RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BIANCA ROSA BELLOMO

# Una classe di soluzioni asintotiche per una equazione ellittica degenere

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 75 (1986), p. 111-127

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__111_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 76 (1986)

# Una classe di soluzioni asintotiche per una equazione ellittica degenere.

BIANCA ROSA BELLOMO

## 1. Introduzione.

In questo lavoro si considera una classe di operatori ellittici degeneri, in un semispazio ($t > 0$) dati da

$$P(t, x, D_t, D_x) = tP_2(t, x, D_t, D_x) + P_1(t, x, D_t, D_x)$$

dove $P_2$ è un operatore differenziale propriamente ellittico del secondo ordine e coefficienti reali $C^\infty(t > 0, x \in R^n)$ e $P_1$ è un operatore del primo ordine a coefficienti $C^\infty$.

Scopo del lavoro è di costruire esplicitamente una funzione $E(t, x)$ tale che

$$PE(t, x) \in C^\infty(]0, T[ \times R^n_x)$$

e di calcolare esplicitamente il comportamento di $E$ per $t \to 0+$.

Osserviamo che la regolarità di soluzioni di equazioni del tipo $Pu = f$, $f$ appartenente ad un conveniente spazio di Sobolov con peso, è stata studiata da vari autori; citiamo qui P. Bolley-J. Camus [2], [3], M.S. Baouendi-C. Goulaouic [1], G. Goulaouic-N. Shimakura [5], quest'ultimo per il caso a coefficienti Hölderiani.

Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Più precisamente l'operatore considerato è della forma

$$(1.1)\qquad P = t\Big[\partial_t^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(t,x)\,\partial_{x_j}\partial_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big] + \\ + \alpha(t,x)\,\partial_t + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\,\partial_{x_j} + c(t,x)\,,$$

dove si suppone che

$$(1.2)\qquad A(t,x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\xi_i\xi_j \geqslant C|\xi|^2\,.$$

Nel § 2 si stabiliscono alcune notazioni usate nel seguito.

Nel § 3 si descrive il metodo impiegato per costruire formalmente la soluzione.

Nei §§ 4 e 5 si risolvono le equazioni di trasporto così ottenute e si dà un teorema di andamento asintotico di tali soluzioni.

Nel § 6 si dà senso a quanto fatto precedentemente.

## 2. Notazioni ed osservazioni preliminari.

Sia $O^m$, $m \in R$, l'insieme delle funzioni $g(x,\xi) \in C^\infty(R^n_x \times R^n_\xi)$ tale che $g(x,\lambda\xi) = \lambda^m g(x,\xi)$, $\lambda > 0$.

Sia $\psi^m$, $m \in R$, l'insieme delle funzioni $f(t,x,\xi) \in C^\infty(R^+_t \times R^n_x \times R^n_\xi)$ tali che $f(t/\lambda, x, \lambda\xi) = \lambda^m f(t,x,\xi)$, $\lambda > 0$.

Osserviamo che gli operatori $\partial_t$, $t\cdot$, $g\cdot$, con $g \in O^k$, si comportano nel modo seguente

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \partial_t\colon \psi^m \to \psi^{m+1} \\ \quad :\ \psi^m \to \psi^{m+1} \\ O^k_\times \psi^m \in (g,f) \to gf \in \psi^{m+k} \end{cases}$$

Riferendoci all'operatore (1.1) poniamo

$$(2.2)\qquad \begin{cases} A_0(t,x,\xi) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(t,x)\,\xi_j \\ A(t,x,\xi) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\xi_i\xi_j \\ B(t,x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\,\xi_j \\ M(t,x,\xi,\partial_x) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\xi_i\,\partial_{x_j} \end{cases}$$

$$(2.3)\qquad \begin{cases} a_{0j}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, a_{0j}(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant n \\ A_{0k}(x,\partial_x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}(x)\,\partial_{x_j} \\ A_{0k}(x,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}(x)\,\xi_j \end{cases}$$

$$(2.4)\qquad \begin{cases} a_{ij}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, a_{ij}(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n \\ A_k(x,\partial_x) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j} \\ A_k(x,\xi) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}^{k}(x)\,\xi_i\xi_j \\ M_k(x,\xi,\partial_x) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}^{k}(x)\,\xi_i\,\partial_{x_j} \end{cases}$$

$$(2.5)\qquad \begin{cases} b_{j}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, b_{j}(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant n \\ B_k(x,\partial_x) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{j}^{(k)}(x)\,\partial_{x_j} \\ B_k(x,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{j}^{(k)}(x)\,\xi_j \end{cases}$$

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \alpha_k(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, \alpha(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0 \\ c_k(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, c(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0\,. \end{cases}$$

Sia inoltre

$$(2.7)\qquad D(x,\xi) = \sqrt{A_0(x,\xi) - A_{00}^2(x,\xi)}\,.$$

Osserviamo che per la (1.2) $D$ è reale.

## 3. Parametrice formale.

Consideriamo, dunque, l'operatore P; cerchiamo di risolvere

$$Pu = 0, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

mediante un operatore

$$E(t, x) = \int \exp[ix\xi] q(t, x, \xi) d\!\!{}^-\xi, \qquad d\!\!{}^-\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

essendo $q$ una certa ampiezza da determinare.

Applichiamo $P$ ad $E$, otteniamo:

$$PE(t, x) = \int \exp[ix\xi] \tilde{q}(t, x, \xi) d\!\!{}^-\xi$$

essendo $\tilde{q}(t, x, \xi) = \exp[-ix\xi]\, P(\exp[ix\xi] q(t, x, \xi))$. Si cerca quindi di scegliere $q(t, x, \xi)$ decrescente in modo esponenziale per $|\xi| \to \infty$, $t > 0$ e tale che $\tilde{q}(t, x, \xi) = 0$.

Osservando che

$$\partial_t(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] \partial_t q ,$$

$$\partial_t^2(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] \partial_t^2 q$$

$$\partial_{x_j}(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi]\, (i\xi_j q + \partial_{x_j} q) ,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix] (-\xi_i \xi_j q + i\xi_j \partial_{x_i} + i\xi_i \partial_{x_j} q + \partial_{x_i}\partial_{x_j} q)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t, x, \xi) = {} & [t\partial_t^2 + itA_0(t, x, \xi)\partial_t + tA_0(t, x, \partial_x)\partial_t - \\ & - tA(t, x, \xi) + 2itM(t, x, \xi, \partial_x) + tA(t, x, \partial_x) + \alpha(t, x)\partial_t + \\ & + iB(t, x, \xi) + B(t, x, \partial_x) + c(t, x)] q(t, x, \xi) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cerchiamo $q$ nella forma

$$(3.3)\qquad \begin{cases} q(t, x, \xi) \sim \sum_{j\geq 0} q_{-j}(t, x, \xi) \\ q_{-j} \in \psi^{-j}, \quad j \geq 0 \end{cases}$$

dove il significato di $q \sim \sum_{j\geq 0} q_{-j}$ verrà opportunamente precisato. Utilizzando le (2.2)-(2.6), scriviamo formalmente

$$A(t, x, \partial_x) = \sum_{k\geq 0} t^k A_k(x, \partial_x), \qquad A(t, x, \xi) = \sum_{k\geq 0} t^k A_k(x, \xi),$$

$$A_0(t, x, \partial_x) = \sum_{k\geq 0} t^k A_{0k}(x, \partial_x), \qquad A_0(t, x, \xi) = \sum_{k\geq 0} t^k A_{0k}(x, \xi),$$

$$B(t, x, \partial_x) = \sum_{k\geq 0} t^k B_k(x, \partial_x), \qquad B(t, x, \xi) = \sum_{k\geq 0} t^k B_k(x, \xi),$$

$$M(t, x, \xi, \partial_x) = \sum_{k\geq 0} t^k M_k(x, \xi, \partial_x), \qquad \alpha(t, x) = \sum_{k\geq 0} t^k \alpha_k(x),$$

$$c(t, x) = \sum_{k\geq 0} t^k c_k(x).$$

Raggruppiamo ora, in (3.2) i termini di omogeneità corrispondente; veniamo così a definire i seguenti operatori:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} L_1 = t\partial_t^2 + (2itA_{00}(x, \xi) + \alpha_0(x))\,\partial_t - tA_0(x, \xi) + iB_0(x, \xi) \\ L_{-k} = 2it^{k+2} A_{0,k+1}(x, \xi)\,\partial_t + 2it^{k+1} A_{0,k}(x, \partial_x)\,\partial_t - \\ \qquad - t^{k+2} A_{k+1}(x, \xi) + 2it^{k+1} M_k(x, \xi, \partial_x) + \\ \qquad + H(k)\, t^k A_{k-1}(x, \partial_x) + t^{k+1} \alpha_{k+1}(x)\,\partial_t + \\ \qquad + it^{k+1} B_{k+1}(x, \xi) + t^k B_k(x, \partial_x) + t^k c_k(x) \end{cases}$$

essendo $H(0) = 0$, $H(k) = 1$ se $k > 0$.

Osserviamo che per ogni $m \in R$ si ha

$$L_1 : \psi^m \to \psi^{m+1}, \qquad L_{-k} : \psi^m \to \psi^{m-k}.$$

Tenendo conto di (3.4) formalmente si può scrivere

$$\tilde{q}(t, x, \xi) = L_1 q + \sum_{k\geq 0} L_{-k} q\,.$$

Scrivendo $q \sim \sum_{j\geq 0} q_{-j}$ con $q_{-j} \in \psi^{-j}$, si ottiene, raggruppando i termini di uguale omogeneità

$$\tilde{q}(t, x, \xi) = L_1 q_0 + (L_1 q_{-1} + L_0 q_0) + \\ + (L_1 q_{-2} + L_0 q_{-1} + L_{-1} q_0) + \ldots = \sum_{j\geq 0} Q_{-j}$$

essendo

$$Q_{-j} = \sum_{k=0}^{j} L_{1-j} q_{k-j}\,. \tag{3.5}$$

Per avere $\tilde{q}(t, x, \xi) = 0$ arriviamo alle seguenti equazioni di trasporto

$$\begin{cases} L_1 q_0 = 0\,, & t > 0 \\ L_1 q_{-j} = -\sum_{k=1}^{j} L_{1-k} q_{k-j}\,, & t > 0,\ j \geq 1\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

## 4. Soluzione dell'equazione $L_1 q_0 = 0$.

Risolviamo dunque la prima equazione di trasporto.

Mediante opportune trasformazioni e cambiamenti di variabile, si riconduce l'equazione data ad una equazione ipergeometrica confluente dipendente dai parametri $(x, \xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$. Allo scopo poniamo

$$q_0(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_0(t, x, \xi)$$

essendo $D$ definito dalla (2.7).

L'equazione

$$\exp[itA_{00} + tD]\, L_1[\exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_0(t, x, \xi)] = 0 \tag{4.1}$$

diventa

$$[t\partial_t^2 + (\alpha_0 - 2tD)\,\partial_t + (-i\alpha_0 A_{00} - D\alpha_0 + iB_0]\hat{q}_0(t, x, \xi) = 0\,.$$

Ponendo inoltre $2tD = z$, si arriva all'equazione

$$2D[z\partial_z^2 + (\alpha_0 - z)\partial_z - (\alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0))/2D]\hat{q}_0(z, x, \xi) = 0\ ,$$

da cui

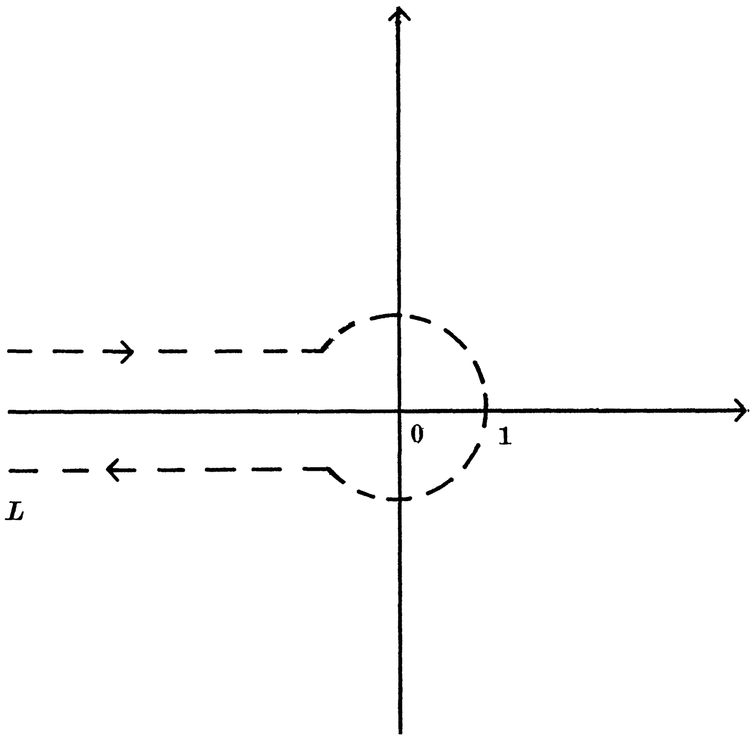
$$[z\partial_z^2 + (\alpha_0 - z)\partial_z - (\alpha/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0))/2D]\hat{q}_0(z, x, \xi) = 0\ . \tag{4.2}$$

Tale equazione è una equazione ipergeometrica confluente di parametri $b = \alpha_0$, $a = \alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0)/2D$.

Dato il tipo richiesto di comportamento all'infinito, scegliamo quella soluzione, tra le due linearmente indipendenti che tale equazione ammette, che in [7] viene indicata con $\psi(a, b, z)$ e che ha la seguente rappresentazione integrale

$$\psi(a, b, z) = \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}đ\sigma \tag{4.3}$$

essendo $đ\sigma = (2\pi)^{-n}d\sigma$, ed essendo $L$ un contorno del tipo



Da tale rappresentazione ricaviamo, per $a$, la seguente restrizione: $a \neq n$, per ogni $n \in N$.

## 5. Soluzione delle altre equazioni di trasporto.

La $(l+1)$-sima equazione di trasporto ha la forma seguente

$$L_1 q_{-(l+1)} = -\sum_{k=0}^{l} L_{-k} q_{k-1} . \tag{5.1}$$

Operiamo ancora la trasformazione

$$\exp[itA_{00} + tD] L_1 \exp[-itA_{00} - tD] \hat{q}_{-(l+1)} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{l} \exp[itA_{00} + tD] L_{-k} \exp[-itA_{00} - tD] \hat{q}_{k-l}$$

otteniamo

$$t\partial_t^2 + (\alpha - 2tD)\partial_t + (-i\alpha_0 A_{00} + D\alpha_0 + iB_0)\hat{q}_{-(l+1)} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{l} (L_{-k} + M_{-k})\hat{q}_{k-l}$$

essendo

$$M_{k-} = t^{k+2}\Big[2i\varphi \sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k+1)}\xi_j - 2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi_j\partial_t +$$
$$+ 2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi\varphi_j - 2i\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\xi_i\varphi_j + H(k)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k-1)}\varphi_i\varphi_j\Big] +$$
$$+ t^{k+1}\Big[-2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi_j - 2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi\partial_{x_j} -$$
$$- H(k)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k-1)}\varphi_{ij} - H(k)\sum_{i,j=1} a_{ij}^{(k-1)}(\varphi_j\partial_{x_i} + \varphi_i\partial_{x_j}) - \alpha_{k+1}\varphi - \sum_{j=1}^{n} b_j\varphi_j\Big]$$

ove si è posto $\varphi = iA_{00} + D$, $\varphi_j = \partial_{x_j}\varphi$.

Con il cambiamento di variabile $2tD = z$ si ottiene

$$(5.2) \qquad [z\partial_z^2 + (b-z)\partial_z - a]\hat{q}_{-(l+1)} = -\frac{1}{2D}\left[\sum_{k=0}^{l}(L_{-k} + M_{-k})\hat{q}_{-l}\right]$$

dove $a$ e $b$ sono definiti come nel § 4.

Indicando genericamente con $\varrho_{-(k+1)}(x, \xi)$ una funzione di omogeneità $-(k+1)$ in $\xi$, siamo indotti a dover risolvere equazioni del tipo

$$(5.3) \qquad [z\partial_z^2 + (b-z)\partial_z - a]\,\hat{q}_{-(l+1)} = \sum_{k=0}^{l} A_k \hat{q}_{k-l}$$

essendo $A_k$ uno degli operatori seguenti

$$(5.4) \qquad \begin{cases} (a) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+2}\partial_z \\ (b) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1}\partial_{x_j}\partial_z \\ (c) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+2} \\ (d) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1}\partial_{x_j} \\ (e) & \varrho_{-(k+1)} z^{k}\partial_{x_i}\partial_{x_j} \\ (f) & \varrho_{-(k+1)} z^{k}\partial_{x_i}\partial_{x_j} \\ (g) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1} \\ (h) & \varrho_{-(k+1)} z^{k}\partial_{x_j} \\ (i) & \varrho_{-(k+1)} z^{k} \end{cases}$$

Siano ora $S_0$ e $\hat{S}_0$ i seguenti insiemi

$$(5.5) \qquad \begin{cases} S_0 = \{\sigma,\ \sigma\in C,\ |\mathrm{Im}\,\sigma| < 2,\ \sigma\neq 0,\ \sigma\neq 1,\ \sigma\neq x,\ x\in R,\ x\leqslant 0\} \\ \hat{S}_0 = \{\sigma,\ \sigma\in C,\ |\mathrm{Im}\,\sigma| < 2,\ \sigma\neq 0,\ \sigma\neq 1\}\,. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.5. Con $\mathcal{A}_{-k,j_1,j_2}$, $k, j_1, j_2 \in Z_+$, indichiamo l'insieme delle funzioni

$$\psi(\sigma, x, \xi) \in C^\infty(S_0 \times R^n_x \times \dot{R}^n_\xi)$$

tali che

1) $\psi(\sigma, x, \lambda\xi) = \lambda^{-k}\psi(\sigma, x, \xi)$, $\lambda > 0$ .

2) Per ogni $\alpha$, $\beta \in (Z_+)^n$, si può scrivere $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\sigma, x, \xi)$ nella forma seguente

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\sigma, x, \xi) = \sum_{l_1=0}^{m_1^{\alpha\beta}} \sum_{l_2=0}^{m_2^{\alpha\beta}} \psi_{l_1 l_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)(\log\sigma)^{l_1} \left(\log(1-\sigma)\right)^{l_2}$$

$m_1^{\alpha\beta}$, $m_2^{\alpha\beta} \in Z_+$, essendo $\psi_{l_1 l_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)$ olomorfe in $\hat{S}_0$ con polo di ordine $j_1$ al più in $\sigma = 0$ e $j_2$ al più in $\sigma = 1$.

3) Per ogni insieme $\Omega$ tale che $\Omega \subset\subset R_x^n$, e per ogni $\delta \in ]0, 1[$ vale la stima

$$\sup_{\substack{(x,\xi)\in\Omega\times S^{n-1} \\ |\mathrm{Im}\,\sigma|\leqslant 1-\delta \\ |\mathrm{Re}\,\sigma|>1}} |\mathrm{Re}\,\sigma|^{2j_1+2j_2} \, |\psi_{l_1 l_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)| < +\infty .$$

La determinazione del logaritmo è fatta tagliando $C$ lungo la semiretta $x + iy$, con $y = 0$, $x \leqslant 0$, e si intende reale il logaritmo di un argomento positivo.

Definizione 2.5. Se $\psi \in \mathcal{A}_{-k,j_1,j_2}$ indichiamo con $I(z, x, \xi; \psi)$ il seguente integrale:

$$I(z, x, \xi; \psi) = \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}\psi(\sigma, x, \xi)d\!\!\!/s .$$

Proposizione 1.5. Le equazioni di trasporto (3.4) ammettono una soluzione del tipo

$$q_{-k}(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_{-k}(2tD, x, \xi)$$

essendo $\hat{q}_{-k}(z, x, \xi) = I(z, x, \xi; \psi_{-k})$ con $\psi_{-k} \in \mathcal{A}_{-k,2k,2k}$ .

Dimostrazione. Si ragiona per induzione su $k$. Per $k = 0$, l'equazione $L_1 q_0 = 0$ ha, come abbiamo visto, la soluzione cercata. Supponiamo ora che $\hat{q}_{-h}$, $h = 0, 1, \ldots, l$, siano del tipo desiderato, ossia tali che

$$\hat{q}_{-h}(z, x, \xi) = I(z, x, \xi; \psi_{-h}) \qquad \text{con} \qquad \psi_{-h} \in \mathcal{A}_{-h,2h,2h}$$

si tratta di dimostrare che anche $\hat{q}_{-(l+1)} = I\big(z, x, \xi; \psi_{-(l+1)}\big)$ con $\psi_{-(l+1)} \in \mathcal{A}_{-(l+1),2(l+1),2(l+1)}$.

Tenendo presente le omogeneità e il comportamento dei poli, è facile vedere che per risolvere le equazioni (5.3) basta risolvere la seguente equazione

$$\big(z\partial_z^2 + (b-z)\,\partial_z - a\big)\hat{q} =$$
$$= \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}\psi(\sigma, x, \xi)\,d\sigma$$

con $\psi \in \mathcal{A}_{-(l+1),2(l+1),2(l+1)}$.

Cerchiamo $\hat{q}$ sotto la forma

$$\hat{q}(z, x, \xi) = \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}v(\sigma, x, \xi)\,d\sigma\,.$$

Per determinare $v$, basta risolvere la seguente equazione

$$(\sigma - \sigma^2)\,v' = \psi(\sigma, x, \xi)$$

e, quindi, l'equazione

$$v' = \psi^*(\sigma, x, \xi) \qquad \text{con} \qquad \psi^* \in \mathcal{A}_{-(l+1),2(l+1)+1,2(l+1)+1}\,. \tag{5.6}$$

In un intorno di $\sigma = 0$ il secondo membro è del tipo

$$\sigma^{-2(l+1)-1}\sum_{l_1=0}^{m_1}\tilde{\psi}_{l_1}(\log\sigma)^{l_1},$$

$\tilde{\psi}_{l_1}$ olomorfa, e, quindi, una soluzione, in un intorno di $\sigma = 0$ è una funzione del tipo

$$v = \sigma^{-2(l+1)}\sum_{n_1=0}^{m_1'}\tilde{\tilde{\psi}}_{n_1}(\log\sigma)^{n_1}\,, \qquad \tilde{\tilde{\psi}}_{n_1} \text{ olomorfa}\,.$$

Analogamente, in un intorno di $\sigma = 1$. La tesi segue poi per l'unicità della soluzione olomorfa in ogni aperto di $C \setminus \{0, 1\}$ e dal fatto che $(\log \sigma)^m$ e $(\log(1-\sigma))^n$, $m, n \in Z_+$, sono linearmente indipendenti.

Un risultato analogo vale per $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{q}$ e per la verifica della condizione 3, definizione 1.5.

PROPOSIZIONE 2.5. Sia $\psi_j \in \mathcal{A}_{-j,2j,2j}$, allora per $I(z, x, \xi; \psi_j)$, $z \in R_+$, $x \in R_x^n$, $\xi \in R_\xi^n$ (si veda la definizione 2.5, $a, b$ funzioni $C^\infty$), valgono le seguenti stime:

1) $I(z, x, \xi; \psi_j) = z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j}(C_{1j} + O(1/z))$ per $z \to +\infty$,

2) $I(z, x, \xi; \psi_j) = z^{1-\operatorname{Re} b - \varepsilon}(C_{2j} + O(z))$ per $z \to O_+$ essendo $C_{1j}$, $C_{2j}$ costanti opportune, $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Operando il cambiamento di variabile $z\sigma = \tau$, si ha, tenendo conto che $(1 - \tau/z)^{b-a-1}$ è una quantità limitata per $\tau \to +\infty$:

$$
\begin{aligned}
&|I(z, x, \xi; \psi_j)| \leqslant \\
&\leqslant C' \left| \int_L \exp[\tau] (\tau/z)^{a-1} (1 - \tau/z)^{b-a-1} (1/z) \psi_j(\tau/z, x, \xi) d\tau \right| \leqslant \\
&\leqslant C_j' \left| \int_L \exp[-\operatorname{Re} \tau] z^{\operatorname{Re} a} |\tau|^{\operatorname{Re} a - 1} |\log(\tau/z)|^M (1 + |\tau/z|)^{4j} (\tau/z)^{-2j} d\tau \right| \\
&\leqslant C_j'' \left[ \int_L \exp[-|\operatorname{Re} \tau|\, |\tau|^{\operatorname{Re} a - 1 - 2j} |\log \tau|^M (1 + |\tau|)^{4j} d\tau \right] z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C_{1j} z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j} .
\end{aligned}
$$

2) Analogamente, per $z \to O_+$, operando ancora il cambiamento di variabile $z\sigma = \tau$, si ha

$$
\begin{aligned}
&|I(z, x, \xi; \psi_j)| \leqslant \\
&\leqslant C' \frac{1}{z} \int_L \left| \exp[\tau] \left(\frac{\tau}{z}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{\tau}{z}\right)^{b-a-1} \left(\frac{\tau}{z}\right)^{-2j} \left(1 - \frac{\tau}{z}\right)^{-2j} \cdot \right. \\
&\cdot \left| \log \frac{\tau}{z} \right|^M \left| \log\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) \right|^N \left| 1 + \left| \frac{\tau}{z} \right| \right|^{4j} d\tau \leqslant \\
&\leqslant C_{2j} z^{-1-\operatorname{Re} a + 1 - \operatorname{Re} b + \operatorname{Re} a + 1 + 2j + 2j - 4j - \varepsilon} = C_{2j} z^{1-\operatorname{Re} b - \varepsilon} .
\end{aligned}
$$

Nelle precedenti disuguaglianze si è tenuto conto della limitatezza, per $z \to 0_+$, della seguente quantità:

$$\int_L \exp[-|\mathrm{Re}\,\tau|]\,|\tau|^{\mathrm{Re}\,a-1-2j}\,|z-\tau|^{\mathrm{Re}\,b-\mathrm{Re}\,a-1-2j}\,|\log\tau|^M\cdot$$
$$\cdot|\log(z-\tau)|^N\,\big||z|+|\tau|\big|^{4j}d\tau\,.$$

## 6. Costruzione di una soluzione.

Definiamo alcune classi di simboli:

Definizione 1.6. Siano $m, p \in R$, indichiamo con $\tilde{S}^m_\mu$ la classe delle funzioni $p(t, x, \xi) \in C^\infty(]0, T[; S^m(R^n_x \times R^n_\xi))$ tali che

$$|t^\mu(t\partial_t)^k\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi p(t, x, \xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

per ogni $\xi$, $|\xi| > 1$, per ogni $x \in \Omega \subset\subset R^n_x$, per ogni $k, \alpha, \beta$.

Si dimostrano, analogamente a come viene fatto in [6] le seguenti proposizioni:

Proposizione 1.6. Sia $(m_j)_{j\in N}$ una successione che diverge decrescendo a $-\infty$ per $j \to +\infty$. Siano $p_j$ funzioni fali che $p_j \in \tilde{S}^{m_j}_\mu$, $j = 1, 2, \ldots$, esiste allora una funzione $p \in \tilde{S}^m_\mu$ tale che

$$p \sim \sum_{j\geqslant 1} p_{m_i}\,.$$

nel senso che per ogni $N > 0$, la differenza $p - \sum_{j=1}^{N-1} p_j \in \tilde{S}^{m_N}_\mu$.

Proposizione 2.6. Valgono le seguenti proprietà:

1) Se $p \in \tilde{S}^m_\mu$ e $q \in \tilde{S}^{m'}_{\mu'}$. allora $pq \in \tilde{S}^{m+m'}_{\mu+\mu'}$,

2) Per ogni $t$ fissato, $t > 0$, $p(t, x, \xi) \in S^m_{1,0}$ (classe di Hormander) [6].

Se con $OP\tilde{S}^m_\mu$ indichiamo l'insieme degli operatori definiti nel modo seguente:

$$p(t,x,D_x)\,u(x) = \int \exp[ix\xi]p(t, x, \xi)\,\hat{u}(\xi)d\xi, \qquad u \in \mathcal{D}'(R^n_x)$$

(integrale oscillante), si ha

PROPOSIZIONE 3.6. Se $p(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}^m_\mu$ e $q(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}^{m'}_{\mu'}$, allora la composizione $p(t, x, D_x) o q(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}^{m+m'}_{\mu+\mu'}$. con simbolo $c(t, x, \xi)$ tale che

$$c(t, x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi p(t, x, \xi) D^\alpha_x q(t, x, \xi) .$$

Vale inoltre la

PROPOSIZIONE 4.6. Siano $q_{-j}(t, x, \xi)$ le soluzioni delle equazioni di trasporto (5.3), la cui forma è stata dimostrata nella proposizione 1.5, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$q_{-j}(t, x, \xi) \in \tilde{S}^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}_{\bar{b}-1+\varepsilon} \qquad \bar{b} = \sup_{x \in \Omega \subset\subset R^n_x} \max \{0, \operatorname{Re} b\} .$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla proposizione 2.5, si ha che

$$\hat{q}(2tD, x, \xi) = z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j}\big(C_{1j} + O(1/2tD)\big) \quad \text{per} \quad tD \to +\infty ,$$

$$\hat{q}(2tD, x, \xi) = z^{1-\operatorname{Re} b - \varepsilon}\big(C_{2j} + O(2tD)\big) \quad \text{per} \quad tD \to O_+ .$$

Ora

$$q_{-j}(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00}(x, \xi) - tD(x, \xi]\hat{q}_{-j}\big(2tD(x, \xi), x, \xi\big) .$$

Da qui si ha che

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1} q_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}$$

Proviamo ora la seguente disuguaglianza

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1}(t\partial_t)^k \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi q_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j-|\beta|}.$$

per ogni $k \in N$, per ogni $\alpha, \beta$ multiindici, per ogni $t \in [0, T]$, per ogni $x \in \Omega \subset\subset R^n$, per ogni $\xi \in R^n$, $|\xi| \geqslant 1$.

Allo scopo è sufficiente controllare $q_{-j}$ per ogni singola derivata. Ora

$$\partial_{x_k} q_{-j}(t, x, \xi) = \partial_{x_k} h\big(2tD(x, \xi), x, \xi\big)$$

dove

$$h(z, x, \xi) = \exp[-izA_{00}(x, \xi)/2D(x, \xi) - z/2]\hat{q}_{-j}(z, x, \xi)\,.$$

Si noti che $h$ è positivamente omogenea di grado $-j$ rispetto a $\xi$.
Dunque

$$\partial_{x_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) = (\partial_z h)(2tD, x, \xi)\, 2t\partial_{x_k} D(x, \xi) + (\partial_{x_k} h)(2tD, x, \xi) =$$
$$= \left\{(z\partial_z h)(2tD, x, \xi)\, \partial_{x_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{x_k} h)(z, x, \xi)\right\}_{z=2tD(x,\xi)}.$$

Osservando che $z\partial_z h$ ha lo stesso sviluppo asintotico di $h$ sia per $z \to +\infty$, che per $z \to 0_+$, si ha che

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1}\partial_{x_k} q_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}\,.$$

Consideriamo ora $\partial_{\xi_k} q_{-j}$. Usando le stesse notazioni di prima, poniamo

$$\partial_{\xi_k} q_{-j}(t, x, \xi) = \partial_{\xi_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi)\,.$$

Si ha quindi:

$$\partial_{\xi_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) =$$
$$= (\partial_z h)(2tD, x, \xi)\, 2tD(x, \xi)\, \partial_{\xi_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{\xi_k} h)(2tD, x, \xi) =$$
$$= \left\{\{(z\partial_z h)(z, x, \xi)\, \partial_{\xi_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{\xi_k} h)(z, x, \xi)\right\}_{z=2tD}.$$

La conclusione segue dal fatto che $h \in O^{-j}$, e che

$$\left|\partial_{\xi_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)}\right| \leqslant C/|\xi|\,.$$

Per stimare $t\partial_t$ si procede allo stesso modo osservando che l'operatore $z\partial_z$ non altera l'andamento asintotico.

Poniamo $q(t, x, \xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} q_{-j}(t, x, \xi)$ allora $q \in S^{1-\bar{b}+\varepsilon}_{\bar{b}-1-\varepsilon}$ mod $\tilde{S}^{-\infty}_{\bar{b}-1-\varepsilon} = \bigcap_{m\in R} \tilde{S}^{m}_{\bar{b}-1-\varepsilon}$.

DEFINIZIONE 2.6. Siano $k \in Z_+$, $\mu \in R$, definiamo $C^k_\mu([0, T] \times R^n_x)$ l'insieme delle funzioni $u \in C^{(k)}(]0, T]; L^2(R^n_x))$ tali che

$$\sup_{t \in [0,T]} \left[ t^\mu \sum_{j=1}^{k} \| (t\partial_t)^j u(t, \cdot) \|^2_{H^{k-j}(R^n_x)} \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty .$$

OSSERVAZIONE 1.6. Se $u \in C^k_\mu$ allora $u \in H^k([\lambda, T] \times R^n_x)$ per ogni $\lambda$ tale che $T > \lambda > 0$.

LEMMA 1.6. Sia $C$ un operatore tale che $C \in OP\tilde{S}^0_\mu$, propriamente supportato, $C = C^*$ e tale che per ogni $\Omega \subset\subset R^n_x$ si ha

$$\liminf_{|\xi| \to \infty} \Big( \inf_{\substack{x \in \Omega \subset\subset R^n_x \\ t \in [0,T]}} t^\mu p(t, x, \xi) \Big) > 0 \tag{6.1}$$

allora esiste un operatore $B$, $B \in \tilde{S}^0_{\mu/2}(\Omega \times \dot{R}^n_\xi)$ propriamente supportato tale che $C - B^* B \in \tilde{S}^{-\infty}_\mu$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (6.1) si deduce che possiamo trovare una funzione cut-off $\chi(x)$ tale che, se poniamo

$$b_0(t, x, \xi) = \chi(x) \sqrt{p(t, x, \xi)} \in \tilde{S}^0_{\mu/2}(\Omega' \times R^n_x)$$

$(\Omega' \subset\subset \Omega)$ si ha $C - B^*_0 B_0 \in \tilde{S}^{-1}_\mu$ con $B_0(t, x, D_x)$ l'operatore associato a $b_0$.

Ragionando per induzione come in [6], si ha che per ogni $j$, esiste $B_{-j} \in \tilde{S}^{-j}_{\mu/2}$ tale che

$$C - (B_0 + \ldots + B_{-j})^* (B_0 + \ldots + B_{-j}) \tilde{S}^{-j-1}_\mu .$$

E questo completa la dimostrazione del lemma.

PROPOSIZIONE 5.6. Sia $p \in \tilde{S}^0_\mu(\Omega \times \dot{R}^n_\xi)$, allora $p\colon C^0_\lambda \to C^0_{\lambda+\mu}$ con continuità.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è come in [6] e si fonda sul lemma 1.6.

PROPOSIZIONE 5.7. Sia $E(t, x) = \int \exp[ix\xi] q(t, x, \xi) d\xi$, allora $E \in C^{(-n/2+\bar{b}-1)}_{\bar{b}-1-\xi}$. Inoltre $E(t, x) \in C^\infty([\varepsilon, T] \times R^n_x)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $E = q(t, x, D_x)\delta(x)$ e che per ogni $\varepsilon > 0$ $\delta(x) \in C^{-n/2-\varepsilon}_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés,* Arch. Rational Mech. Anal., **34-5** (1969), pp. 361-379.

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables,* Bull. Soc. Math. France, Mémoire **34** (1973), pp. 55-140.

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels,* Bollettino U.M.I., (5), **14**-B (1977), pp. 77-100.

[4] A. BOVE - J. E. LEWIS - C. PARENTI, *Parametrix for a characteristic Cauchy problem,* preprint, 1983.

[5] C. GOULAOUIC - N. SHIMAKURA, *Regularitè Hölderienne de certain problèmes aux limites elliptiques dégénérés,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **10** (1983), pp. 79-108.

[6] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I,* Acta Math., **127** (1971), pp. 87-183.

[7] W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions,* vol. I, McGraw-Hill Book Company, 1953.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 settembre 1984.