RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. CRISTINA RONCONI

Sui monoidi di ordine quattro di P^3 singolari in codimensione uno

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 74 (1985), p. 23-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__23_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 74 (1985)

Sui monoidi di ordine quattro di $\mathbb{P}^3$ singolari in codimensione uno.

M. CRISTINA RONCONI (*)

SUMMARY - In this paper it is proved that on every monoidal surface $\mathcal{M}$ of degree four, singular in codimension one, in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}$ complex field) there is a curve which is not set theoretic complete intersection of $\mathcal{M}$ itself with another surface $\mathcal{G}$.

Introduzione.

Una superficie $\mathcal{F}$ di $\mathbb{P}^3_k$ si dice a curve sottoinsieme intersezione completa quando per ogni sua curva algebrica C, esiste una opportuna superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{C}$. Lo studio dei monoidi di ordine quattro di $\mathbb{P}^3_k$ (k campo algebricamente chiuso) che godono della proprietà di essere a curve sottoinsieme intersezione completa è stato iniziato in una precedente nota [4] nella quale sono stati classificati, a meno di isomorfismi lineari, quelli non singolari in codimensione uno, nell'ipotesi che k fosse di caratteristica $\neq 2,3$. Per quanto concerne lo studio di quelli singolari in codimensione uno, è noto che il «generico» monoide di ordine quattro con una retta luogo di punti doppi contiene due rette sghembe ([1], libro I, cap. VII) e pertanto non verifica la proprietà in esame ([3], p. 246). Tuttavia una analisi dettagliata dei monoidi singolari in codim. 1 mostra l'esistenza di superficie di questo tipo che non contengono rette sghembe. Per stabilire se esse godono o no della proprietà in oggetto, non è possi-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7, 35100 Padova (Italy).

bile applicare gli strumenti che sono risultati essenziali nella classificazione di quelli non singolari in codim. 1; si deve ricorrere pertanto a metodologie diverse.

In questa nota viene affrontato lo studio di tali monoidi in relazione alla proprietà suddetta. Innanzi tutto si dimostra una limitazione sul numero delle rette (distinte) uscenti dal punto triplo, che deve essere rispettata dai monoidi a curve sottoinsieme intersezione completa. Le superficie che verificano tale limitazione vengono distribuite, a meno di isomorfismi lineari, in un numero finito di famiglie che sono successivamente analizzate studiandone l'equazione. Sfruttando criteri che non richiedono limitazioni sul campo (alg. chiuso) k, si dimostra che non verificano la proprietà le superficie $\mathcal{M}$ che contengono due rette sghembe e quelle che rientrano nelle famiglie contrassegnate con (∘) e (∗); supponendo k di caratteristica zero o, se di caratteristica positiva non assolutamente algebrico (cioè non algebrico sul suo campo primo), si ottiene analogo risultato per le superficie contrassegnate con (∗∗). Si forniscono per ciascuna di esse le equazioni di una curva che non è sottoinsieme intersezione completa su $\mathcal{M}$. Si dimostra inoltre che anche le rimanenti non verificano le proprietà, ma vengono per esse applicati criteri che, fancendo riferimento alla proposizione 11 di [6], richiedono che k sia di caratteristica zero e più che numerabile; si tratta delle superficie contrassegnate con (1), ..., (11), le superficie con tre rette (distinte) luogo di punti doppi e i coni con una retta luogo di punti tripli.

Si può così concludere che, nell'ipotesi che k sia di caratteristica zero e più che numerabile, non esistono monoidi di ordine quattro singolari in codim. 1 a curve sottoinsieme intersezione completa. Tale risultato non può tuttavia essere esteso al caso di campi algebricamente chiusi arbitrari perchè esistono, in questo caso, esempi di monoidi che invece verificano la proprietà. Ad esempio il monoide $\mathcal{M}$: $\{x_1^3x_0 + x_2^4 + x_1^2x_3^2 = 0\}$ (ottenuto da (7) ponendo $a = b = c = 0$) è, in caratteristica 2, a curve sottoinsieme intersezione completa. Tale esempio mi è stato comunicato da P.C. Craighero.

Notazioni.

Le *superficie* di $\mathbf{P}_k^3$, intese sempre come superficie algebriche ridotte, saranno indicate con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... Con la scrittura $\mathcal{A} = \{A = 0\}$, $\mathcal{B} = \{B = 0\}$, ... si intenderà che A, B, ... sono generatori degli ideali principali associati ad $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$....

I monoidi trattati in questa nota vanno sempre intesi come superficie irriducibili.

Le *curve* di $\mathbf{P}_k^3$ (equidimensionali), verranno indicate con a, b, ...

Sia $\mathcal{M}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ e c una sua curva algebrica. Si dirà che c è *sottoinsieme intersezione completa* su $\mathcal{M}$ se esiste una superficie $\mathcal{G}$ di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$ (per brevità si scriverà che c è s.i.c. su $\mathcal{M}$). Se ogni curva algebrica di $\mathcal{M}$ è s.i.c. su $\mathcal{M}$ si dirà che $\mathcal{M}$ è a curve sottoinsieme intersezione completa.

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due superficie irriducibili di $\mathbf{P}_k^3$ e $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_r$ le componenti irriducibili di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Con la scrittura

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mu_1 \mathsf{c}_1 + \ldots + \mu_r \mathsf{c}_r ,$$

interpretata in un opportuno aperto affine di $\mathbf{P}_k^3$, si intende che μ_i è la molteplicità di intersezione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ lungo c_i.

1. Su alcune condizioni necessarie perchè un monoide di $\mathbf{P}_k^3$ sia a curve sottoinsieme intersezione completa.

In $\mathbf{P}_k^3$, k campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria, si considerino le superficie $\mathcal{M}$ di ordine n con un punto P_0 $(n-1)$-plo. Tali superficie, a meno di isomorfismi lineari, qualora si supponga P_0 coincidente con $O(1,0,0,0)$, possono essere rappresentate da equazioni del tipo:

$$Ax_0 + B = 0$$

con A e B forme di $k[x_1, x_2, x_3]$ di ordine n-1 e n rispettivamente.

I monoidi di $\mathbf{P}_k^3$ di ordine n con un punto P_0 $(n$-1)-plo sono singolari in codimensione uno se e solo se sono singolari lungo rette uscenti dal punto P_0. In particolare un monoide di ordine quattro è singolare in codimensione uno se una delle rette uscenti da P_0 è luogo di punti tripli oppure se il luogo dei punti doppi è costituito da una, due o tre rette doppie uscenti da P_0.

Proposizione 1.1. Sia $\mathcal{M}$ un monoide di ordine $n \geqslant 2$ (singolare o no in codimensione uno) di $\mathbf{P}_k^3$, $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$. Detta r una retta di $\mathcal{M}$ per il punto $(n$-1)-plo $O(1,0,0,0)$ e $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{r}$, allora $\overline{G}$, immagine di G nella proiezione canonica: $k[x_0, x_1, x_2, x_3] \to k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(Ax_0 + B)$, è prodotto di potenze ad esponente intero delle proiezioni canoniche di fattori irriducibili di A.

Per la dimostrazione si veda [5] p. 140. Nell'enunciato della proposizione 2 di [5] il monoide risulta non singolare in codimensione uno; tuttavia nella prima parte della dimostrazione, che riguarda il fatto in esame, tale ipotesi non viene utilizzata.

PROPOSIZIONE 1.2. Sia $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$ un monoide di ordine quattro di $\mathbb{P}^3_k$, singolare o no in codimensione uno. Indicati con $A_1, \ldots, A_s$ i fattori irriducibili di A, $A = A_1^{\nu_1} \ldots A_s^{\nu_s}$, e con $\mathsf{r}_1, \ldots, \mathsf{r}_h$ le rette (distinte) di $\mathcal{M}$ per $O(1, 0, 0, 0)$, condizione necessaria perchè tali rette siano s.i.c. su $\mathcal{M}$ (e quindi condizione necessaria perchè $\mathcal{M}$ sia a curve s.i.c.) è che $h \leqslant s$.

DIMOSTRAZIONE. Nel caso in cui $s = 1$, cioè $A = A_1^{\nu_1}$, detta r una retta di $\mathcal{M}$ per O, sia $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie di $\mathbb{P}^3_k$ tale che $\mathcal{G} \cap \cap \mathcal{M} = \mathsf{r}$. Dalla proposizione 1.1 si deduce che $\bar{G} = \bar{A}_1^{m_1} (m_1 > 0)$; pertanto $\mathcal{M} \cap \{A_1 = 0\} = \mathsf{r}$. Ricordando che le rette di $\mathcal{M}$ per O sono le componenti di $\mathcal{M} \cap \{A_1 = 0\}$, si deduce che su $\mathcal{M}$ c'è una sola retta per il punto triplo.

Nel caso in cui i fattori siano più di uno, indicate con $\mathcal{A}_i$ le superficie $\{A_i = 0\}$ e con $\mathsf{r}_1, \ldots, \mathsf{r}_h$ le rette (distinte) di $\mathcal{M}$ per O, sia $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{M} = = a_{1i}\mathsf{r}_1 + \ldots + a_{hi}\mathsf{r}_h$. Se le rette sono s.i.c. su $\mathcal{M}$, esiste una superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ tale che $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathsf{r}_1$. Dalla proposizione 1.1 si deduce che $\bar{G} = \bar{A}_1^{m_1} \ldots \bar{A}_s^{m_s}$, con m_i interi opportuni non tutti nulli, e quindi che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \left(\sum_1^s a_{1j} m_j\right) \mathsf{r}_1 + \ldots + \left(\sum_1^s a_{hj} m_j\right) \mathsf{r}_h$. Pertanto

$$\begin{pmatrix} a_{21} \ldots a_{2s} \\ \cdots\cdots \\ a_{h1} \ldots a_{hs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \cdot\cdot \\ m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè per ipotesi tale sistema ammette una soluzione non nulla, il rango deve essere minore di s. Analoghe considerazioni valgono per le rette $\mathsf{r}_2, \ldots, \mathsf{r}_h$. Pertanto tutte le sottomatrici di

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1s} \\ a_{21} \ldots a_{2s} \\ \cdots\cdots \\ a_{h1} \ldots a_{hs} \end{pmatrix},$$

ottenute cancellandone una riga, devono avere rango minore di s. Se per assurdo $h > s$, il rango di quest'ultima matrice sarebbe minore di s e quindi una colonna sarebbe combinazione lineare delle rimanenti. Tenendo presente che le forme A_i sono in questo caso o lineari o di secondo grado, se ne dedurrebbe che o due piani hanno in comune più di una retta o che un piano e una quadrica ne hanno in comune più di due e ciò è assurdo.

PROPOSIZIONE 1.3. Sia $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$ un monoide di $\mathbf{P}_k^3$ (singolare o no in codim. 1) e sia C una sua curva algebrica (irriducibile e ridotta) distinta da una delle rette uscenti dal punto $(n-1)$-plo O di $\mathcal{M}$. Se esiste $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ di ordine m tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{C}$, indicati con $\{\Gamma = 0\}$ il cono che da O proietta C, con $A_1, \ldots, A_s$ i fattori irriducibili di A, $A = A_1^{\nu_1} \ldots A_s^{\nu_s}$, e con $\bar{G}$, $\bar{\Gamma}$, ecc. le proiezioni canoniche di G, Γ, ecc. nell'anello delle coordinate omogenee di $\mathcal{M}$, deve risultare:

$$\bar{G} = \bar{\Gamma}^{\alpha} \bar{A}_1^{\beta_1} \ldots \bar{A}_s^{\beta_s},$$

dove α e β_i sono interi, $\alpha > 0$ e i β_i negativi soddisfano la condizione: $0 < -\beta_i \leqslant \nu_i(m-\lambda)$, con λ molteplicità di O per $\mathcal{G}$.

Per la dimostrazione si veda il lemma 1 di [7].

2. Monoidi di ordine quattro con una retta luogo di punti tripli.

Un monoide $\mathcal{M}$ di ordine quattro di $\mathbf{P}_k^3$ con una retta luogo di punti tripli è una superficie rigata e, come tale, contiene due rette sghembe oppure è un cono. Nel primo caso, come si deduce da una osservazione di D. Gallarati, [3] p. 246, che non richiede alcuna limitazione sul campo k, nessuna delle due rette è s.i.c. su $\mathcal{M}$ e quindi tale superficie non è a curve sottoinsieme intersezione completa. Ad analogo risultato si perviene anche se $\mathcal{M}$ è un cono, ma il criterio usato richiede che k sia di caratteristica zero e più che numerabile. Sotto tali ipotesi si consideri infatti un piano π, non passante per il vertice V, che intersechi $\mathcal{M}$ lungo una quartica irriducibile C. Detto P un punto di C e t la retta di $\mathcal{M}$ passante per P, se $\mathcal{M}$ fosse a curve s.i.c. esisterebbe una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{t}$ e quindi $\mathcal{G} \cap \mathsf{C} = P$. La quartica piana C, razionale e singolare, risulterebbe dunque a punti s.i.c., ma ciò sarebbe in contrasto con la proposizione 11 e corollario 1 di [6].

Ogni monoide di $\mathbf{P}_k^3$, k campo algebricamente chiuso di caratteristica zero e più che numerabile, con retta tripla non è dunque a curve s.i.c..

Nota. Ogni monoide di ordine quattro che sia anche cono contiene necessariamente una retta luogo di punti tripli. Tutti i monidi trattati successivamente non potranno dunque contenere un punto multiplo di molteplicità quattro.

3. Monoidi di ordine quattro con tre rette (distinte) luogo di punti doppi.

Le superficie qui trattate sono superficie di Steiner con tre rette doppie distinte, proiezioni (generiche) della superficie di Veronese di $\mathbf{P}^5$. Le superficie di Steiner con due o tre rette doppie infinitamente vicine rientrano tra quelle analizzate nei paragrafi 4 e 5. È noto che le superficie in esame sono linearmente isomorfe alla $\mathcal{M} = \{x_1x_2x_3x_0 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2\}$. Qualora k sia di caratteristica zero e più che numerabile tale superficie non è a curve s.i.c. Si consideri infatti la parte affine $\mathcal{M}_a = \{x_2x_3x_0 + x_2^2 + x_3^2 + x_2^2x_3^2 = 0\} = \mathcal{M} \cap \{x_1 \neq 0\}$. Tale superficie affine è isomorfa tramite $(x_0, x_2, x_3) \to (x_0 + x_2x_3, x_2, x_3)$ alla superficie cubica affine $\mathcal{F}_a = \{x_2x_3x_0 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$ che, essendo singolare in codimensione uno, non è a curve s.i.c. come dimostrato nella proposizione 6.1 di [2]. Pertanto nessun monoide con tre rette luogo di punti doppi è a curve sottoinsieme intersezione completa (su campi di caratteristica zero e più che numerabili).

4. Monoidi di ordine quattro con due rette (distinte) luogo di punti doppi.

Sia k un campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria. Un monoide $\mathcal{M}$ di ordine quattro di $\mathbf{P}_k^3$ con due rette r e s luogo di punti doppi, qualora si supponga, come possibile a meno di isomorfismi lineari, che il punto triplo di $\mathcal{M}$ coincida con $O(1, 0, 0, 0)$ e che le rette r e s siano rispettivamente $\{x_1 = x_3 = 0\}$ e $\{x_2 = x_3 = 0\}$, può essere rappresentato dall'equazione

$$Ax_0 + B = 0 \ , \qquad (')$$

dove $B = ax_1^2x_2^2 + (b_1x_1 + b_2x_2)x_1x_2x_3 + (c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_2^2)x_3^2 + (d_1x_1 + d_2x_2)x_3^3 + ex_3^4$ e $A = (a'x_1x_2 + b'x_1x_3 + c'x_2x_3 + d'x_3^2)x_3$. Si distinguano due casi: su $\mathcal{M}$ c'è una terza retta uscente da 0; su $\mathcal{M}$ non ci sono altre rette, oltre a r e s, uscenti da 0.

4.1. Nel caso in cui su $\mathcal{M}$ ci sia una terza retta uscente da 0 (che non può ovviamente essere complanare con r e s), si può supporre, a meno di isomorfismi lineari, che questa sia la $\mathsf{t} = \{x_1 = x_2 = 0\}$. In questo caso $\mathcal{M}$ è rappresentato dall'equazione (′) in cui $d' = e = 0$.

Qualora $(b', c') \neq (0, 0)$ su $\mathcal{M}$ è possibile individuare due rette sghembe. Come già osservato nel § 2, una tale superficie non è a curve s.i.c..

Qualora $b' = c' = 0$, deve risultare $a' \neq 0$ (altrimenti $\mathcal{M}$ sarebbe un cono). Nell'ipotesi che t non sia luogo di punti doppi per $\mathcal{M}$ (per non riottenere le superficie già assegnate nel § 3), le superficie in esame o contengono altre rette uscenti da O oltre alle r, s e t (in questo caso non sono a curve s.i.c. per la proposizione 1.2), oppure sono linearmente isomorfe ad una tra le:

$$x_1x_2x_3x_0 + ax_1^2x_2^2 + (bx_1 + cx_2)x_3^3 = 0\,, \qquad abc \neq 0 \tag{1}$$

$$x_1x_2x_3x_0 + ax_1^2x_2^2 + bx_2^2x_3^2 + cx_1x_3^3 = 0\,, \qquad abc \neq 0\,. \tag{2}$$

Con lo stesso procedimento adottato per le superficie del § 3, è possibile dimostrare, qualora il campo k sia di caratteristica zero e più che numerabile, che le (1) e (2) non sono a curve s.i.c.

4.2. Nel caso in cui su $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$ non ci siano altre rette uscenti da O oltre a r e s, secondo i vari casi che si presentano in relazione ad A, $\mathcal{M}$ risulta linearmente isomorfo ad una tra le seguenti superficie:

$$x_3(x_1x_2 + x_3^2)x_0 + x_2C = 0\,,$$

(dove C è una conveniente forma di grado 3 di $k[x_1, x_2, x_3]$);

$$x_3^3x_0 + x_2[ax_1^2x_2 + (b_1x_1 + b_2x_2)x_1x_3 + (c_1x_1 + c_2x_2)x_3^2] = 0, \qquad a \neq 0;$$

$$x_1x_3^2x_0 + ax_1^2x_2^2 + (b_1x_1 + b_2x_2)x_1x_2x_3 + cx_3^4 = 0; \qquad c \neq 0; \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_0 + x_1^2x_2^2 + x_3^4 = 0\,. \tag{4}$$

Infatti $A = x_3 A'$. Qualora A' sia una forma di secondo grado irriducibile, la conica $\{A' = 0\}$ del piano $\pi: \{x_0 = 0\}$ deve contenere i punti R e S intersezione di r e s con π. Quindi, a meno di isomorfismi lineari, $A' = x_1 x_2 + x_3^2$. Tenendo presente che le componenti dell'intersezione delle due superficie luogo degli zeri di A' e B sono r e s e che $\mathcal{M}$ è singolare lungo r e s, si deduce che $B = tB' + (x_1 x_2 + x_3^2)(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2)$, $t \in k$, $t \neq 0$, con $B' = x_3^2 x_2^2$ oppure $B' = x_3^3 x_2$, $B' = x_1^2 x_2^2$. B pertanto è del tipo: $B = Cx_2 + x_3(x_1x_2 + x_3^2)(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)$, cioè i monoidi in esame sono l.i. a $\{(x_1x_2 + x_3^2)x_3x_0 + Cx_2 + x_3(x_1x_2 + x_3^2)(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0\}$. Si vede ora facilmente che essi sono l.i. a superficie della prima famiglia. Qualora A' sia riducibile, con un procedimento analogo, si dimostra che i monoidi sono linearmente isomorfi a superficie delle rimanenti famiglie.

Le prime due non sono a curve s.i.c. perchè contengono le due rette sghembe $\{x_1 = x_3 = 0\}$ e $\{x_2 = x_0 = 0\}$; anche la (3) e la (4) non lo sono qualora k sia di caratteristica zero e più che numerabile; infatti per la (3) si può sfruttare lo stesso procedimento adottato per le superficie del § 3. Per la (4) si consideri la parte affine $\mathcal{M}_a = \{x_1^2x_2^2 + x_3^4 + x_1x_2x_3 = 0\} = \mathcal{M} \cap \{x_0 \neq 0\}$ e si indichino con π il piano $\{x_2 = 1\}$ e con R il punto intersezione di π con r. Si osservi innanzi tutto che se su $\mathcal{M}_a$ esistono due curve c e d le cui proiezioni da O, c' e d', su π hanno, oltre a R, un unico punto P' di intersezione, tenuto conto della corrispondenza birazionale che intercorre tra $\mathcal{M}_a$ e π, allora c e d hanno in comune, oltre ad eventuali punti lungo r, il solo punto P di $\mathcal{M}_a$ la cui proiezione su π è P'. Si consideri ora la curva razionale singolare $\mathsf{c} = \{x_3^4 + x_1^2 + x_1x_3 = x_2 - 1 = 0\}$ intersezione di $\mathcal{M}_a$ e π e si indichi con P un suo punto. La conica $\mathsf{d}_t' \subset \pi$ del fascio $\{x_1 - tx_3^2 = x_2 - 1 = 0\}$ e che passa per P ha in comune con c, oltre a R, il solo punto P. Pertanto la curva d_t, la cui proiezione su π è d_t', cioè la $\mathsf{d}_t = \{t^2x_2^2x_3 + x_3 + tx_2 = x_1 - tx_3^2 = 0\}$, ha in comune con c, oltre ad eventuali punti lungo r, il solo punto P. D'altra parte se $t \neq 0$, $\mathsf{c} \cap \mathsf{r} = R$ e $\mathsf{d}_t \cap \mathsf{r} = O$. Se $t = 0$, P coicide con R ed inoltre $\mathsf{c} \cap \mathsf{r} = R$ e $\mathsf{d}_0 \cap \mathsf{c} = R$. Pertanto $\mathsf{c} \cap \mathsf{d}_t = P$. Se per assurdo $\mathcal{M}$, e quindi $\mathcal{M}_a$, fosse a curve s.i.c., per ogni $d_t \subset \mathcal{M}_a$ esisterebbe una superficie $\mathcal{G}_t \subset A_k^3$ tale che $\mathcal{G}_t \cap \mathcal{M}_a = d_t$. Allora $\mathcal{G}_t \cap \mathsf{c} = P$, cioè c sarebbe una curva affine razionale singolare a punti s.i.c.; ma ciò sarebbe in contrasto con quanto affermato in [6] p. 173, secondo cui le sole curve di A_k^3 a punti s.i.c. (cioè quelle che verificano C_2FD) sono quelle razionali non singolari. Pertanto d_t, per qualche t, non è s.i.c. su $\mathcal{M}$.

5. Monoidi di ordine quattro con una sola retta luogo di punti doppi.

Sia $\mathcal{M}$ un monoide di ordine quattro di $\mathbf{P}^3_k$ con una sola retta r luogo di punti doppi. A meno di isomorfismi lineari, è sempre possibile supporre che il punto triplo di $\mathcal{M}$ coincida con $O(1, 0, 0, 0)$ (cosicchè $\mathcal{M}$ può essere rappresentato dall'equazione $Ax_0 + B = 0$), e che la retta r sia la $\{x_1 = x_2 = 0\}$. La discussione viene condotta distinguendo i vari casi che si presentano in relazione al numero delle rette di $\mathcal{M}$ per O, e ricordando che, se esso supera quello dei fattori irriducibili di A, $\mathcal{M}$ non è a curve s.i.c. (proposizione 1.2).

5.1. Su $\mathcal{M}$ ci sia una sola retta per O: quella doppia.

Qualora A sia irriducibile, $A = 0$ rappresenta, sul piano $\pi = \{x_0 = 0\}$, una cubica a singolare nel punto $R(0, 0, 1, 0)$ intersezione di r e π. Nel caso in cui a è nodata è sempre possibile supporre $A = x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3$. Ricordando che $\mathcal{M}$ è singolare lungo r e che l'intersezione delle curve luogo degli zeri di A e B è R, non è difficile riconoscere che $B = tB' + L(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)$, dove $t \in k$, $t \neq 0$, L forma lineare di $k[x_1, x_2, x_3]$ e $B' = x_2^4 - x_1^2x_3^2 + 2x_1^3x_2$, oppure $B' = x_1^2(x_1x_3 - x_2^2)$, $B' = x_1^4$, $B' = x_1^3x_2$, $B' = x_1^2x_2^2$. I monoidi in questo caso sono dunque l.i. ad uno dei seguenti:

$$(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 + x_2^4 - x_1^2x_3^2 + 2x_1^3x_2 = 0;$$

$$(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 + x_1^2(x_1x_3 - x_2^2) = 0;$$

(*) $$(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 + x_1^4 = 0;$$

(*) $$(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 + x_1^3x_2 = 0;$$

(**) $$(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 - x_1^2x_2^2 = 0;$$

Con procedimento analogo, qualora a sia cuspidata, si ottengono superficie linearmente isomorfe alla:

$$(x_2^3 - x_1^2x_3)x_0 + x_1^4 = 0 . \tag{5}$$

La prima contiene le due curve sghembe $\{x_1 - x_2 = x_3(x_0 - x_3) + x_2(3x_2 - 2x_0) = 0\}$ e $\{x_0 = x_2 = 0\}$; la seconda contiene le due rette sghembe $\{x_1 = x_0 = 0\}$ e $\{x_2 = x_3 - x_0 = 0\}$. Per dimostrare che la (5) non è a curve s.i.c. si può procedere, qualora k sia di caratteristica zero e più che numerabile, come per le superficie del § 3. Per le superficie contrassegnate con (*) è possibile adottare uno stesso criterio; esso viene illlustrato applicandolo alla prima delle due.

Si consideri la superficie $\mathcal{M} = \{M = 0\} = \{(x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 + x_1^4 = 0\}$ e la conica di $\mathcal{M}$: $\mathsf{c} = \{x_2 - x_1 = x_3x_0 - 2x_1x_0 + x_1^2 = 0\}$. Se per assurdo esistesse una superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ di ordine m di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathsf{c}$, indicato con $\bar{G}$ la proiezione canonica di G in $k[\mathcal{M}]$, dovrebbe risultare (proposizione 1.3):

$$\bar{G} = (\overline{x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3})^{\alpha}(\overline{x_2 - x_1})^{2m}.$$

$\mathcal{M}\cdot\{x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 = 0\} = 12\,\mathsf{r}$, $\mathcal{M}\cdot\{x_1 - x_2 = 0\} = \mathsf{c} + 2\mathsf{r}$ e $\mathcal{M}\cdot\mathcal{G} = 2m\,\mathsf{c}$, da cui $12\alpha + 4m = 0$. Dunque $\alpha < 0$; posto $\beta = -\alpha$, $m = 3\beta$. Pertanto

$$(\overline{x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3})^{\beta}\bar{G} = (\overline{x_2 - x_1})^{6\beta}.$$

Dalle relazioni valide in $k[\mathcal{M}]$, si otterrebbe quindi:

$$(-1)^{\beta}x_1^{4\beta}G = x_0^{\beta}(x_2 - x_1)^{6\beta} + \psi M$$

con ψ polinomio omogeneo opportuno di $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Comunque fissato un polinomio $P \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, sia $\tilde{P}$ il polinomio ottenuto da P ponendo $x_2 = hx_1$, $h \in k$. Dall'ultima relazione si otterrebbe allora:

$$(-1)^{\beta}x_1^{4\beta}\tilde{G} = x_0^{\beta}x_1^{6\beta}(h-1)^{6\beta} + \tilde{\psi}\tilde{M}.$$

Essendo $\tilde{M}$, per ogni $h \neq 0$, divisibile per x_1^2, si dedurrebbe che $\tilde{\psi}$, per gli stessi valori di h, è divisibile per $x_1^{4\beta-2}$. D'altra parte, per $h = 0$, $\tilde{M}$ è divisibile per x_1^3 e ciò implicherebbe che $\tilde{G}$, per $h = 0$, fosse divisibile per x_1. Pertanto le superficie $\mathcal{G}$ e $\{x_2 = 0\}$ avrebbero r in comune, cioè $\mathcal{G}$ conterrebbe r contro l'ipotesi assunta. c non è dunque sottoinsieme intersezione completa su $\mathcal{M}$.

Per dimostrare che la superficie $\mathcal{M}' = \{M' = 0\}$, dove $M' = (x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 - x_1^2x_2^2$, contrassegnata con (**), non è a curve s.i.c., qualora k sia di caratteristica zero o, se di caratteristica positiva, non sia assolutamente algebrico (cioè algebrico sul suo campo primo), è sufficiente verificare che non esiste alcuna superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M}' \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$, con $\mathsf{c} = \{x_1 - ax_2 = ax_3x_0 -$

$-(a^3+1)x_2x_0-a^2x_2^2=0\}$. Infatti se per assurdo esistesse, indicato con m il suo ordine e con $\bar{G}$ la proiezione canonica di G in $k[\mathcal{M}']$, anello delle coordinate omogenee di $\mathcal{M}'$, dovrebbe risultare, per la proposizione 1.3,

$$\bar{G}=(\overline{x_1x_2x_3-x_1^3-x_2^3})^{\alpha}(\overline{x_1-ax_2})^{2m}.$$

Tenendo presente che $\mathcal{M}\cdot\{x_1x_2x_3-x_1^3-x_2^3=0\}=12\,\mathsf{r}$, $\mathcal{M}\cdot\{x_1-ax_2=0\}=\mathsf{c}+2\mathsf{r}$ e che $\mathcal{M}\cap\mathcal{G}=\mathsf{c}$, si deduce che $3\alpha+m=0$; pertanto $\alpha<0$. Posto $-\alpha=\beta$, si ha $m=3\beta$ e quindi

$$('')\qquad (\overline{x_1x_2x_3-x_1^3-x_2^3})^{\beta}\bar{G}=(\overline{x_1-ax_2})^{6\beta}.$$

Tenuto conto delle relazioni valide in $k[\mathcal{M}']$, l'ultima uguaglianza è equivalente a:

$$\overline{x_1^{8\beta}x_0^{\beta}G}=(\overline{x_1x_3x_0-x_2^2x_0-x_1^2x_2})^{2\beta}(\overline{x_1-ax_2})^{6\beta}.$$

Esiste pertanto un polinomio $\Phi\in k[x_0,x_1,x_2,x_3]$ tale che

$$x_1^{8\beta}x_0^{\beta}G=(x_1x_3x_0-x_2^2x_0-x_1^2x_2)^{2\beta}(x_1-ax_2)^{6\beta}+\Phi M'.$$

Si esegua la sostituzione, come già si è fatto per la $(*)$, $x_2=hx_1$, $h\in k$, ottenendo:

$$x_1^{8\beta}x_0^{\beta}\tilde{G}=x_1^{8\beta}(x_3x_0-h^2x_1x_0-hx_1^2)^{2\beta}(1-ha)^{6\beta}+\widetilde{\Phi M'}$$

$\widetilde{\Phi M'}$ è divisibile per $x_1^{8\beta}$ quando $h\neq0$, mentre è divisibile almeno per $x_1^{8\beta+1}$ quando $h=0$. Affinchè ciò sia possibile è necessario che $G=(x_3^2x_0)^{\beta}+x_1L_1+x_2L_2$, con L_1 e L_2 polinomi opportuni. D'altra parte la $('')$ è equivalente anche alla:

$$\overline{x_2^{8\beta}x_0^{\beta}G}=(\overline{x_2x_3x_0-x_1^2x_0-x_1x_2^2})^{2\beta}(\overline{x_1-ax_2})^{6\beta};$$

pertanto esiste un polinomio $\psi\in k[x_0,x_1,x_2,x_3]$ tale che

$$x_2^{8\beta}x_0^{\beta}G=(x_2x_3x_0-x_1^2x_0-x_1x_2^2)^{2\beta}(x_1-ax_2)^{6\beta}+\psi M'.$$

Anche in questa relazione, effettuata la sostituzione $x_1=hx_2$, $h\in k$, si vede che $\widetilde{\psi M'}$ è divisibile per $x_2^{8\beta}$ quando $h\neq0$ e almeno per $x_2^{8\beta+1}$

quando $h = 0$. Ciò, per a tale che $a^{6\beta} \neq 1$, la cui esistenza è assicurata dalle ipotesi su k, è in contrasto con l'espressione di G sopra determinata. Non esiste dunque alcuna superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ tale che $\mathcal{M}' \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$ e quindi $\mathcal{M}'$ non è a curve s.i.c.

Nel caso in cui $A = A_1 A_2$, con A_1 forma lineare e A_2 forma irriducibile del secondo ordine di $k[x_1, x_2, x_3]$, procedendo con un metodo analogo a quello usato nei casi precedenti, si ottengono monoidi linearmente isomorfi ad uno dei sequenti:

$$x_1(x_1x_3 + x_2^2)x_0 + x_1^4 + x_2^2(x_1x_3 + x_2^2) = 0 \; ; \tag{6}$$

$$x_1(x_2x_3 + x_1^2)x_0 + x_2^4 = 0 \; ; \tag{$*$}$$

Per dimostrare che tali superficie non sono a curve s.i.c. si può procedere, per quanto concerne la (6), nell'ipotesi che k sia di caratteristica zero e più che numerabile, come per la (4); mentre per la seconda delle due come per le precedenti $(*)$.

Qualora A si spezzi nel prodotto di forme lineari, poichè su $\mathcal{M}$ c'è una sola retta per O, i piani $\mathcal{A}_i = \{A_i = 0\}$ appartengono ad uno stesso fascio di sostegno r ed inoltre $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{M} = \mathsf{r}$. Pertanto deve risultare $i < 3$ altrimenti r sarebbe tripla per $\mathcal{M}$. I monoidi singolari lungo la retta r che rientrano in questo caso sono linearmente isomorfi ad uno dei seguenti:

$$x_1^2x_2x_0 + x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2x_3^2 + tx_1x_2^3 = 0\,, \tag{$**$}$$

$$x_1^3x_0 + x_2^4 + ax_1^2x_2^2 + bx_1x_2^3 + cx_1^2x_2x_3 + dx_1x_2^2x_3 + ex_1^2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 = 0\,,$$

$$x_1^3x_0 + x_2^4 + ax_1^2x_2^2 + bx_1x_2^3 + cx_1x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2 = 0\,. \tag{7}$$

Tali superficie non sono a curve s.i.c.: per la prima si può procedere come per la precedente $(**)$ sotto le stesse ipotesi su k; la seconda contiene due curve sghembe; per la (7) si può procedere come per la (4), nell'ipotesi che k sia di caratteristica zero e più che numerabile.

5.2. Su $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$ oltre alla retta doppia ci sia una seconda retta per O che si può supporre essere la $\mathsf{s} = \{x_1 = x_3 = 0\}$. Dalla proposizione 1.2 si deduce che A deve essere riducibile in almeno due fattori (distinti).

Sia $A = A_1 A_2$, con A_1 forma lineare e A_2 forma irriducibile del secondo ordine. Se il piano $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$, che deve contenere r, non passa per s, allora $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{M} = \mathsf{r}$. Detto $\{L = 0\}$ un piano per r, che individua su $\mathcal{M}$ una conica irriducibile c, dalla proposizione 1.3 si deduce che per ogni superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ di ordine m tale che $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathsf{c}$, deve valere:

$$\bar{G} = \bar{A}_1^{\alpha} \bar{A}_2^{\beta} \bar{L}^{2m} .$$

D'altra parte, poichè $\mathcal{M} \cap \{A_2 = 0\} = \mathsf{r} \cup \mathsf{s}$, deve essere $\beta = 0$. Inoltre deve risultare nulla anche la molteplicità di intersezione di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ lungo r; pertanto $4\alpha + 4m = 0$. α risulta allora negativo. Dovendo $\mathcal{G}$ contenere il punto triplo 0 di $\mathcal{M}$, dalla proposizione 1.3 si deduce che $-\alpha \leqslant m - 1$, ma ciò è in contrasto con quanto sopra scritto. Non vi è dunque alcuna superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$ e quindi i monoidi singolari lungo r di questo tipo, tali cioè che $\mathcal{A}_1$ non contenga s, non sono a curve s.i.c..

Nel caso in cui $\mathcal{A}_1$ sia il piano individuato da r e da s, i monoidi singolari lungo la sola retta r e che non contengono rette sghembe sono linearmente isomorfi ad una delle seguenti superficie:

$$(*) \qquad x_1(x_1x_3 + x_2^2)x_0 + tx_1^4 + x_2x_3(x_1x_3 + x_2^2) = 0 , \qquad t \neq 0;$$

$$(\circ) \qquad x_1(x_2x_3 + x_1^2)x_0 + tx_1^2x_3^2 + x_2^2(x_2x_3 + x_1^2) = 0 , \qquad t \neq 0 .$$

Per dimostrare che sulla prima delle due c'è una conica che non è s.i.c., si può procedere come per le precedenti superficie contrassegnate con $(*)$. Per la seconda si consideri la conica c individuata su $\mathcal{M}$ dal piano $\{x_1 - x_2 = 0\}$. Dalla proposizione 1.3 si deduce che per ogni superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ di ordine m tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$, deve risultare:

$$\bar{G} = \bar{x}_1^{\alpha} \overline{(x_2x_3 + x_1^2)}^{\beta} \overline{(x_1 - x_2)}^{2m} .$$

Da $\mathcal{M} \cdot \{x_1 = 0\} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$, $\mathcal{M} \cdot \{x_2x_3 + x_1^2 = 0\} = 2\mathsf{r} + 6\mathsf{s}$ e $\mathcal{M} \cdot \{x_1 - x_2 = 0\} = \mathsf{c} + 2\mathsf{r}$, segue $3\alpha + 2\beta + 4m = \alpha + 6\beta = 0$, cioè $m - 4\beta = \alpha + 6\beta = 0$. α risulta dunque negativo e quindi, per la proposizione 1.3, $-\alpha \leqslant m - 1$, ma ciò è in contrasto con le relazioni sopra scritte. c non è dunque s.i.c. su $\mathcal{M}$.

Sia $A = A_1 A_2 A_3$, con A_i forme lineari a due a due non proporzionali. Si ottengono monoidi linearmenti isomorfi ad uno dei seguenti:

$$(**) \qquad x_1x_2(x_1+x_2)x_0 + x_1x_2^3 + a(x_1+x_2)(x_2x_3^2 - x_1^3) = 0, \qquad a \neq 0;$$

$$(*) \qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^3x_3 + x_1^4 = 0\,;$$

$$(**) \qquad x_1x_2x_3x_0 + (x_1+x_2)^4 = 0\,.$$

Si verifica che tali superficie non sono a curve s.i.c. procedendo come per le rimanenti superficie contrassegnate con lo stesso simbolo e sotto le stesse ipotesi su k.

Sia $A = A_1A_2^2$, con A_1 e A_2 forme lineari non proporzionali. Si ottengono monoidi linearmente isomorfi ad uno dei seguenti:

$$(\circ) \quad x_1^2x_2x_0 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2(ax_2^2 + bx_2x_3 + cx_3^2) + dx_1^4 = 0, \qquad ad \neq 0;$$

$$(\circ) \quad x_1^2x_2x_0 + x_2^3x_3 + x_1x_2(ax_2^2 + bx_2x_3 + cx_3^2) + dx_1^4 = 0, \qquad cd \neq 0;$$

$$(8) \qquad x_1^2x_3x_0 + x_2^3x_3 + x_1x_2x_3(ax_2 + bx_3) + cx_1^4 = 0, \qquad c \neq 0;$$

$$x_2^2x_3x_0 + x_1^4 + x_1x_2x_3(ax_1 + x_3) = 0;$$

$$(\circ) \qquad x_2^2x_3x_0 + x_1^4 + x_1^2x_2x_3 = 0;$$

$$(9) \qquad x_2^2x_3x_0 + x_1^4 = 0;$$

$$x_1x_2^2x_0 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2(ax_1^2 + bx_1x_3 + cx_3^2) + dx_1^4 = 0, \qquad cd \neq 0;$$

$$(10) \qquad x_1x_2^2x_0 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2(ax_1^2 + bx_1x_3) + cx_1^4 = 0, \qquad c \neq 0;$$

$$(*) \qquad x_1x_2^2x_0 + x_2^3x_3 + x_1x_2x_3(ax_1 + bx_3) + cx_1^4 = 0, \qquad bc \neq 0\,.$$

Per le superficie contrassegnate con $(*)$ e $(\circ)$ si procede come per quelle con la stessa notazione; per la (8) come per la superficie del § 3; per la (9) e la (10) come per la (4). (I criteri adottati per le (8), (9), (10) richiedono, come la (4) e le superficie del § 3, che k sia di caratteristica zero e più che numerabile). Le rimanenti contengono due curve sghembe.

5.3. Su $\mathcal{M}$, oltre a r, ci siano due rette s e t. Le tre rette possono essere complanari o no. Si ottengono superficie che o contengono coppie di rette sghembe oppure sono linearmente isomorfe ad una tra le:

$$(\circ)\qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^2(x_2 + x_3)x_3 + ax_1^4 = 0, \qquad a \neq 0;$$

$$(\circ)\qquad x_1x_2(x_1 + x_2)x_0 + x_1^3x_2 + x_3^2(x_1 + x_2)(ax_1 + bx_2) = 0, \qquad ab \neq 0;$$

$$(\circ)\qquad x_1x_2(x_1 + x_2)x_0 + x_1^3x_2 + x_3(x_1 + x_2)(ax_1^2 + bx_2x_3) = 0, \qquad ab \neq 0;$$

$$(\circ)\qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^2(x_3 + x_2)^2 + x_1^3x_3 = 0;$$

$$(\circ)\qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^2x_3^2 + ax_1x_2^3 + bx_1^3x_3 = 0; \qquad ab \neq 0;$$

$$(\circ)\qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^3(x_2 + x_3) + x_1^3x_3 = 0;$$

$$(\circ)\qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^3x_3 + x_1x_2^3 + ax_1^3x_3 = 0, \qquad a \neq 0;$$

$$(11)\qquad x_1x_2x_3x_0 + x_2^3x_3 + x_1^2x_2^2 + ax_1^3x_3 = 0, \qquad a \neq 0\,.$$

Per dimostrare che la (11) non è a curve s.i.c. si procede come per le superficie del § 3, per le altre come per le precedenti superficie contrassegnate con (o).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Conforto, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939.

[2] P. C. Craighero - R. Gattazzo - C. Ronconi, *Superficie cubiche di $A^3_{\mathbf{C}}$ a curve sottoinsieme intersezione completa*, Ann. di Mat. Pura e Appl. Serie IV, Tomo CXXIX (1981).

[3] D. Gallarati, *Problemi di completa interferenza in geometria algebrica*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, **46** (3-4) (1976), pp. 242-270.

[4] M. C. Ronconi, *Monoidi del quarto ordine di $\mathbf{P}^3_k$ a curve sottoinsieme intersezione completa*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. **72**.

[5] E. Stagnaro, *Le superficie cubiche di $\mathbf{P}^3$ a curve sottoinsieme intersezione completa*, Atti Acc. Ligure Sc. Let., **31** (1974), pp. 138-148.

[6] E. Stagnaro, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 157-179.

[7] E. Stagnaro, *Sulle curve razionali non singolari di ordine quattro di $\mathbf{P}^3_k$*, Rend. Acc. Naz. Sc. Mem. Mat. (1982-83).

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 Febbraio 1984.