Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Walter Streb

Potenzen von invarianten Untergruppen in Ringen mit Involution

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 76 (1986), p. 269-284

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__76__269_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 76 (1986)

Potenzen von Invarianten Untergruppen in Ringen mit Involution.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Sei R halbprimer Ring mit Involution *. Abgesehen von den in [11] klassifizierten Ausnahmesituationen ist die Grundstruktur invarianter Untergruppen U von R wie folgt:

(*) Es gibt *-Ideale $X \neq 0 \neq Y$ von R, so daß $[V_X, V_X] \subset U$ bzw. $[V_X, W_X] \subset U$ und $Y \subset \overline{U}$.

Verallgemeinerungen und Modifikationen des Ergebnisse « $Y \subset \overline{U}$ » wurden für spezielle Ringklassen angeregt bzw. bewiesen. Herstein [4; p. 66] wirft folgende Frage auf:

Gilt $S^2 = R$, falls R einfach, $Z_S = Z$ und $S_4(R) \neq 0$?

Nach [4; Theorem 2.1.11, p. 69] gilt:

$S = {}^2K$, falls $2R = R$ und $\overline{K} = R$.

Für Lieideale U von K mit ${}^3U \subset U$ gilt nach [5; Theorem 5.2, p. 164]:

$U = K$, falls R einfach, char $R \notin \{2, 3\}$ und $S_8(R) \neq 0$.

Die Literaturvorlagen ordnen sich den im folgenden untersuchten Fragestellungen unter: Sei $2 \leqslant n \in \mathbb{Z}$. Gilt $Y \subset U^n$, $[Y, Y] \subset U^n$, $V_Y \subset U^n$, $W_Y \subset U^n$, $V_Y \subset {}^nU$ bzw. $W_Y \subset {}^nU$ für ein *-Ideal $Y \neq 0$ von R?

(*) Indirizzo dell'A.: FB 6, Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstraße 3, D-4300 Essen 1, BRD.

Anwendbar sind unsere Ergebnisse auf die durch Auswertung von Polynomen f in nicht vertauschbaren Unbestimmten x_i, x_i^*, $0 < i \in \mathbb{Z}$, erzeugten additiven Untergruppen von R (vgl. IV). Diese Untersuchung in IV ist exemplarisch, da sich ähnliche Fragen für alle Ringe mit oder ohne Operatorenbereich stellen.

Weiterhin zeichnen sich Anwendungen auf die Theorie der Abbildungssätze *ab* [4; pp. 154-183] über die später berichtet werden soll.

Zur Formulierung des Hauptsatzes benötigen wir folgende

Definitionen und Notationen.

Für $1 \leqslant n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in R$ und $A, B \subset R$ sei

$[a, b] = ab - ba$,

$a \circ b = ab + ba$,

$|A|$ die Mächtigkeit von A ,

A^+ die von A erzeugte additive Untergruppe von R ,

$\bar{A}$ der von A erzeugte Unterring von R ,

$$
\begin{aligned}
[A, B] &= \{[a, b]\colon a \in A,\ b \in B\}^+ ,\\
A \circ B &= \{a \circ b\colon a \in A,\ b \in B\}^+ ,\\
{}^nA &= \{a^n\colon a \in A\}^+ ,\\
V_A &= \{a - a^*\colon a \in A\}^+ ,\\
W_A &= \{a + a^*\colon a \in A\}^+ ,\\
K &= K(R) = \{a \in R\colon a^* = -a\} ,\\
S &= S(R) = \{a \in R\colon a^* = a\} ,\\
Z &= Z(R) \text{ das Zentrum von } R,\\
Z_S &= Z_S(R) = Z \cap S ,\\
Z_K &= Z_K(R) = Z \cap K .
\end{aligned}
$$

Für additive Untergruppen A und B von R sei $U(A, B)$ rekursiv definiert wie folgt: $A, B \in U(A, B)$; mit $C, D \in U(A, B)$ ist $[C, D]$, $C \circ D \in U(A, B)$.

Ist R *-prim und $A \subset R$, so sei $Q(R) = RZ_S^{-1}$ und $Q(A) = AQ(Z_S)$.

Für Körper F sei $\tilde{F}$ die algebraische Hülle von F, $M_n(F)$ der Ring der n-n-Matrizen über F, s die symplektische Involution auf $M_n(F)$, falls n gerade, und t die gewöhnliche Transposition auf $M_n(F)$ [8; p. 140]. Sei R *-primer Ring, $F := Q(Z_S)$ und $i \in \{s, t\}$. R heißt i-Ring, wenn R PI-Ring, $Z_S = Z$ und die von $*$ auf $Q(R) \otimes_F \tilde{F} \simeq M_n(\tilde{F})$ induzierte Involution gleich i ist.

Sei R^{0p} der Gegenring von R und $\hat{R}$ die zentrale Hülle von R [4; pp. 20-22 and Lemma 2.4.1, pp. 88, 89] und [7; p. 2010].

Schließlich sei σ_n die Menge der Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$, $S_n := \sum_{\pi \in \sigma_n} \operatorname{sign}(\pi) x_{\pi 1} \dots x_{\pi n}$ das n-te Standardpolynom und $T_n := \sum_{\pi \in \sigma_n} x_{\pi 1} \dots x_{\pi n}$.

Die Symbole X, Y, I, J stehen im folgenden stets für von null verschiedene *-Ideale von R.

Zunächst einige Vorbemerkungen zum Hauptsatz. Zur Entlastung der Darstellung beschränken wir die Untersuchungen auf *-prime Ringe R. Mit Standardmethoden aus [9, 10, 11] erhält man leicht die möglichen Verallgemeinerungen auf halbprime Ringe. Weiterhin sei $S_8(R) \neq 0$ oder ($Z_S \neq Z$ und $S_4(R) \neq 0$). Dann gilt (*) und wir betrachten o.E. $U \in \{[V_X, V_X], [V_X, W_X]\}$. (Die ausgeschlossenen Ringe untersucht man wiederum leicht mit Standardmethoden aus [11]). Ist $A \neq 0$ *-Ideal von X, so ist $XAX \neq 0$ *-Ideal von R. O.E. sei deshalb $X = R$. Sei $1 \leqslant n \in \mathbb{Z}$ fest gewählt.

Hauptsatz.

A) Sei $p := \operatorname{char} R \neq 2$, $A := [V_R, V_R]$, $B := [V_R, W_R]$ und $C_i \in \{A, B\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gibt es Y, so daß gilt:

(1) $W_Y + [Y, Y] \subset A^2 \cap B^2$.

(2) $V_Y + [Y, Y] \subset AB \cap BA$.

(3) $Y \subset \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} C_i$, falls $n \geqslant 3$.

(4) $Y \subset A^n \cap B^n$, falls $n \geqslant 2$, $Z_S = Z$ und R PI-Ring.

(5) $V_Y \subset {}^{2n+1}A$ und $W_Y \subset {}^{2n}A \cap {}^{n+1}B$, falls $n \geqslant 1$ und (($p > n$ oder $p = 0$) oder ($p \nmid n$ und $|{}^nZ_S| > n$) oder ($p \nmid n$ und $S_{2(n+1)}(R) \neq 0$)).

(PROBLEM. Gibt es Y, so daß $Y \subset A^n \cap B^n$, falls $n \geqslant 2$, $Z_S = Z$ und R kein PI-Ring?)

B) Sei $\operatorname{char} R = 2$ und $A := W_R \circ W_R$. Dann gibt es Y, so daß gilt:

(1) $W_Y \subset A^2$.

(2) $Y \subset A^n$, falls $n \geqslant 4$.

(3) $W_Y + Y \circ Y \subset A^2$, falls $Z_S \neq Z$ oder R PI-Ring.

(4) $Y \subset A^n$, falls $n \geqslant 3$ und ($Z_S \neq Z$ oder R PI-Ring).

(5) $W_Y \subset {}^nA$, falls $n \geqslant 3$, ($Z_S \neq Z$ oder R t-Ring) und (($2 \nmid n$ und $|{}^nZ_S| > n$) oder ($2 \nmid n$ und $S_{2(n+1)}(R) \neq 0$)).

(PROBLEME. Gibt es Y, so daß $Y \circ Y \subset A^2$ *bzw.* $Y \subset A^n$, falls $n \geqslant 3$, $Z_S = Z$ und R kein PI-Ring? Gilt (5), falls $Z_S = Z$ und R kein t-Ring?)

Beweisteil.

In Abschnitt I stellen wir die für die Untersuchungen benötigten allgemeinen Lemmata zusammen. In Abschnitt II und III werden dann schrittweise die Aussagen $A(1, 2, 3, 4)$ bzw. $B(1, 2, 3, 4)$ bewiesen. In Abschnitt IV beschäftigen wir uns mit der Auswertung von Polynomen in Ringen (4.1-6) und zeigen dann als Anwendung $A(5)$ und $B(5)$ (4.7-10). Abschnitt V beinhaltet eine Anwendung auf primitive Ringe. Ein Ausblick VI auf Ringe ohne Involution beschließt die Note.

Im folgenden sei stets R *-prim, $S_8(R) \neq 0$ oder ($Z_S \neq Z$ und $S_4(R) \neq 0$)

1. Unmittelbar klar ist folgende Aussage:

1.1. Ist $A \neq 0$ *-Ideal von X, so ist $XAX \neq 0$ *-Ideal von R.

Nach [4; Example 3, 4, pp. 66, 67], [3; Theorem 5, p. 570] und [6; Theorem 13, p. 123] gilt

1.2. Sei $\operatorname{char} R \neq 2$ oder R prim. Dann gibt es Y, so daß $[Y, Y] \subset V_R^2 \cap W_R^2$.

1.3. (1) Es gibt Y, so daß $[W_Y, W_Y] \subset [V_R, V_R]$ bzw. $[V_Y, V_Y] \subset \subset [W_R, W_R]$.

(2) Ist $\operatorname{char} R \neq 2$, so gibt es Y, so daß $[Y, Y] \subset [V_R, V_R] + + [V_R, W_R]$, insbesondere $[Y, Y] \cap K \subset [V_R, V_R]$ und $[Y, Y] \cap S \subset \subset [V_R, W_R]$.

(3) Sei $Z_S \neq Z$, $x \in Z \setminus Z_S$ und $Y := (x - x^*)R$. Dann gilt $Y \subset \subset W_R + xW_R$ und $Y \circ Y \subset W_R \circ W_R + xW_R \circ W_R$, insbesondere $Y \circ Y \cap \cap S \subset W_R \circ W_R$.

Beweis. (1) Sei $U \in \{V, W\}$ und o.E. $\operatorname{char} R \neq 2$. Nach 1.2 gibt es Y, so daß $[Y, Y] \subset 2U_R^2 \subset [U_R, U_R] + U_R \circ U_R$. Nun erhält man unmittelbar die Behauptung.

(2) erhält man unmittelbar mit (1).

(3) Für alle $a \in R$ gilt: $(x - x^*)a = x(a + a^*) - (xa^* + ax^*)$ und $x^2 = (x + x^*)x - x^*x$. Nun folgt leicht die Behauptung.

1.4. Sei R PI-Ring. Dann gibt es $0 \neq z \in Z_S$ und $a_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$, so daß $zR \subset \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{+} a_i Z_S$.

Beweis. Nach [8; Theorem 1.6.27, p. 47] besitzt R PI-Klasse m und ein Primideal P, so daß $P \cap P^* = 0$. Sei $g = g_m$ zentrales Polynom gemäß [8; p. 26]. Es gilt $g(R)^+ \not\subset P \cap P^*$. Wähle $c \in g(R)^+ \setminus \setminus (P \cup P^*)$. Dann ist $d := cc^* \in Z_S$ regulär in R. Nach [8; Theorem 1.4.21, p. 28] ist $dR \subset \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{+} Zb_i$ mit $b_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Für $Z_S = Z$ wählt man $z := d$ und $a_i = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. O.E. sei $Z_S \neq Z$. Wähle $x \in Z \setminus Z_S$. Für alle $y \in Z$ gilt $(x - x^*)y = x(y + y^*) - (xy^* + x^*y)$. Also ist $(x - x^*)^2 Z \subset (x - x^*)xZ_S + (x - x^*)Z_S$. Nun wählt man $z := d(x - x^*)^2$, $a_i := b_i(x - x^*)x$ und $a_{n+i} := b_i(x - x^*)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

1.5. Sei R PI-Ring. Dann gibt es $a \in R$, $b \in S$, $c \in W_R$ und Y, so daß gilt:

(1) $Y \subset Za + [R, R]$.

(2) $Y \subset Zb + [R, R]$, $V_Y \subset Z_K b + [V_R, V_R]$ und $W_Y \subset Z_S b + [V_R, W_R]$, falls $Z_S \neq Z$ oder $\operatorname{char} R \neq 2$.

(3) $W_Y \subset Zc + W_R \circ W_R$ bzw. $W_Y \subset W_R \circ W_R$, falls $\operatorname{char} R = 2$ und R s-bzw. t-Ring.

Beweis. Nach 1.4 reicht es, die Aussagen für den $*$-einfachen Ring $Q(R)$ zu zeigen. O.E. sei R $*$-einfach. Wir verwenden 1.3 (2, 3).

(a) Sei zunächst R einfach und $\tilde{Z}$ die algebraische Hülle von Z. Durch Betrachtung von $R \otimes_Z \tilde{Z} \simeq M_n(\tilde{Z})$ erhält man $[R, R] \neq R$ und $R = Za \oplus [R, R]$ für alle $a \in R \setminus [R, R]$, also (1). Ist $Z_S \neq Z$, so erhält man mit 1.3 (2, 3) zunächst $W_R \not\subset [R, R]$ und dann (2). Sei nun $Z_S = Z$. Durch Betrachtung der auf $R \otimes_Z \tilde{Z} \simeq M_n(\tilde{Z})$ induzierten Involution s bzw. t und Beachtung von 1.3 (2) erhält man (2, 3).

(b) Sei R *-einfach, jedoch nicht einfach. Dann ist $R = T \times T^{op}$ mit einfachem Ring T und Austauschinvolution *. Wie bei (a) erhält man $T = Z(T)a + [T, T]$, also $R = Z(a, a) + [R, R]$ für alle $a \in T \setminus [T, T]$, demnach (2) mit 1.3 (2, 3).

1.6. Seien $A, B \in U(V_R, W_R)$, $A \subset K$ und $B \subset S$. Dann gilt:

(1) Es gibt I, so daß $[V_I, V_I] \subset A$ und $[V_I, W_I] \subset B$.

(2) Ist R PI-Ring, $Z_S = Z$ und $\operatorname{char} R \neq 2$ oder R t-Ring, so gibt es I, so daß $V_I \subset A$.

Beweis. (1) erhält man mit [10; Corollary 2 and Theorem 9, pp. 344, 348]. (2) folgt aus (1) mit 1.5 (2, 3) und 1.1.

1.7. Seien A und B additive Untergruppen von R mit $[I, I] \subset B$. Dann ist $I[I, A]\bar{A} \subset B + BA$.

Beweis. Es ist $I[I, A] \subset [I, IA] + [I, I]A \subset B + BA$ und $I[I, A]A \subset I[[I, A], A] + IA[I, A] \subset I[I, A]$.

1.8. Seien A und B additive Untergruppen von R mit $[A, A] \subset A$ und $[A, I] \subset B$. Dann ist $I[A, A]\bar{A} \subset B + BA$.

Beweis. Es ist $I[A, A] \subset [A, IA] + [A, I]A \subset B + BA$ und $I[A, A]A \subset I[[A, A], A] + IA[A, A] \subset I[A, A]$.

1.9. Für alle $a, b, c \in R$ und $d \in K$ gilt:

(1) $[a, b \circ c] = [a, b] \circ c + b \circ [a, c]$.

(2) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) - [[a, c], b]$.

(3) $[ab, c] = [a, c]b + a[b, c]$ und $[a^*, d] = [a, d]^*$.

2. In diesem Abschnitt sei $\operatorname{char} R \neq 2$.

2.1. Es gibt Y, so daß $W_Y \subset [V_R, V_R] \circ [V_R, V_R] =: A$.

Beweis. Nach [10; Theorem 9, p. 348] gibt es I und J, so daß $J \subset I$, $[V_I, W_I] \subset A$ und $[W_J, V_I] \subset [V_I, [V_I, V_I]] \circ V_I =: B$. Nach [10; Theorem 20, p. 351] reicht es zu zeigen, daß $B \circ W_J \subset B \subset A$: Wegen 1.9 ist $B \subset [V_I, [V_I, V_I] \circ V_I] + [V_I, V_I] \circ [V_I, V_I] \subset [V_I, W_I] + A \subset A$ bzw.

$$B \circ W_J \subset [V_I, [V_I, V_I]] \circ (V_I \circ W_J) + \\ + \Big[\big[[V_I, [V_I, V_I]], W_J\big], V_I\Big] \subset B + [W_J, V_I] \subset B.$$

2.2. Es gibt Y, so daß $W_Y \subset [V_R, W_R] \circ [V_R, W_R] =: A$.

Beweis. Nach 1.6 (1) gibt es I, so daß $[V_I, W_I] \subset A$. Sei $B_0 := [V_I, [V_I, W_I]]$ und $B_{i+1} := B_i \circ W_I$ für $0 \leqslant i \in \mathbb{Z}$. Nach [10; Theorem 20, p. 351] reicht es zu zeigen, daß $+_{0 \leqslant i \in \mathbf{Z}} B_i \subset A$: Es ist $B_0 \subset [V_I, W_I] \subset A$. Wegen 1.9 ist

$$B_0 \circ W_I \subset [V_I, [V_I, W_I] \circ W_I] + [V_I, W_I] \circ [V_I, W_I] \subset [V_I, W_I] + A \subset A$$

bzw. mit $B_i \circ W_I \subset A$ auch

$$(B_i \circ W_I) \circ W_I \subset B_i \circ (W_I \circ W_I) + [[B_i, W_I], W_I] \subset B_i \circ W_I + [V_I, W_I] \subset A\,.$$

2.3. Sei R PI-Ring, $Z_S = Z$ und $2 \leqslant n \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es Y, so daß $Y \subset [V_R, V_R]^n \cap [V_R, W_R]^n$.

Beweis. Nach 1.6 (1) und 1.1 sei o.E. $n = 2$. Mit 2.1, 2.2 und 1.6 (2) erhält man die Behauptung.

2.4. Es gibt Y, so daß $W_Y + [Y, Y] \subset [V_R, V_R]^2$.

Beweis. Nach 2.1 und 1.6 (1) gibt es Y, so daß $W_Y + [V_Y, V_Y] \subset [V_R, V_R]^2$. Mit 1.3 und 1.1 erhält man die Behauptung.
Analog zeigt man mit 2.2:

2.5. Es gibt Y, so daß $W_Y + [Y, Y] \subset [V_R, W_R]^2$.

2.6. Sei $3 \leqslant n \in \mathbb{Z}$. Es gibt Y, so daß $Y \subset [V_R, V_R]^n$.

Beweis. Sei $A := [V_R, V_R]$. Nach 1.6 (1) und 1.1 sei o.E. $n = 3$ und reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $Y \subset A^2 + A^3$. Nach 2.4 gibt es I, so daß $[I, I] \subset A^2$. Nach 1.7 ist $I[I, A]\overline{A} \subset A^2 + A^3$. Mit [10; Corollary 2, p. 344] erhält man die Behauptung.

Mit 2.5 zeigt man analog.

2.7. Sei $3 \leqslant n \in \mathbb{Z}$. Es gibt Y, so daß $Y \subset [V_R, W_R]^n$.

2.8. Es gibt Y, so daß $V_Y \subset [V_R, V_R] \circ [V_R, W_R]$.

Beweis. Nach 1.3 (1) gibt es I, so daß $[W_I, W_I] \subset [V_R, V_R]$. Sei $U := [V_I, W_I]$. Nach 2.7 und 1.1 gibt es Y, so daß

$$V_Y \subset 4U^3 \cap K \subset [U, U] \circ U + [U \circ U, U] \subset [U, U] \circ U \subset [V_R, V_R] \circ [V_R, W_R].$$

2.9. Es gibt Y, so daß $V_Y + [Y, Y] \subset [V_R, V_R][V_R, W_R]$.

Beweis. Sei $A := [V_R, V_R]$, $B := [V_R, W_R]$ und $\hat{R}$ die zentrale Hülle von R [7].

(a) Nach 2.8, 1.6 (1) und 1.1 gibt es Y, so daß

$$V_Y + [Y, Y] \subset [A, B] + A \circ B \subset AB + BA .$$

(b) Ist $Z_K(\hat{R}) \neq 0$, so wählt man $0 \neq z \in Z_K(\hat{R})$ und I, so daß $zI \subset R$ und $z^2 I \subset R$. Dann gilt $W_{zI} = zV_I$ und $V_{zI} = zW_I$, also $[V_{zI}, W_{zI}] \cdot [V_{zI}, V_{zI}] \subset AB$. Mit ($a$) und 1.1 erhält man die Behauptung.

(c) Sei nun $Z_K(R) = 0$. Nach [7; Theorem 7, p. 2013] gibt es I, so daß $[V_I, V_I] \subset AB$ oder $[V_I, W_I] \subset AB$. Sei $C := [V_I, V_I]$ und $D := [V_I, W_I]$.

(d) Sei $D \subset AB$. Dann ist $CD + DC \subset CD + [C, D] \subset CD + D \subset AB$. Mit ($a$) und 1.1 erhält man die Behauptung.

(e) Sei schließlich $C \subset AB$. Nach 1.6 (1) gibt es J, so daß $J \subset I$ und $[V_J, W_J] \subset 2[A, B] = W_{2AB}$. Zu $c \in [V_J, W_J]$ gibt es $a \in K$ und $b \in S$, so daß $a + b \in 2AB$ und $2b = (a + b) + (a + b)^* = c$. Dann ist $[[a, V_J], V_J] \subset AB$, also $[[b, V_J], V_J] \subset AB$, somit $[[c, V_J], V_J] \subset AB$. Demnach gilt $\big[[[V_J, W_J], V_J], V_J\big] \subset AB$. Mit 1.6 (1) und 1.1 erhält man die Situation (d).

Analog zeigt man

2.10. Es gibt Y, so daß $V_Y + [Y, Y] \subset [V_R, W_R][V_R, V_R]$.

2.11. Sei $3 \leqslant n \in \mathbb{Z}$ und $U_i \in \{[V_R, V_R], [V_R, W_R]\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gibt es Y, so daß $Y \subset \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} U_i$.

Beweis. Nach 2.4, 2.5, 2.9, 2.10 und 1.1 sei o.E. $n = 3$ und reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $Y \subset U_1 U_2 + U_1 U_2 U_3 =: U$. Nach 2.4, 2.5, 2.9 und 2.10 gibt es I, so daß $[I, I] \subset U_1 U_2$. Nach 1.7 ist $I[I, U_3]\overline{U}_3 \subset U$. Mit [10; Corollary 2, p. 344] erhält man die Behauptung.

3. In diesem Abschnitt sei $\operatorname{char} R = 2$.

3.1. Es gibt Y, so daß $W_Y \subset (W_R \circ W_R)^2$.

Beweis. Nach 1.6 (1) gibt es I, so daß $W_I \circ W_I \subset (W_R \circ W_R)^2$. Für alle $a, b, c \in W_I \circ W_I$ gilt:

$$a(b\circ c)a = aba\circ c + (a\circ c)ba + ab(a\circ c) =$$
$$= aba\circ c + \big((a\circ c)\circ b\big)a + b\big((a\circ c)\circ a\big) + (a\circ b)(a\circ c) \in W_I\circ W_I +$$
$$+ (W_R\circ W_R)^2 \subset (W_R\circ W_R)^2 .$$

Wegen 1.6 (1) und 1.1 reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $W_Y \subset \{uvu\colon u, v \in W_R \circ W_R\}^+ =: U$. Für alle $a, b \in W_R \circ W_R$ und $c \in W_R$ gilt: $aba\circ c = (a\circ c)ba + ab(a\circ c) + a(b\circ c)a \in U$. Nach [10; Corollary 2, p. 344] gibt es I und J, so daß $J \subset I$, $A := W_I \circ W_I \subset U$ und $B := := W_J \circ W_J \subset (A\circ A)\circ A \subset {}^2A\circ A$. Wegen $W_R BR \subset (W_R \circ B)R + BW_R R \subset BR$ gilt (*) $\overline{W}_R BR \subset BR \subset ({}^2A\circ A)R$.

Für alle $a, b, c \in W_I \circ W_I$ und $r \in R$ ist

$$(a^2\circ b)r + r^*(a^2\circ b) = a\circ\big(ab(r + r^*) + (r + r^*)ba\big) +$$
$$+ a\circ\big(a\circ(rb + br^*)\big) + b\circ(a^2 r + r^* a^2) + a\big(b\circ(r\circ r^*)\big)a \in W_I\circ W_I + U \subset U .$$

Wegen (*) ist nun $W_{\overline{W}_R BR} \subset U$. Mit [10; Corollary 2, p. 344] erhält man die Behauptung.

3.2. Sei $Z_S \neq Z$. (Es reicht $Z_S(\hat{R}) \neq Z(\hat{R})$). Es gibt Y, so daß $W_Y + Y\circ Y \subset (W_R \circ W_R)^2$.

Beweis. (*a*) Sei $z \in Z \setminus Z_S$. Für alle $a \in R$ gilt $(z + z^*)a = = z(a + a^*) + z^* a + a^* z$.

(*b*) Sei $I := (z + z^*)R$ und $A := W_I \circ W_I$. Nach 3.1, 1.6 (1) und 1.1 gibt es J, so daß $J \subset I$, $W_J \subset A^2$ und $B := [W_J \circ W_J] \subset A\circ A = W_{A^2}$. Zu $c \in B$ gibt es $a, b \in W_R$, so daß $a + zb \in A^2$ und $(z + z^*)b =$

$= (a + zb) + (a + zb)^* = c$. Dann ist $a \circ W_J \subset W_J \subset A^2$, also $z(b \circ W_J) \subset A^2$, somit $z(c \circ W_J) \subset A^2$. Demnach gilt $z(B \circ W_J) \subset A^2$. Nach 3.1, 1.6 (1) und 1.1 gibt es Y, so daß $C := W_Y + z(W_Y \circ W_Y) \subset A^2$. Nach ($a$) ist $D := (z + z^*)Y \subset W_Y + zW_Y$, also $D \circ D \subset C \subset A^2$ wegen $z^2 = (z + z^*)z + zz^*$.

3.3. Sei $3 \leqslant n \in \mathbb{Z}$ und $Z_S \neq Z$. (Es reicht $Z_S(\hat{R}) \neq Z(\hat{R})$). Dann gibt es Y, so daß $Y \subset (W_R \circ W_R)^n$.

Beweis. Sei $A := W_R \circ W_R$. Nach 3.2 und 1.1 sei o.E. $n = 3$ und reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $Y \subset A^2 + A^3$. Nach 3.2 gibt es I, so daß $[I, I] \subset A^2$. Nach 1.7 ist $I(I \circ A)\bar{A} \subset A^2 + A^3$. Mit [10; Corollary 2, p. 344] erhält man die Behauptung.

3.4. Sei R PI-Ring. Dann gibt es Y, so daß $W_Y + Y \circ Y \subset (W_R \circ W_R)^2$.

Beweis. Wegen 3.2 sei o.E. $Z_S = Z$.

(a) Sei R t-Ring. Nach 1.5 (3) und 1.1 reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $Y \circ Y \subset W_R^2$. Dies gilt nach 1.2.

(b) Sei R s-Ring und $F := Z_S$. Nach 1.4 reicht es die Aussage für den $*$-einfachen Ring $Q(R)$ zu zeigen. O.E. sei R $*$-einfach. Nun errechnet man die Behauptung an $(R \otimes_F \tilde{F}, *) \simeq (M_n(\tilde{F}), s)$.

3.5. Sei $3 \leqslant n \in \mathbb{Z}$ und R PI-Ring. Dann gibt es Y, so daß $Y \subset (W_R \circ W_R)^n$.

Beweis. Sei $A := W_R \circ W_R$. Wegen 3.3 sei o.E. $Z_S = Z$. Nach 1.6 (1) und 1.1 sei o.E. $n = 3$ und reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $Y \subset A^2 + A^3$. Nach 3.4 gibt es I, so daß $I \circ I \subset A^2$. Nach 1.7 ist $I(I \circ A)\bar{A} \subset A^2 + A^3$. Mit [10; Corollary 2, p. 344] erhält man die Behauptung.

3.6. Sei $4 \leqslant n \in \mathbb{Z}$. Es gibt Y, so daß $Y \subset (W_R \circ W_R)^n$.

Beweis. Sei $A := W_R \circ W_R$. Wegen 3.3 sei o.E. $Z_S = Z$. Nach 1.6 (1) und 1.1 sei o.E. n $= 4$ und reicht es zu zeigen: Es gibt Y, so daß $Y \subset A^3 + A^4$. Nach 3.1 gibt es I, so daß $W_I \subset A^2$.

Dann ist $W_I^2 \circ W_R \subset W_I(W_I \circ W_R) + (W_I \circ W_R)W_I \subset A^3$. Nach 1.2 und 1.1 gibt es J, so daß $J \circ J \subset W_I^2$. Also ist $W_J \circ (J \circ J) \subset A^3$, somit $(W_J \circ W_J) \circ$ $\circ J \subset A^3$. Nach 1.8 ist $J((W_J \circ W_J) \circ (W_J \circ W_J))(\overline{W_J \circ W_J}) \subset A^3 + A^4$. Mit [10; Corollary 2, p. 344] erhält man die Behauptung.

4. Mit den Mengen $X := \{x_i : 0 < i \in \mathbb{Z}\}$ und $X^* := \{x_i^* : 0 < i \in \mathbb{Z}\}$ von Symbolen bildet man die freie $\mathbb{Z}$-Algebra $\mathbb{Z}\{X, X^*\}$. Sei $f(x_1, \dots, x_m) \in \in \mathbb{Z}\{X, X^*\}$. Durch die formalen Substitutionen $r_i \to x_i$ und $r_i^* \to x_i^*$ für $r_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant m$, erhält man $f(r_1, \dots, r_m) \in R$. Wir setzen $f(R) := := \{f(r_1, \dots, r_m) : r_i \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

Sei $1 \leqslant i \in \mathbb{Z}$. Für ein Monom $h = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_m} \in \mathbb{Z}\{X, X^*\}$ sei

$$\deg^i(h) = \deg_i(h) := \left|\{y_{j_k} : y_{j_k} \in \{x_i, x_i^*\},\ 1 \leqslant k \leqslant m\}\right|$$

und

$$\deg^0(h) = \deg_u(h) = m\,.$$

Es gilt eindeutig $f = \sum_{1 \leqslant j \leqslant l} z_j h_j$ mit $0 \neq z_j \in \mathbb{Z}$ und paarweise verschiedenen Monomen $h_j, 1 \leqslant j \leqslant l$. Sei $\deg^\beta(f) := \max\{\deg^\beta(h_j) : 1 \leqslant j \leqslant l\}$ für $\beta \in \{i, 0\}$ und $\deg_\beta(f) := \min\{\deg_\beta(h_j) : 1 \leqslant j \leqslant l\}$ für $\beta \in \{i, u\}$. In diesem Abschnitt sei $f = f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}\{X, X^*\}$ mit $\deg^0(f) = n$ und $f(R) \subset K$ oder $f(R) \subset S$. (Ohne die Voraussetzung $f(R) \subset K$ bzw. $f(R) \subset S$ erhält man ähnliche Ergebnisse bei Verwendung von [7]). Unsere Anwendungen auf $f(R)^+$ bestehen in der Untersuchung des Zusammenhanges zwischen $f(R)^+$ und invarianten Untergruppen von R.

4.1. Sei $Z_S \neq Z$ und $S_{n+1}(R) \neq 0$ oder $Z_S = Z$ und $S_{2(n+1)}(R) \neq 0$. Dann gibt es Y, so daß $[V_Y, V_Y] \subset f(R)^+$ bzw. $[V_Y, W_Y] \subset f(R)^+$.

Beweis. O.E. sei f multilinear. Nach [8; Theorem 1.4.5 and Proposition 2.2.19, pp. 22, 122] bzw. [4; Lemma 5.1.5, p. 195] ist $f(R)^+ \not\subset Z$. Nach 1.9 (3) ist $[f(R)^+, K] \subset f(R)^+$. Mit [10; Corollary 2 and Theorem 9, pp. 344, 348] erhält man die Behauptung.

4.2. Sei $\operatorname{char} R = p$ mit $p = 0$ oder $n < p$ und $f(R) \not\subset Z$. Dann gibt es Y, so daß $[V_Y, V_Y] \subset f^+(R)$ oder $[V_Y, W_Y] \subset f^+(R)$.

Beweis. Im folgenden werden — falls erforderlich — Unbestimmte stillschweigend umnumeriert. Es reicht deshalb Operationen exemplarisch an x_m zu erörtern. Es gilt:

(*) Zu $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ gibt es stets $0 < k \in \mathbb{Z}$, so daß $p \nmid k^i - k^j$.

(a) Sei $g := f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ und $h := f - g$. Wegen $Z \not\supset g(R)^+ \cup \cup h(R)^+ \subset f(R)^+$ sei o.E. $\deg_i(f) \geqslant 1$ für $1 \leqslant i \leqslant m$.

(b) Für $0 < i$, $z \in \mathbb{Z}$ sei $g_{z,i} := f(x_1, \dots, x_{m-1}, zx_m) - z^i f(x_1, \dots, x_m)$. Dann gilt $g_{z,i}(R)^+ \subset f(R)^+$. Nach mehrmaliger Durchführung dieser Operation sei wegen (*) o.E. $\deg_i(f) = \deg^i(f)$ für $1 \leqslant i \leqslant m$.

(c) Sei $\deg^m(f) = v$ und gemäß (*) $0 < k \in \mathbb{Z}$ mit $k^v \neq k$ und

$$g_k := f(x_1, \dots, x_{m-1}, \sum_{0 \leqslant j < k} x_{m+k}) - \sum_{0 \leqslant j < k} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+k}).$$

Dann gilt $g_k(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, \dots, x_m) = (k^v - k) f(x_1, \dots, x_m)$. Nach mehrmaliger Durchführung dieser Operation sei o.E. $\deg_i f = 1 = \deg^i f$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Nun schließt man weiter wie bei 4.1.

4.3. Sei $|{}^nZ_S| > n$, $\deg^0(f) = \deg_u(f)$ und $f(R)^+ \not\subset Z$. Dann gibt es Y, so daß $[V_Y, V_Y] \subset f(R)^+$ oder $[V_Y, W_Y] \subset f(R)^+$.

Beweis. Zunächst ist $f(R)^+$ ein ${}^nZ_S$-Modul. Wegen $|{}^nZ_S| > n$ gilt:

(*) Zu $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ gibt es stets $z \in {}^nZ_S$, so daß $z^i \neq z^j$. Wir verfolgen nun den Beweis von 4.2:

(a) Wie dort sei o.E. $\deg_i(f) \geqslant 1$ für $1 \leqslant i \leqslant m$.

(b) Wie dort sei bei Verwendung von $0 < i \in \mathbb{Z}$ und $z \in Z_S$ o.E. $\deg_i(f) = \deg^i(f)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

(c) Sei $g := f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + x_{m+1}) - \sum_{0 \leqslant j \leqslant 1} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+j})$, $\deg^m(f) = v$ und $g = \sum_{1 \leqslant j,\, k \leqslant v-1} g_{j,k}$, wobei $\deg_m(g_{j,k}) = j = \deg^m(g_{j,k})$ und $\deg_{m+1}(g_{j,k}) = k = \deg^{m+1}(g_{j,k})$. Dann gibt es $0 \neq z \in {}^nZ_S$, so daß $zg_{v-1,1}(R)^+ \subset f(R)^+$. Nach entsprechender Bearbeitung aller Unbestimmten gibt es $0 \neq z \in {}^nZ_S$, so daß $[f(R)^+, zK] = z[f(R)^+, K] \subset f(R)^+$ wegen 1.9 (3). Mit [10; Corollary 2 and Theorem 9, pp. 344, 348] erhält man die Behauptung.

4.4. Sei Z'_S Unterring von Z_S mit $|Z'_S| > n$ und $f(R) \not\subset Z$. Dann gibt es Y, so daß $[V_Y, V_Y] \subset f(R)Z'_S$ oder $[V_Y, W_Y] \subset f(R)Z'_S$.

Beweis. Zunächst ist $f(R)Z'_S$ ein Z'_S-Modul. Nun verfolgt man den Beweis von 4.3.

4.5. Sei $\operatorname{char} R = p \neq 0$, $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, R PI-Ring, $|Z_S| > n$, $f(R) \not\subset Z$ $T := \overline{f(R)}$ und $Z' := Z(T)$. Dann gilt:

(1) $Z' \subset Z$.

(2) Sei $c \in Z'_S \mathbb{Z}_p$-transzendent. Dann gibt es Y, so daß $[V_Y, V_Y] \subset f(R)\mathbb{Z}_p[c]$ oder $[V_Y, W_Y] \subset f(R)\mathbb{Z}_p[c]$. Insbesondere gibt es Y, so daß $Y \subset f(R)^4 \mathbb{Z}_p[c] \subset T$.

Sei nun Z'_S $\mathbb{Z}_p$-algebraisch, insbesondere T $*$-einfach. Dann gilt:

(3) Z_S ist $\mathbb{Z}_p$-algebraisch, insbesondere R $*$-einfach.

(4) Wähle $z \in Z_S$ mit $|\mathbb{Z}_p[z]| > n$. Dann gilt $[V_R, V_R] \subset f(R)\mathbb{Z}_p[z]$ oder $[V_R, W_R] \subset f(R)Z_p[z]$, $R = f(R)^4\mathbb{Z}_p[z]$, $R = T \otimes_{Z'} Z'[z]$, $T = f(R)^4 Z'$ und $Z = Z'[z]$. Ist $|Z'_S| > n$, so kann man $z \in Z'_S$ wählen.

Beweis. (1) Nach 4.4 gibt es Y, so daß $Y \subset TZ_S$. Also gilt $Z' \subset Z$.

(2) folgt unmittelbar mit 4.4.

(3) Angenommen es gibt $c \in Z_S$ $\mathbb{Z}_p$-transzendent. Nach 4.4 gibt es Y, so daß $Y \subset T\mathbb{Z}_p[c^2]$.

(a) Sei zuerst T einfach. Dann ist Z' $\mathbb{Z}_p$-algebraisch, also c Z'-transzendent. Nach [1; Theorem 2 and Corollary, pp. 363, 364] ist zunächst $TZ'[c] = T \otimes_{Z'} Z'[c]$ und gibt es dann ein Ideal $0 \neq I$ von $Z'[c]$, so daß $Y = T \otimes_{Z'} T \subset T \otimes_{Z'} Z'[c^2]$, also $I \subset Z'[c^2]$, Widerspruch.

(b) Sei nun $T = U \times U^{0p}$ mit einem einfachen Ring U. Für $Y' := \{a \in U\mathbb{Z}_p[c^2] | (a, b) \in Y\}$ verfährt man wie bei (a).

(4) gilt wegen (3), 4.4 und [1; Theorem 2 and Corollary, pp. 363, 364].

Mit 4.1, 4.2 und 4.5 erhält man unmittelbar.

4.6. Sei R $*$-einfach und $|R| = \infty$. Dann gilt $f(R) \subset Z$ oder $R = f(R)^4\ Z' = T$. Notationen gemäß 4.5.

4.7. Sei $0 < n \in \mathbb{Z}$ und $A \in \{[V_R, V_R], [V_R, W_R]\}$. Dann gilt ${}^nA \not\subset Z$.

Beweis. Wir führen die Annahme ${}^nA \subset Z$ zum Widerspruch. Zunächst ist R PI-Ring. Nach Übergang zu $Q(R)$ sei o.E. R $*$-einfach. Ist R nicht einfach, also $R = T \times T^{0p}$ mit einfachem Ring T und Austauschinvolution $*$, so gilt ${}^nT \subset Z(T)$ im Widerspruch zu [2; Theorem 3.2.2, p. 79]. Sei nun R einfach. Ist $Z_S = Z$ und $(R, *) \simeq (M_{2n}(Z), s)$ so errechnet man die Behauptung. Anderenfalls gibt es einen Schiefkörper D mit Involution—und $0 \neq d_i \in S(D)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, so daß $(R, *) \simeq (M_n(D), *)$ und $(e_{ij}d)^* = e_{ji}d_j\bar{d}d_i^{-1}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Für $Z_S \neq Z$ ist $\square$: $x \mapsto d_1\bar{x}d_1^{-1}$ Involution 2. Art auf D. Für alle $a, b \in D$ gilt $[e_{11}a - (e_{11}a)^*, e_{11}b \mp (e_{11}b)^*] = e_{11}[a - a^{\square}, b \mp b^{\square}]$ und $[e_{13} - e_{13}^*, e_{32} \mp e_{32}^*] = e_{12} \mp e_{12}^*$: Also ist $n \leqslant 2$ und $S_4(D) = 0$ bzw. $S_2(D) = 0$, falls $Z_S \neq Z$, Widerspruch.

4.8. Sei $\operatorname{char} R \nmid n$ und ($\operatorname{char} R \neq 2$ oder $Z_S \neq Z$ oder R t-Ring). Sei weiterhin $A \in \{[V_R, V_R], [V_R, W_R]\}$ und $T_{n-1}(A)$, $T_n(A) \not\subset Z$. Dann gibt es Y, so daß $V_Y \subset {}^nA$ oder $W_Y \subset {}^nA$.

Beweis. Wegen $T_n(A)^+ \subset {}^nA$ reicht es die Behauptung für $T_n(A)^+$ zu zeigen. Wir verwenden 1.3 (2, 3) und schließen exemplarisch für $A = [V_R, W_R]$. Wie im Beweis von 4.1 gibt es I, so daß $[V_I, W_I] \subset$ $\subset T_n(A)^+$. Nach 1.5(3) sei o.E. $\operatorname{char} R \neq 2$ oder $Z_S \neq Z$.

(a) Sei $\operatorname{char} R \neq 2$ und $J := 2I$. Für alle $a_i \in [V_J, W_J] =: B$, $1 \leqslant i \leqslant n$, gilt $T_n(a_1, \ldots, a_n) - nT_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})\, a_n \in [J, J]$. Es gibt X und Y, so daß $X \subset J$, $[V_X, W_X] \subset nT_{n-1}(B)$ und $W_Y \subset [V_X, W_X]^2$.

Dann gilt $W_Y \subset [V_X, W_X]^2 \subset nT_{n-1}(B) B \subset T_n(B)^+ + [J, J]$, also $W_Y \subset$ $\subset T_n(B)^+ + [J, J] \cap S \subset T_n(B)^+ + [V_I, W_I] \subset T_n(A)^+$.

(b) Sei nun $\operatorname{char} R = 2$, $z \in Z \setminus Z_S$ und $J := (z + z^*) I$. Mit 1.3(3) schließt man wie bei (a).

4.9. Sei $2 \leqslant n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{char} R > n$ oder $\operatorname{char} R = 0$. Sei weiterhin $A \in \{[V_R, V_R], [V_R, W_R]\}$. Dann gibt es Y, so daß $V_Y \subset {}^nA$ oder $W_Y \subset {}^nA$

Beweis. Wegen $T_n(A) \subset {}^nA \subset n!\, T_n(A)^+$ und 4.7 erhält man die Behauptung mit 4.8.

4.10. Sei $2 \leqslant n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{char} R \nmid n$ und ($\operatorname{char} R \neq 2$ oder $Z_S \neq Z$ oder R t-Ring). Sei weiterhin $|{}^nZ_S| > n$ und $A \in \{[V_R, V_R], [V_R, W_R]\}$. Dann gibt es Y, so daß $V_Y \subset {}^nA$ oder $W_Y \subset {}^nA$.

Beweis. Wir schließen exemplarisch für $A = [V_R, W_R]$. Sei $I \neq 0$ beliebiges $*$-Ideal von R. Wie im Beweis von 4.3 gibt es $0 \neq z \in$ $\in {}^nZ_S$, so daß für alle $a, b \in [V_I, W_I]$ gilt:

$$c(a, b) := z(a^{n-1} b + a^{n-2} ba + \ldots + ba^{n-1}) \in {}^n[V_I, W_I]$$

und $c(a, b) - nza^{n-1} b \in [I, I]$. Nun verfährt man wie im Beweis von 4.8 unter Verwendung von 4.3 und 4.7.

Bemerkung. In 4.1, 4.8 und 4.10 kann man die Voraussetzung $Z_S \neq Z$ durch $Z_S(\hat{R}) \subsetneqq Z(\hat{R})$ ersetzen.

5. In diesem Abschnitt sei R primitiver Ring mit 1 und primitivem Idempotentem $e \in S(R)$. Sei $D := eRe$ und X der Sockel von R.

5.1. Es gilt:

(1) $X = D + [X, X]$,

(2) Ist $\operatorname{char} R \neq 2$ oder $Z_S \neq Z$, so gilt $V_X = V_D + [V_X, V_X]$ und $W_X = W_D + [V_X, W_X]$.

(3) Ist D PI-Ring, so gibt es $a \in D$, so daß $X = Z(D)a + [X, X]$.

(4) Ist $\operatorname{char} R \neq 2$, D PI-ring und $Z_S(D) = Z(D)$, so gilt: $V_X = [V_X, V_X]$, insbesondere $[V_X, V_X]^2 = X = [V_X, W_X]^2$.

Beweis. (1) Sei $e_1 := e$ und $e_2 := 1 - e$. Dann ist

$$Y := \underset{1 \leqslant i, j \leqslant 2}{+} e_i X e_1 X e_j \neq 0$$

*-Ideal von R, also $Y = X$.

Wegen $e_i X e_1 X e_j \subset [e_i X e_1, e_1 X e_j] + e_1 X e_j e_i X e_1$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ gilt die Behauptung.

(2) erhält man mit 1.3(2, 3).

(3) gilt nach (1) und 1.5(1).

(4) gilt nach (2) und 1.5(2).

6. In diesem Abschnitt sei R primer Ring (nicht notwendig mit Involution) und $S_4(R) \neq 0$.

Eine additive Untergruppe A von R heißt invariant, wenn es ein Lieideal L von R gibt, so daß $[A, L] \subset A$. Mit [3, 6] erhält man entsprechende Ergebnisse für invariante Untergruppen A von R. Wir zeigen lediglich zwei Start-Aussagen. Die Hauptausagen C und D verifiziert man dann leicht entlang der in dieser Note aufgezeigten Linie.

6.1. Sei L Lieideal von R mit $L \not\subset Z$. Dann gilt:

(1) $0 \neq Y := R[[L, L], [L, L]r]R \subset L^2$.

(2) Sei $\operatorname{char} R \neq 2$. Es gibt Y, so daß $Y \subset L \circ L$.

Beweis. (1) Für alle $a, b \in L$ und $r, s \in R$ gilt $[a, b]r = [ar, b] - a[r, b] \in L + L^2$, also $s[a, b]r = [a, b]rs + [s, [a, b]r] \in L + L^2$.

Bei Anwendung dieser Überlegungen auf $[L, L]$ erhält man $Y \subset [L, L] + [L, L]^2 \subset L^2$. Nach [3; Theorem 5, p. 570] und [6; Theorem 13, p. 123] ist $Y \neq 0$.

(2) Nach [3; Theorem 5, p. 570] und (1) gibt es I und Y, so daß zunächst $[I, I] \subset L \circ L$ und dann $Y \subset 2[I, L]^2 \subset [I, L] \circ [I, L] + [[I, L], [I, L]] \subset L \circ L$.

C. Sei $p := \operatorname{char} R \neq 2$ und $A := [R, R]$. Weiterhin sei M folgende rekursiv definierte Menge: $A \in M$; mit $B, C \in M$ ist $B \circ C \in M$. Sei $\mathrm{A} \in M$. Dann gibt es Y, so daß gilt:

(1) $Y \subset \mathrm{A}$.

(2) $Y \subset {}^nA$, falls $n \geqslant 2$ und ($p > n$ oder $p = 0$) oder ($p \nmid n$ und $|{}^nZ| > n$) oder ($p \nmid n$ und $S_{n+1}(R) \neq 0$).

D. Sei $\operatorname{char} R = 2$ und $A := R \circ R$. Dann gibt es Y, so daß gilt:

(1) $Y \subset A^n$, falls $n \geqslant 2$.

(2) $Y \subset {}^nA$, falls $3 \leqslant n$ ungerade und ($|{}^nZ| > n$ oder $S_{n+1}(R) \neq 0$).

LITERATUR

[1] P. M. Cohn, *Algebra 2*, Wiley, New York, 1977.

[2] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Carus Monograph 15 (Math. Assoc. Amer.), Wiley, New York, 1973.

[3] I. N. Herstein, *On the Lie structure of an associative ring*, J. Algebra. **14** (1970), pp. 561-571.

[4] I. N. Herstein, *Rings with Involution*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.

[5] A. J. Karam, *Strong Lie ideals*, Pacific J. Math., **43** (1972), pp. 157-169.

[6] C. Lanski - S. Montgomery, *Lie structure of prime rings of characteristic 2*, Pacific J. Math., **42** (1972), pp. 117-136.

[7] L. H. Rowen, *Invariant subgroups of rings with involution*, Commun. Algebra, **7** (1979), pp. 2007-2025.

[8] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York, 1980.

[9] W. Streb, *Lie structure in semiprime rings with involution*, J. Algebra, **70** (1981), pp. 480-492.

[10] W. Streb, *Invariant subgroups in rings with involution*, J. Algebra, **72** (1981), pp. 342-358.

[11] W. Streb, *Invariante Untergruppen in Ringen mit Involution II*, J. Algebra, **87** (1984), pp. 1-15.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 settembre 1985.