

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

**Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$,
con $A(t)$ matrice 2×2 , nel caso oscillante. - II**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 75 (1986), p. 173-190

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__173_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$,
con $A(t)$ matrice 2×2 , nel caso oscillante. - II.**

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - A previous paper on asymptotical solution of oscillatory systems of two first order linear differential equations is continued; asymptotic value of the extrema of solutions are given, with strict numerical bounds.

1. Introduzione.

Si consideri il sistema

$$(1.1) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y$$

dove $A(t) = (a_{ij}(t))$ è una matrice 2×2 , a_{ij} sono funzioni reali di variabile reale.

Nelle ipotesi

$$I_1) \quad a_{ij} \in L_{loc}([0, +\infty)) \text{ ed } a_{12}, a_{21} \in AC_{loc}([0, +\infty))$$

$$I_2) \quad a_{12}(t) > 0, a_{21}(t) < 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

$$a_{12}(0) + a_{21}(0) = 0$$

$$I_3) \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{-a_{12}(t)a_{21}(t)} \, dt = +\infty$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7, Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

è stato mostrato in [2] che il sistema (1.1) si può scrivere nella forma canonica

$$(1.2) \quad \frac{dz}{dx} = C(x)z \quad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix}$$

dove

$$(1.3) \quad x = \varphi(t) = \int_0^t \sqrt{-a_{12}(\tau)a_{21}(\tau)} d\tau, \quad t = \psi(x)$$

e q.o. in $[0, +\infty)$

$$(1.4) \quad \omega(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{-a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right) + \int_0^t [a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)] d\tau \right] \circ \psi \right\}.$$

Ovviamente dalle ipotesi I_1, I_2, I_3 segue $\omega \in L_{loc}[0, +\infty)$.

La forma canonica (1.2) è stata ottenuta da (1.1), oltre che con il cambio di variabile (1.3), mediante l'uso delle trasformazioni

$$(1.5) \quad y = T_1(t)\tilde{y}$$

$$(1.5') \quad T_1(t) = \begin{pmatrix} \exp \left[\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[\int_0^t a_{22}(\tau) d\tau \right] \end{pmatrix}$$

e, posto $\tilde{y}(\psi(x)) = \tilde{z}(x)$,

$$(1.6) \quad \tilde{z} = T_2(x)z$$

$$(1.6') \quad T_2(x) = \begin{pmatrix} \exp \left[\int_0^x \omega(s) ds \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[-\int_0^x \omega(s) ds \right] \end{pmatrix}$$

I sistemi trasformati di (1.1) nei vettori $\tilde{y}(t)$ e $\tilde{z}(x)$ sono rispettivamente

$$(1.7) \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{A}(t)\tilde{y}$$

dove

$$(1.7') \quad \tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(t) \exp \left[\int_0^t [a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)] d\tau \right] \\ a_{21}(t) \exp \left[\int_0^t [a_{11}(\tau) - a_{22}(\tau)] d\tau \right] & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1.8) \quad \frac{d\tilde{z}}{dx} = \tilde{C}(x)\tilde{z}$$

dove

$$(1.8') \quad \tilde{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \exp \left[2 \int_0^x \omega(s) ds \right] \\ - \exp \left[-2 \int_0^x \omega(s) ds \right] & 0 \end{pmatrix}$$

In ipotesi supplementari sulla funzione ω che, assieme alle ipotesi I_1, I_2, I_3 garantiscono il carattere oscillante ⁽¹⁾ di tutti i sistemi citati (1.2), (1.8), (1.7), (1.1), sono state proposte in [2] due rappresentazioni asintotiche delle loro soluzioni con maggiorazione esplicita del resto.

In particolare nell'ipotesi supplementare H_1

$$H_1) \quad (\exists \omega_\infty \in R, |\omega_\infty| < 1) \quad \text{tale che} \quad \omega - \omega_\infty \in L([0, +\infty))$$

si è mostrato che la generica soluzione $z(x) = (z_i(x)) \quad i = 1, 2$ del sistema (1.2) ammette la rappresentazione

$$(1.9) \quad \begin{cases} z_1(x) = h[\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}x + \gamma) + \eta_1(x, \gamma)] \\ z_2(x) = h[\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}x + \gamma - \arcsin \omega_\infty) + \eta_2(x, \gamma)] \end{cases} \quad (h, \gamma \in R)$$

⁽¹⁾ Diremo che il sistema (1.2) è oscillante in $[0, +\infty)$ se detta $z(x) = (z_i(x))$ una sua soluzione non identicamente nulla le funzioni $z_1(x), z_2(x)$ posseggono in $[0, +\infty)$ infiniti zeri isolati che si separano mutuamente (si veda W. T. Reid [6]).

dove sulla semiretta $[\alpha, +\infty)$ sotto definita si ha

$$(1.10) \quad \max_i |\eta_i(x, \gamma)| = \|\eta(x, \gamma)\|_2 \leq \mu_0(x),$$

con $\mu_0(x)$ data da

$$(1.11) \quad \mu_0(x) = \frac{2k(x)}{1 - 2\sqrt{2}k(x) + \sqrt{1 - 4\sqrt{2}k(x)}},$$

$$(1.12) \quad k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - |\omega_\infty|}} \int_x^{+\infty} |\omega(s) - \omega_\infty| ds.$$

Ovviamente $\mu_0(x)$ è definita sulla semiretta $[\alpha, +\infty)$ dove $k(x) \leq \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Analoghe rappresentazioni si deducono per le soluzioni degli altri sistemi.

In questo lavoro (paragrafo 2), considerata una soluzione non banale $\tilde{z}(x) = (\tilde{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ del sistema (1.8), osservato che gli zeri x_n, ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) di $\tilde{z}_1(x), d\tilde{z}_1/dx$ (coincidenti rispettivamente con quelli di $d\tilde{z}_2/dx, \tilde{z}_2(x)$) si separano, si studia il comportamento asintotico dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|, |\tilde{z}_2(x)|$. Si ottengono così (teorema 1) le formule asintotiche (2.4), (2.5) contenenti una maggiorazione esplicita del resto. Benchè $\tilde{z}_1(x), \tilde{z}_2(x)$ siano anche soluzioni rispettivamente delle equazioni (2.2), (2.3), ciò non viene usato nella dimostrazione del teorema 1. Invece questa è ottenuta considerando opportune funzioni $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$, date da (2.8), (2.9), dipendenti dalla soluzione $z(x) = (z_i(x))$ di (1.2) corrispondente di $\tilde{z}(x)$ mediante (1.6). Le funzioni $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ sono positive monotone, rispettivamente decrescente e crescente, in $[0, +\infty)$ e tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\alpha_1(x)/\alpha_2(x)] = 1$. Esse si possono pensare ottenute dalle funzioni di tipo Liapunov

$$V_1(x, z_1, z_2) = \exp [L(x)] (z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2)$$

$$V_2(x, z_1, z_2) = \exp [-L(x)] (z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2)$$

con $L(x)$ data da (2.6) (si veda l'osservazione 1).

Nel paragrafo 3, aggiunta l'ipotesi $\omega \in C^0([0, +\infty))$, si considera una soluzione $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ di (1.2) e si osserva che in generale gli zeri di $z_1(x), dz_1/dx$ non si separano anzi che questi ultimi pos-

sono non costituire una successione. Si studia quindi il comportamento asintotico delle successioni dei massimi assoluti di $|z_1(x)|$, $|z_2(x)|$ rispettivamente negli intervalli $[x_n, x_{n+1}]$, $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ dove $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$. Si ottengono così le formule asintotiche (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) del teorema 2. Nella dimostrazione si utilizzano le stesse funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ già usate nel teorema 1. Nel paragrafo 4 si estendono i risultati ottenuti ad una soluzione $y(t)$ di (1.1) dopo aver aggiunto alle ipotesi I_1, I_2, I_3 quella che $a_{11}, a_{22} \in C^0([0, +\infty))$. Infine nel paragrafo 5 si fornisce un esempio di un sistema del tipo (1.2), verificante l'ipotesi H_1 ed $\omega \in C^0([0, +\infty))$, che ammette una soluzione $\bar{z}(x) = (\bar{z}_i(x))$ nella quale l'insieme degli zeri di $d\bar{z}_1/dx$ ha cardinale c . Più precisamente in ogni semiretta $[a, +\infty) \subset [0, +\infty)$ esiste una successione di intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ nei quali \bar{z}_1 è costante e quindi $d\bar{z}_1/dx = 0$; invece $d\bar{z}_2/dx$ ha una successione $\{\xi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di zeri. Si applica ad esempi il teorema 2, mostrando che in generale il resto non è migliorabile.

2. Comportamento asintotico delle successioni dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$.

Prendiamo in considerazione il sistema (1.8) $d\tilde{z}/dx = \tilde{C}(x)\tilde{z}$ che, posto $\tilde{z}(x) = (\tilde{z}_i(x))$ $i = 1, 2, ,$ si può scrivere

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{dx} = \exp \left[2 \int_0^x \omega(s) ds \right] \cdot \tilde{z}_2 \\ \frac{d\tilde{z}_2}{dx} = - \exp \left[-2 \int_0^x \omega(s) ds \right] \cdot \tilde{z}_1 \end{cases}$$

dove ω è data da (1.4). Nell'ipotesi H_1 , cioè

$$(\exists \omega_\infty, |\omega_\infty| < 1) \quad \text{tale che } (\omega - \omega_\infty) \in L([0, +\infty)),$$

esso risulta oscillante, di modo che, detta $\tilde{z}(x)$ una sua soluzione non banalè, $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ ammettono in $[0, +\infty)$ infiniti zeri isolati che si separano mutuamente. Siano rispettivamente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$. Risulta allora che $\{|\tilde{z}_1(\xi_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|\tilde{z}_2(x_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$

sono rispettivamente le successioni dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$. Osserviamo che $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ sono anche rispettivamente soluzioni delle equazioni

$$(2.2) \quad \frac{d^2 \tilde{z}_1}{dx^2} - 2\omega \frac{d\tilde{z}_1}{dx} + \tilde{z}_1 = 0$$

$$(2.3) \quad \frac{d^2 \tilde{z}_2}{dx^2} + 2\omega \frac{d\tilde{z}_2}{dx} + \tilde{z}_2 = 0.$$

Il comportamento asintotico delle successioni dei massimi relativi dei valori assoluti delle soluzioni di (2.2) e di (2.3) è stato studiato in ipotesi completamente diverse in [7] ottenendo risultati diversi e in generale difficilmente confrontabili con quelli che saranno ottenuti in questo paragrafo. Infatti le formule asintotiche che compaiono in [7] contengono la derivata di ω la cui esistenza qui non viene supposta.

Osserviamo infine che, escluso il caso $\omega_\infty = 0$, $\tilde{z}_1(x)$ oppure $\tilde{z}_2(x)$ non sono limitate in $[0, +\infty)$. Ciò segue dall'ipotesi H_1 , dalla trasformazione (1.6) $\tilde{z} = T_2(x)z$ e dalla limitatezza di $z_1(x)$, $z_2(x)$ rappresentate da (1.9). Pertanto in questi casi le formule asintotiche che otterremo ci daranno anche l'ordine di infinito o di infinitesimo delle successioni $\{|\tilde{z}_1(\xi_n)|\}_{n \in N}$, $\{|\tilde{z}_2(x_n)|\}_{n \in N}$. Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1. Valga l'ipotesi H_1 , sia $\tilde{z}(x) = (\tilde{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ una soluzione non banale di (2.1) e sia $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ la soluzione corrispondente, mediante (1.6), del sistema (1.2), soluzione quest'ultima che ammette la rappresentazione asintotica (1.9). Siano $\{x_n\}_{n \in N}$, $\{\xi_n\}_{n \in N}$ le rispettive successioni degli zeri di $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ allora per le successioni $\{|\tilde{z}_1(\xi_n)|\}_{n \in N}$, $\{|\tilde{z}_2(x_n)|\}_{n \in N}$ dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$ valgono le seguenti formule asintotiche con maggiorazione del resto:

$$(2.4) \quad \left| \exp \left[- \int_0^{\xi_n} \omega(s) ds \right] \cdot |\tilde{z}_1(\xi_n)| - b \right| \leq b (\exp [L(\xi_n)/2] - 1)$$

$$(2.5) \quad \left| \exp \left[\int_0^{x_n} \omega(s) ds \right] \cdot |\tilde{z}_2(x_n)| - b \right| \leq b (\exp [L(x_n)/2] - 1)$$

dove

$$(2.6) \quad L(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - \omega_\infty^2}} \int_x^{+\infty} |\omega(s) - \omega_\infty| ds, \quad b = |h| \sqrt{1 - \omega_\infty^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per $\tilde{z}(x)$ e $z(x)$ soluzioni corrispondenti mediante (1.6) dei sistemi (2.1) e (1.2), valgono le formule

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{z}_1(x) = \exp \left[\int_0^x \omega(s) ds \right] z_1(x) \\ \tilde{z}_2(x) = \exp \left[- \int_0^x \omega(s) ds \right] z_2(x) . \end{array} \right.$$

Pertanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresentano anche le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$. In corrispondenza a questa soluzione $(z_i(x))$ $i = 1, 2$ consideriamo le funzioni

$$(2.8) \quad \alpha_1(x) = \exp [L(x)] [z_1^2(x) - 2\omega_\infty z_1(x) z_2(x) + z_2^2(x)]$$

$$(2.9) \quad \alpha_2(x) = \exp [- L(x)] [z_1^2(x) - 2\omega_\infty z_1(x) z_2(x) + z_2^2(x)]$$

con $L(x)$ data da (2.6). Le funzioni α_1 , α_2 risultano positive ⁽²⁾, monotone, rispettivamente decrescente e crescente ⁽³⁾, in $[0, +\infty)$ ed inoltre si ha

$$(2.10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1 .$$

Infatti, tenendo conto che $(z_i(x))$ $i = 1, 2$ è soluzione di (1.2), si ha q.o. in $[0, +\infty)$

$$(2.11) \quad \alpha_1'(x) = \exp [L(x)] \{ [L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_1^2(x) - 2\omega_\infty L'(x) z_1(x) z_2(x) + [L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_2^2(x) \} ,$$

$$(2.12) \quad \alpha_2'(x) = \exp [-L(x)] \{ [-L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_1^2(x) + 2\omega_\infty L'(x) z_1(x) z_2(x) + [-L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_2^2(x) \} .$$

⁽²⁾ Si ricordi che $z(x)$ come soluzione corrispondente mediante (2.7) di $\tilde{z}(x)$ non può essere la soluzione banale.

⁽³⁾ Questa monotonia va intesa in senso largo. In particolare nel caso che sia $\omega(x) = \omega_\infty$ su una semiretta $[q, +\infty)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ risulteranno costanti e coincidenti in $[q, +\infty)$ come si vedrà più avanti.

Consideriamo dapprima il caso banale che sia $\omega(x) = \omega_\infty$ q.o. su una semiretta $[q, +\infty)$; si ha ivi $L(x) = 0$, $\alpha'_1(x) = \alpha'_2(x) = 0$. Dalle (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) si ottiene allora $\eta_1(x, \gamma) = \eta_2(x, \gamma) = 0$ in $[q, +\infty)$ e di conseguenza $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = h^2(1 - \omega_\infty^2)$ in $[q, +\infty)$.

In caso contrario per ogni x , fissato q.o. in $[0, +\infty)$, le forme quadratiche

$$(2.11') \quad \exp [L(x)] \{ [L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_1^2 - 2\omega_\infty L'(x) \lambda_1 \lambda_2 + \\ + [L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_2^2 \}$$

$$(2.12') \quad \exp [-L(x)] \{ [-L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_1^2 + 2\omega_\infty L'(x) \lambda_1 \lambda_2 + \\ + [-L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_2^2 \}$$

risultano nulle o semidefinite, rispettivamente negativa e positiva. Ne segue

$$(2.13) \quad \alpha'_1(x) \leq 0, \quad \alpha'_2(x) \geq 0 \quad \text{q.o. in } [0, +\infty)$$

e la monotonia richiesta di $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$. Da ciò e dalla (2.10) segue l'esistenza di una costante $b^2 > 0$ tale che

$$(2.14) \quad \alpha_1(x) \geq b^2 \geq \alpha_2(x) \quad x \in [0, +\infty)$$

e quindi

$$(2.15) \quad \exp [L(\xi_n)] z_1^2(\xi_n) \geq b^2 \geq \exp [-L(\xi_n)] z_1^2(\xi_n),$$

$$(2.16) \quad \exp [L(x_n)] z_2^2(x_n) \geq b^2 \geq \exp [-L(x_n)] z_2^2(x_n).$$

Ne seguono le diseuguaglianze, dove ovviamente $b > 0$,

$$(2.17) \quad ||z_1(\xi_n)| - b| \leq b(\exp [L(\xi_n)/2] - 1),$$

$$(2.18) \quad ||z_2(x_n)| - b| \leq b(\exp [L(x_n)/2] - 1)$$

poichè $|\exp [-L(x)/2] - 1| = 1 - \exp [-L(x)/2] \leq \exp [L(x)/2] - 1$.

Mediante (2.7) da (2.17), (2.18) seguono subito le (2.4), (2.5). Rimane da dimostrare (*) che $b = |h|\sqrt{1 - \omega_\infty^2}$. Ricordando che $z(x)$ am-

(*) Nel caso $\omega(x) = \omega_\infty$ q.o. in $[q, +\infty)$ ciò è già stato dimostrato perchè si è visto $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = h^2(1 - \omega_\infty^2)$, $\forall x \in [q, +\infty)$.

mette la rappresentazione asintotica (1.9), dove $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta_i(x, \gamma) = 0$, $i = 1, 2$, da $z_2(\xi_n) = 0$ si ottiene

$$(2.19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\sqrt{1 - \omega_\infty^2} \xi_n + \gamma - \arcsin \omega_\infty) = 0$$

e quindi con facili calcoli che

$$(2.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_1(\xi_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ |h| \cdot |\sin(\sqrt{1 - \omega_\infty^2} \xi_n + \gamma)| \} = |h| \sqrt{1 - \omega_\infty^2}.$$

OSSERVAZIONE 1. Si noti che, nell'ipotesi aggiuntiva $\omega \in C^0([0, +\infty))$ che garantisce la continuità di $L'(x)$, $\alpha_1(x)$ si potrebbe anche ottenere dalla funzione di Liapunov in senso classico ⁽⁵⁾

$$(2.21) \quad V_1(x, z_1, z_2) = \exp[L(x)](z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2).$$

In tal caso la (2.11'), posto $\lambda_i = z_i$, e pensata funzione di (x, z_1, z_2) , coinciderebbe ovviamente con

$$(2.22) \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial z_1}(-\omega(x)z_1 + z_2) + \frac{\partial V_1}{\partial z_2}(-z_1 + \omega(x)z_2).$$

In senso più largo si potrebbe pensare come funzione di Liapunov anche

$$V_2(x, z_1, z_2) = \exp[-L(x)](z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2)$$

dalla quale si otterrebbe $\alpha_2(x)$. Infatti per $\omega \in C^0([0, +\infty))$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial z_1}(-\omega(x)z_1 + z_2) + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}(-z_1 + \omega(x)z_2)$$

risulta semidefinita positiva in $[0, +\infty) \times R \times R$.

⁽⁵⁾ Per la definizione si può vedere ad esempio W. Hahn [4] sez. 4. Più larga appare la definizione di L. Cesari [3] nella quale non si fanno ipotesi sul fatto che (2.22) sia semidefinita negativa.

3. Comportamento asintotico di certe successioni di massimi di $|z_1(x)|$, $|z_2(x)|$.

Prendiamo ora in considerazione il sistema (1.2) $dz/dx = C(x)z$ che, usando la usuale notazione $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$, si può scrivere

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = -\omega(x)z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = -z_1 + \omega(x)z_2 \end{cases}$$

dove ω è data da (1.4). Supponiamo che valga l'ipotesi H_1 e che inoltre $\omega \in C^0([0, +\infty))$. Come è stato ricordato nel paragrafo 1, il sistema (3.1) risulta oscillante come il sistema (2.1). Le soluzioni dei due sistemi (2.1), (3.1) si corrispondono mediante (2.7) e la successione degli zeri di $z_i(x)$ coincide con quella di $\tilde{z}_i(x)$. Siano allora, in accordo con le notazioni introdotte nel teorema 1, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$ (componenti di una soluzione non banale di (3.1)). Osserviamo che invece gli zeri di $z'_i(x)$, $\tilde{z}'_i(x)$ non si corrispondono anzi gli zeri di $z'_i(x)$ possono non essere un insieme numerabile nè in $[0, +\infty)$ nè in alcuna semiretta $[a, +\infty)$. (Si veda l'esempio del paragrafo 4). Inoltre fra due zeri consecutivi x_n, x_{n+1} di $z_1(x)$ ci possono essere più massimi relativi di $|z_1(x)|$. Consideriamo allora il massimo assoluto di $|z_1(x)|$ in $[x_n, x_{n+1}]$; esso viene assunto in almeno un punto appartenente a $]x_n, x_{n+1}[$, nel quale punto ovviamente si ha $z'_1(x) = 0$. Nel caso che ci sia più di un punto nel quale il massimo assoluto di $|z_1(x)|$ in $[x_n, x_{n+1}]$ viene assunto scelto (*) il punto \bar{x}_n che ha la distanza minima da x_n . Si può così costruire la successione $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associata alla successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ottenendo la successione dei massimi assoluti di $|z_1(x)|$ in $[x_n, x_{n+1}]$. Analogamente si può costruire la successione $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associata a $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ottenendo quella dei massimi assoluti di $|z_2(x)|$ in $[\xi_n, \xi_{n+1}]$. Vale allora il seguente teorema.

TEOREMA 2. Valga l'ipotesi H_1 e si abbia inoltre $\omega \in C^0([0, +\infty))$. Sia $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ una soluzione non banale di (3.1), dotata

(*) Ovviamente \bar{x}_n esiste perchè l'insieme di tali punti è chiuso, vista la continuità di $|z_1(x)|$. La scelta non è priva di significato perchè, come si vede dall'esempio del paragrafo 4, l'insieme di questi punti può avere cardinale c .

della rappresentazione asintotica (1.9), siano $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$ e $\{|z_1(\bar{x}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|z_2(\bar{\xi}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ le corrispondenti successioni dei massimi assoluti di $|z_1(x)|$, $|z_2(x)|$ rispettivamente in $[x_n, x_{n+1}]$, $[\xi_n, \xi_{n+1}]$, dove $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono state sopra definite.

Valgono allora le seguenti formule asintotiche con maggiorazione del resto:

$$(3.2) \quad |(1 + \omega^2(\bar{x}_n) - 2\omega_\infty \omega(\bar{x}_n))^{\frac{1}{2}} \cdot |z_1(\bar{x}_n)| - b| \leq b(\exp [L(\bar{x}_n)/2] - 1)$$

$$(3.3) \quad |(1 + \omega^2(\bar{\xi}_n) - 2\omega_\infty \omega(\bar{\xi}_n))^{\frac{1}{2}} \cdot |z_2(\bar{\xi}_n)| - b| \leq b(\exp [L(\bar{\xi}_n)/2] - 1)$$

$$(3.4) \quad ||z'_1(x_n)| - b| \leq b(\exp [L(x_n)/2] - 1)$$

$$(3.5) \quad ||z'_2(\xi_n)| - b| \leq b(\exp [L(\xi_n)/2] - 1)$$

dove $L(x)$ e b sono definite da (2.6).

DIMOSTRAZIONE. In corrispondenza alla soluzione non banale $(z_i(x))$ $i = 1, 2$ del sistema (3.1), dotata della rappresentazione asintotica (1.9), consideriamo nuovamente le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definite da (2.8), (2.9); avendo supposto $\omega \in C^0([0, +\infty))$, si possono $\forall x \in [0, +\infty)$ rappresentare $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ mediante $z_1(x)$, $z'_1(x)$ oppure mediante $z_2(x)$, $z'_2(x)$. Otteniamo così

$$(3.6) \quad \alpha_1(x) = \exp [L(x)] \{ [1 - 2\omega_\infty \omega(x) + \omega^2(x)] z_1^2(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty) z_1(x) z'_1(x) + (z'_1(x))^2 \},$$

$$(3.7) \quad \alpha_2(x) = \exp [-L(x)] \{ [1 - 2\omega_\infty \omega(x) + \omega^2(x)] z_2^2(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty) z_2(x) z'_2(x) + (z'_2(x))^2 \}$$

ed analogamente

$$(3.8) \quad \alpha_1(x) \exp [-L(x)] = \alpha_2(x) \exp [L(x)] = [1 - 2\omega_\infty \omega(x) + \omega^2(x)] z_2^2(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty) z_2(x) z'_2(x) + (z'_2(x))^2.$$

Il cambiamento di rappresentazione di $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ non ne altera la monotonia di verso opposto in $[0, +\infty)$ nè la proprietà che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Ne segue pertanto

$$\alpha_1(x) \geq b^2 \geq \alpha_2(x)$$

con b data da (2.6). Se ne deducono in modo perfettamente analogo a quello usato nel teorema 1 le formule (3.2), (3.3), (3.4), (3.5).

4. Comportamento asintotico di certe successioni di massimi di $|y_1(t)|$, $|y_2(t)|$.

Sia $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_i(t))$ $i = 1, 2$ una soluzione non banale di (1.7) $d\tilde{y}/dt = \tilde{A}(t)\tilde{y}$ e siano $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $\tilde{y}_1(t)$, $\tilde{y}_2(t)$ corrispondenti mediante (1.3) $t = \psi(x)$ alle successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ degli zeri di $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$, dove $\tilde{z}_i(x) = \tilde{y}_i(\psi(x))$ $i = 1, 2$ e $(\tilde{z}_i(x))$ è soluzione di (1.8). Considerata la soluzione $y(t) = (y_i(t))$ $i = 1, 2$ del sistema (1.1), corrispondente mediante (1.5) $y = T_1(t)\tilde{y}$ alla soluzione $\tilde{y}(t)$ di (1.7), allora $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulteranno anche le successioni degli zeri di $y_1(t)$, $y_2(t)$. Invece gli zeri di $d\tilde{y}_i/dt$ ($i = 1, 2$) non coincideranno con quelli di dy_i/dt anzi questi ultimi potranno anche non costituire una successione. Costruiamo allora le successioni $\{\bar{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo 3 per le successioni $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Vale allora il seguente teorema.

TEOREMA 3. Valgono le ipotesi I_1 , I_2 , I_3 ed inoltre si abbia a_{11} , $a_{22} \in C^0([0, +\infty))$; sia $y(t) = (y_i(t))$ una soluzione non banale di (1.1), siano $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $y_1(t)$, $y_2(t)$ e siano $\{|y_1(\bar{t}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|y_2(\bar{\tau}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ le associate successioni dei massimi assoluti di $|y_1(t)|$, $|y_2(t)|$ rispettivamente in $[t_n, t_{n+1}]$, $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, le successioni $\{\bar{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ essendo state definite nel modo sopra detto. Diciamo $z(x)$ la soluzione di (1.2), corrispondente di $y(t)$ mediante (1.5), (1.3), (1.6) e dotata della rappresentazione asintotica (1.9). Valgono allora le seguenti formule asintotiche:

$$(4.1) \quad \left| \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}_n} [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(\frac{-a_{12}(\bar{t}_n)}{a_{21}(\bar{t}_n)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \cdot \left[1 + \frac{2\omega_\infty a_{11}(\bar{t}_n)}{\varphi'(\bar{t}_n)} + \frac{a_{11}^2(\bar{t}_n)}{(\varphi'(\bar{t}_n))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |y_1(\bar{t}_n)| - b \right| < b \left(\exp [L(\varphi(\bar{t}_n))/2] - 1 \right),$$

$$(4.2) \quad \left| \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\bar{\tau}_n} [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(-\frac{a_{12}(\bar{\tau}_n)}{a_{21}(\bar{\tau}_n)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{2\omega_\infty a_{22}(\bar{\tau}_n)}{\varphi'(\bar{\tau}_n)} + \frac{a_{22}^2(\bar{\tau}_n)}{(\varphi'(\bar{\tau}_n))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |y_2(\bar{\tau}_n)| - b \right| \leq b \left(\exp [L(\varphi(\bar{\tau}_n))/2] - 1 \right)$$

con $\varphi(t)$ data da (1.3) e $L(x)$, b da (2.6).

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per $y(t)$ e $z(x)$ soluzioni corrispondenti mediante (1.5), (1.3), (1.6) dei sistemi (1.1) e (1.2) valgono le formule

$$\begin{cases} z_1(\varphi(t)) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot y_1(t) \\ z_2(\varphi(t)) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y_2(t) \end{cases}$$

con $\varphi(t)$ data da (1.3). In corrispondenza a questa soluzione $z(x) = (z_i(x))$, dotata della rappresentazione asintotica (1.9), consideriamo nuovamente le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definite da (2.8), (2.9). Otterremo per la corrispondente soluzione $(y_i(t))$ di (1.1) le funzioni

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi(t)) \exp [-L(\varphi(t))] &= \alpha_2(\varphi(t)) \exp [L(\varphi(t))] = \\ &= \exp \left[-\int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{-\frac{1}{2}} y_1^2(t) - 2\omega_\infty y_1(t) y_2(t) + \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{\frac{1}{2}} y_2^2(t) \right\}. \end{aligned}$$

Le funzioni $\alpha_1(\varphi(t))$, $\alpha_2(\varphi(t))$ conservano la monotonia di verso opposto in $[0, +\infty)$ e la proprietà che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1(\varphi(t))}{\alpha_2(\varphi(t))} = 1.$$

Avendo supposto $a_{11}, a_{22} \in C^0([0, +\infty))$ e che valgono I_1, I_2, I_3 , si

ha per ogni $t \in [0, +\infty)$

$$y_2(t) = \frac{y_1'(t) - a_{11}y_1(t)}{a_{12}(t)}, \quad y_1(t) = \frac{y_2'(t) - a_{22}y_2(t)}{a_{21}(t)}.$$

Ne segue la possibilità di rappresentare $\alpha_1(\varphi(t))$, $\alpha_2(\varphi(t))$ mediante $y_1(t)$, $y_1'(t)$ oppure mediante $y_2(t)$, $y_2'(t)$ e di dedurne nello stesso modo usato nel teorema 2 le (4.1), (4.2).

5. Esempi.

Nell'esempio che segue si introduce una funzione ω , soddisfacente alle ipotesi del teorema 2, tale che il sistema

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = -\omega(x)z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = -z_1 + \omega(x)z_2 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $(\bar{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ in cui l'insieme degli zeri di $d\bar{z}_1/dx$ abbia cardinale c in ogni semiretta contenuta in $[0, +\infty)$. Sia ω data da

$$(5.1) \quad \omega(x) = \begin{cases} \text{th}(\gamma_n - x) & x \in [\alpha_n, \beta_n] \\ \text{th}(\gamma_n - \beta_n) & x \in [\beta_n, \alpha_{n+1}] \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dove

$$(5.2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \alpha_n = \pi \sum_{k=2}^n \text{ch} \left(\frac{1}{2^{k-1}} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) & (n = 2, 3, \dots) \\ \beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2^n} & \gamma_n = \alpha_n + \frac{1}{2^{n-1}} & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

e di conseguenza $\gamma_n - \beta_n = 1/2^n$ per $n = 1, 2, \dots$. La definizione (5.1) è ben posta perchè si ha

$$(5.3) \quad \omega(\alpha_{n+1}) = \text{th}(\gamma_n - \beta_n) = \text{th}(\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1})$$

ed ω risulta positiva, continua, decrescente in $[0, +\infty)$, infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Risulta anche chiaramente che $\omega \in L([0, +\infty))$ infatti, viste le proprietà di ω , è sufficiente osservare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \omega(x) dx$$

è convergente avendosi

$$(5.4) \quad \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \omega(x) dx < \operatorname{th}(\gamma_n - \alpha_n) \cdot (\beta_n - \alpha_n) < \frac{1}{2^{2n-1}},$$

$$(5.5) \quad \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \omega(x) dx = \operatorname{th}\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot (\alpha_{n+1} - \beta_n) = \pi \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Valgono quindi le ipotesi del teorema 2 con $\omega_\infty = 0$. Una soluzione del sistema considerato definita in $[0, +\infty)$ è data allora da (*) $\bar{z}(x) = (\bar{z}_i(x))$ dove

$$(5.6) \quad \begin{cases} \bar{z}_1(x) = (-1)^{n-1} \\ \bar{z}_2(x) = (-1)^{n-1} \omega(x) \end{cases} \quad x \in [\alpha_n, \beta_n] \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(5.7) \quad \begin{cases} \bar{z}_1(x) = (-1)^{n-1} \cos[\sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)}(x - \beta_n)] \\ \bar{z}_2(x) = (-1)^n \sin[\sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)}(x - \beta_n) - \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n)] \end{cases} \quad x \in [\beta_n, \alpha_{n+1}].$$

Come previsto gli zeri di $\bar{z}_1(x)$, $\bar{z}_2(x)$ sono isolati e si separano mutua-

(*) Per verificare facilmente che $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in C^1([0, +\infty))$ si ricordi che

$$\alpha_{n+1} - \beta_n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)}} = \pi \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad \gamma_n - \beta_n = \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}.$$

mente. Essi sono dati rispettivamente da (*)

$$(5.8) \quad x_n = \beta_n + \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2^n} \right) \quad \xi_n = \beta_n + \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2^n} \right) \operatorname{arcsin} \left(\operatorname{th} \frac{1}{2^n} \right)$$

($n = 1, 2, \dots$)

e si ha $\beta_n < \xi_n < x_n < \alpha_{n+1}$.

Gli zeri di $d\bar{z}_1/dx$ sono dati da tutti i punti degli intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ ($n = 1, 2, \dots$), quelli di $d\bar{z}_2/dx$ formano una successione e sono

$$(5.9) \quad \xi'_n = \beta_n + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2^n} \right) \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsin} \left(\operatorname{th} \frac{1}{2^n} \right) \right].$$

Si ha $\xi_n < \xi'_n < \alpha_{n+1}$.

Applichiamo alla soluzione trovata le formule asintotiche previste dal teorema 2. Le successioni $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ivi considerate restano in questo esempio individuate dalle

$$\bar{x}_n = \alpha_{n+1} \quad \bar{\xi}_n = \xi'_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e le formule (3.2), (3.3) diventano

$$(5.10) \quad |\sqrt{1 + \omega^2(\alpha_{n+1})} |\bar{z}_1(\alpha_{n+1})| - 1| \leq \exp [L(\alpha_{n+1})/2] - 1$$

$$(5.11) \quad |\sqrt{1 + \omega^2(\xi'_n)} |\bar{z}_2(\xi'_n)| - 1| \leq \exp [L(\xi'_n)/2] - 1.$$

Poichè $|\bar{z}_1(\alpha_{n+1})| = |\bar{z}_2(\xi'_n)| = 1$ si ha

$$\omega^2(\alpha_{n+1}) \leq \exp [L(\alpha_{n+1})] - 1, \quad \omega^2(\xi'_n) \leq \exp [L(\xi'_n)] - 1.$$

(*) Si osservi che per $x \in [\beta_n, \alpha_{n+1}]$ si ha

$$- \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n) \leq \sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)} (x - \beta_n) - \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n) \leq \pi - \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n)$$

dove

$$0 < \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n) < \frac{\pi}{2}.$$

Usando (5.4), (5.5) e con facili calcoli si trova

$$\exp [L(\alpha_{n+1})] - 1 = \exp \left[2 \int_{\alpha_{n+1}}^{+\infty} \omega(s) ds \right] - 1 = \frac{\pi}{2^{n-1}} + O \left(\frac{1}{2^{2n}} \right),$$

$$\exp [L(\xi'_n)] - 1 = \exp \left[2 \int_{\xi'_n}^{+\infty} \omega(s) ds \right] - 1 = \frac{3\pi}{2^n} + O \left(\frac{1}{2^{2n}} \right),$$

$$\omega^2(\alpha_{n+1}) = \omega^2(\xi'_n) = \operatorname{th}^2 \left(\frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^{2n}} + O \left(\frac{1}{2^{4n}} \right).$$

In questo esempio il resto effettivo è di ordine inferiore a quello previsto dal teorema 2.

ESEMPIO 2°. Il resto previsto dalle formule (3.2), (3.3) non è in generale migliorabile. Consideriamo il sistema (3.1) con $\omega(x) = \exp [-x]$, già studiato in [2]. Le equazioni differenziali del 2° ordine a cui soddisfano $z_1(x)$, $z_2(x)$, componenti di una soluzione $z(x) = (z_i(x))$ di (3.1), si possono ottenere da una trasformazione di una equazione di Whittaker; come si è visto in [2] le soluzioni si possono rappresentare con serie di funzioni analitiche.

Consideriamo in particolare la soluzione $(\bar{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ rappresentata dagli sviluppi in serie (di cui riportiamo soltanto i primi termini)

$$\begin{cases} \bar{z}_1(x) = \sin x + \frac{1}{3} \exp [-x] (2 \cos x + \sin x) + O(\exp [-2x]) \\ \bar{z}_2(x) = \cos x + \frac{1}{3} \exp [-x] (2 \sin x - \cos x) + O(\exp [-2x]). \end{cases}$$

Detti \bar{x}_n gli zeri di $\bar{z}'_1(x)$, $\bar{\xi}_n$ quelli di $\bar{z}'_2(x)$ su una semiretta conveniente, dove gli zeri di $\bar{z}_1(x)$, $\bar{z}_2(x)$ separano rispettivamente gli zeri di $\bar{z}'_1(x)$, $\bar{z}'_2(x)$, si trova

$$\begin{aligned} |\bar{z}_1(\bar{x}_n)| &= 1 + \frac{1}{3} \exp [-\bar{x}_n] + O(\exp [-2\bar{x}_n]), \\ |\bar{z}_2(\bar{\xi}_n)| &= 1 - \frac{1}{3} \exp [-\bar{\xi}_n] + O(\exp [-2\bar{\xi}_n]); \end{aligned}$$

ne seguono le valutazioni

$$\begin{aligned} |\sqrt{1 + \omega^2(\bar{x}_n)} |\bar{z}_1(\bar{x}_n)| - 1| &\sim \frac{1}{3} \exp [-\bar{x}_n] \\ |\sqrt{1 + \omega^2(\bar{\xi}_n)} |\bar{z}_2(\bar{\xi}_n)| - 1| &\sim \frac{1}{3} \exp [-\bar{\xi}_n] \end{aligned}$$

mentre si ha

$$\exp \left[\int_{\bar{x}_n}^{+\infty} \omega(s) ds \right] - 1 \sim \exp [-\bar{x}_n], \quad \exp \left[\int_{\bar{\xi}_n}^{+\infty} \omega(s) ds \right] - 1 \sim \exp [-\bar{\xi}_n].$$

L'ordine di grandezza della maggiorazione dell'errore prevista da (3.2), (3.3) coincide in questo caso con la valutazione asintotica dell'errore stesso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BARTUSEK, *Properties of oscillating solutions of two-dimensional differential systems*, Proceedings of the I. N. Vekna Institute of Applied Mathematics, **8**, pp. 5-12.
- [2] A. M. BRESQUAR, *Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$, con $A(t)$ matrice 2×2 , nel caso oscillante*, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **74** (1985).
- [3] L. CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin, 1963.
- [4] W. HAHN, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, Prentice-Hall, 1963.
- [5] E. HEIL, *Oscillatory and nonoscillatory systems of two first order linear differential equations*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **30**, North-Holland, 1981.
- [6] W. T. REID, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Springer, New York, 1980.
- [7] U. RICHARD, *Sulla risoluzione asintotico-numerica dell'equazione differenziale $(py)' + qy = 0$ nel caso oscillante*, Atti Accad. Sci. Torino, **97** (1962-63), pp. 857-890.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 ottobre 1984.