei $G = \langle s, s_1, \ldots, s_5 \colon s^p = s_i^p = 1$ für alle i, $[s_i, s_j] = 1 = [s_5, s]$ für $2 \leqq i$, $j \leqq 5$, $[s_i, s] = s_{i+1}$ für $1 \leqq i \leqq 4$, $[s_2, s_1] = s_4 s_5^{-1}$, $[s_3, s_1] = s_5$, $[s_i, s_1] = 1$ für $i = 4$ und $i = 5\rangle$.

Die Existenz einer solchen Gruppe G folgt für $p \geqq 7$ aus 1.46. Es seien $G_2 := G'$, $G_{i+1} := [G_i, G]$ und $G_1 := C_G(G_2/G_4)$.

Wir wollen als erstes die Automorphismen von G bestimmen. Es ist G_1 maximal und charakteristisch in G, wie das in jeder Gruppe maximaler Klasse der Fall ist. Sei $\tau \in \operatorname{Aut} G$. Dann gibt es $h, g \in G'$, $i, j, k \in GF(p)$, so daß $s_1^\tau = s_1^i g$ und $s^\tau = s^j s_1^k h$ gelten. Durch diese Werte ist τ festgelegt. Mit [8], Theorem 3, reicht es, $s_1^\tau = s_1^i$ und $s^\tau = s^j s_1^k$ anzusetzen. Wir stellen einige Formeln bereit:

i.) $[s_1^i, s^j] = s_2^{ij} s_3^{i\binom{j}{2}} g_4$ mit einem geeigneten $g_4 \in G_4$,

ii.) $[s_2^i, s^j] = s_3^{ij} s_4^{i\binom{j}{2}} s_5^{i\binom{j}{3}}$,

iii.) $[s_3^i, s^j] = s_4^{ij} s_5^{i\binom{j}{2}}$,

iv.) $[s_2^i, s_1^j] = s_4^{ij} s_5^{-ij}$.

Die Formeln ii.) und iii.) folgen, indem zunächst 1.43.c) und dann 1.43.e) angewandt werden, iv.) gilt, da G_1 die Klasse 2 hat. Schließlich ist

$$[s_1^i, s^j] = [s_1^i, s]^{\binom{j}{1}} [s_1^i, 2s]^{\binom{j}{2}} \bar{g}_4 = s_2^{ij} s_3^{i\binom{j}{2}} g_4$$

mit geeigneten $g_4, \bar{g}_4 \in G_4$. Die erste Gleichheit folgt aus 1.43.e), die zweite aus 1.43.f unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Elemente s_1 und s_2 einander modulo G_4 zentralisieren.

Wir berechnen nun die Operation von τ auf den s_i:

$$s_2^\tau = [s_1^i, s^j s_1^k] = [s_1^i, s^j][s_1^i, s^j, s_1^k] = s_2^{ij} s_3^{i\binom{j}{2}} g$$

mit $g \in G_4$. Dies folgt aus i.).

$$s_3^\tau = [s_2^\tau, s^j s_1^k] = [s_2^\tau, s_1^k][s_2^\tau, s^j][s_2^\tau, s^j, s_1^k] =$$

$$= s_4^{ijk} s_3^{ij^2} s_4^{ij\binom{j}{2}} s_4^{ij\binom{j}{2}} h = s_3^{ij^2} s_4^{ijk+2ij\binom{j}{2}} h$$

mit $h \in G_5$.

$$s_4^\tau = [s_3^\tau, s_1^k][s_3^\tau, s^j] = s_5^{ij^2k} s_4^{ij^3} s_5^{ij^2\binom{j}{2}+ij^2k+2ij^2\binom{j}{2}} = s_4^{ij^3} s_5^{2ij^2k+3ij^2\binom{j}{2}} .$$

$$s_5^\tau = [s_4^\tau, s^j s_1^k] = s_5^{ij^4} .$$

Damit wird

$$s_5^{ij^4} = s_5^\tau = [s_3^\tau, s_1^\tau] = [s_3^{ij^2}, s_1^i] = s_5^{i^2j^2} ,$$

also $i^2 j^2 = ij^4$. Deshalb ist $i = j^2$ eine notwendige Bedingung. Daher ist

$$[s_2^\tau, s_1^\tau] = [s_2^{j^3}, s_1^{j^2}][s_3^{j^2\binom{j}{2}}, s_1^{j^2}] = s_4^{j^5} s_5^{-j^5+j^4\binom{j}{2}}$$

und

$$s_4^\tau s_5^{-\tau} = s_4^{j^5} s_5^{2j^4k+3j^4\binom{j}{2}-j^6} .$$

Somit gilt $\frac{1}{2}j^6 - \frac{3}{2}j^5 = 2j^4k + \frac{1}{2}j^6 - \frac{3}{2}j^5$. Hieraus folgt $k = 0$.

Ohne daß wir es beweisen oder benutzen, sei bemerkt daß $s_1^\tau = s_1^{j^2}$ und $s^\tau = s^j$ in der Tat für alle $j \in GF(p) \setminus \{0\}$ einen Automorphismus liefern.

Wir definieren jetzt unseren Fastisomorphimus:

Sei $1 \neq z \in Z(G)$ fest gewählt. Für alle $g = s^i s_1^j h$ mit $i, j \in GF(p)$, $h \in G_2$ sei

$$g^\alpha := g z^{f(i,j)} .$$

Es sei dabei

$$f(i, j) = j^5/i^4 \qquad \text{für } i \neq 0 \text{ und } f(0, j) = 0 .$$

Wir berechnen die Amorphie bezüglich α: Sie ist offenbar konstant auf Restklassen nach G_2. Es ist

$$(s^t s_1^u s^v s_1^w)^\alpha = s^t s_1^u s^v s_1^w z^{f(t+v,u+w)}$$

und

$$(s^t s_1^u)^\alpha (s^v s_1^w)^\alpha = s^t s_1^u s^v s_1^w z^{f(t,u)+f(v,w)} .$$

Da α auf Elementen von $Z(G)$ die Identität ist, ist

$$a(s^t s_1^u, s^v s_1^w) = z^{f(t+v,u+w)-f(t,u)-f(v,w)}$$

für alle $t, u, v, w \in GF(p)$. Für alle j, t, u mit $j \neq 0 \neq t$ gilt

$$f(jt, ju) = (ju)^5/(jt)^4 = j \cdot u^5/t^4 = jf(t, u) ,$$

aber auch für $t = 0$ oder $j = 0$ ist $f(jt, ju) = 0 = jf(t, u)$.

Sei nun M eine maximale Untergruppe von G. Ist $M = G_1$, so ist $\alpha|_M = id_M$. Sei M eine andere maximale Untergruppe von G. Dann gibt es ein $i \in GF(p)$, so daß M aus den Elementen der Form $(ss_1^i)^j x$ mit $j \in GF(p)$ und $x \in G_2$ besteht. Es ist

$$a\big((ss_1^i)^j x, (ss_1^i)^k y\big) = a(s^j s_1^{ij}, s^k s_1^{ik}) =$$
$$= z^{f(j+k,ij+ik)-f(j,ij)-f(k,ik)} = z^{(j+k)f(1,i)-jf(1,i)-kf(1,i)} = 1 .$$

Wegen 1.16 folgt daraus die Bedingung i.) von 1.15. Die Amorphie liegt in $Z(G)$, dem einzigen minimalen Normalteiler von G. Daraus folgt wegen 1.16 die Bedingung 1.15.ii).

Sei $\tau \in \operatorname{Aut} G$. Nach bereits Bewiesenem gibt es dann $j \in GF(p) \setminus \{0\}$, $x, y \in G_2$, so daß gilt $s^\tau = s^j x$ und $s_1^\tau = s_1^{j^2} y$. Es ist dann $s_5^\tau = s_5^{j^6}$.

Für alle $t, u, j \in GF(p)$ mit $t \neq 0 \neq j$ gilt

$$f(jt, j^2 u) = (j^2 u)^5/(jt)^4 = j^6 \cdot u^5/t^4 = j^6 f(t, u) .$$

Aber auch für $t = 0$ oder $j = 0$ gilt $f(jt, j^2 u) = 0 = j^6 f(t, u)$. Seien nun $g = s^t s_1^u x$, $h = s^v s_1^w y \in G$ mit $t, u, v, w \in GF(p)$, $x, y \in G_2$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in G_2 = \Phi(G)$, so daß gilt

$$a(g^\tau, h^\tau) = a(s^{jt} s_1^{j^2 u} g_1, s^{jv} s_1^{j^2 w} g_2) = a(s^{jt} s_1^{j^2 u}, s^{jv} s_1^{j^2 w}) =$$
$$= z^{f(j(t+v),j^2(u+w))-f(jt,j^2u)-f(jv,j^2w)} = z^{j^6(f(t+v,u+w)-f(t,u)-f(v,w))} =$$
$$= a(s^t s_1^u, s^v s_1^w)^{j^6} = a(s^t s_1^u, s^v s_1^w)^\tau = a(g, h)^\tau .$$

Wegen 1.19.*b*) ist daher auch die Bedingung 1.15.iii) erfüllt und daher α ein Fastisomorphismus.

Da die Amorphe nicht trivial ist, ist α kein Isomorphismus. Da $\exp G = p$ ist und G keine MA-Gruppe, wird die von α entsprechend 1.45.*a*) auf dem zweifachen direkten Produkt von G induzierte Projektivität φ nach 1.45.*b*) durch keinen Gruppenisomorphismus von $G \times G$ induziert.

Wir haben in Beispiel 1.47 je nach Auswahl von z aus $Z(G)$ insgesamt $p-1$ Projektivitäten konstruiert, die nicht durch Gruppenisomorphismen induziert sind. Ohne Beweis bemerken wir, daß es die einzigen Projektivitäten mit dieser Eigenschaft sind, die $G \times G$ zuläßt, abgesehen von solchen, die durch Vorschalten von Automorphismen entstehen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Adney - Yen, *Automorphisms of a p-group*, Illinois J. Math., **9** (1965), pp. 137-143.

[2] R. Baer, *The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, Amer. J. of Math., **61** (1939), pp. 1-44.

[3] C. D. H. Cooper, *Power automorphisms of a group*, Math. Z., **107** (1968), pp. 335-356.

[4] Fuchs, *Abelian groups*, Pergamon Press (1960).

[5] B. Huppert, *Endliche Gruppen* I, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1967).

[6] Jakovlev, *Lattice isomorphisms of groups*, Algebra and Logic, **9** (1970), pp. 210-222.

[7] Meier - Wunderli, *Metabelsche Gruppen*, Comm. Math. Helv., **25** (1951), pp. 1-10.

[8] Miech, *The metabelian p-groups of maximal class* II, Trans. Amer. Math. Soc., **272** (1982), pp. 465-474.

[9] L. Redei, *Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie*, Comm. Math. Helv., **20** (1947), pp. 225-267.

[10] R. Schmidt, *Der Untergruppenverband des direkten Produktes zweier isomorpher Gruppen*, Journal of Algebra, **73** (1981), pp. 264-272.

[11] R. Schmidt, *Untergruppenverbände endlicher Gruppen mit elementarabelschen Hallschen Normalteilern*, J. Reine Angew. Math., **334** (1982), pp. 116-140.

[12] M. Suzuki, *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), pp. 345-371.

[13] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1956).
[14] G. ZACHER, *Sul reticolo dei sottogruppi del quadrato cartesiano di un gruppo semplice*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **65** (1981), pp. 1-7.

Pervenuto in redazione il 12 giugno 1986.