RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WOLFRAM BÜTTNER

Automorphismengruppen von Translationsebenen, die gewisse verallgemeinerte Elationen besitzen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 74 (1985), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 74 (1985)

Automorphismengruppen von Translationsebenen, die gewisse verallgemeinerte Elationen besitzen.

WOLFRAM BÜTTNER (*)

Unter einer Translationsebene $(V, \mathcal{N})$ verstehen wir im folgenden einen endlichdimensionalen Vektorraum V, der ein Spread $\mathcal{N}$ besitzt, d. h. ein System halbdimensionaler Unterräume, die sich paarweise trivial schneiden und den Raum überdecken. Ein Automorphismus von $(V, \mathcal{N})$ ist eine semilineare Bijektion des Raumes auf sich, die $\mathcal{N}$ invariant läßt. Ist diese Bijektion linear, so sprechen wir von einem linearen Automorphismus der Ebene. Es existieren zahlreiche Beispiele von Ebenen $(V, \mathcal{N})$, die lineare Automorphismen besitzen, deren Ordnung gleich der Vektorraumdimension ist. Mit der folgenden Definition erfassen wir einen Teil dieser Beispiele.

DEFINITION. $(V, \mathcal{N})$ bezeichne eine Translationsebene der Charakteristik 2, mit $\dim V < \infty$. Ein linearer Automorphismus s der Ebene von 2-Potenzordnung heißt maximal, falls $\langle s \rangle$ direkt unzerlegbar auf V operiert.

Man beachte, daß diese Definition von dem Körper abhängt, über dem V konstruiert wurde. Ist s eine Involution, dann liegt eine desarguessche Ebene vor. Wir beweisen in dieser Note den folgenden Satz.

SATZ. *$(V, \mathcal{N})$ sei eine Translationsebene der Charakteristik 2, die maximale lineare Automorphismen zulasse.*

$$G := \langle s \mid s \text{ maximaler linearer Automorphismus von } (V, \mathcal{N}) \rangle .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt, Schloßgartenstraße 7, D-6100 Darmstadt.

Dann gilt:

i) *Die maximalen linearen Automorphismen sind verallgemeinerte Elationen, ihre Ordnung ist gleich der Dimension von V.*

ii) *Enthält G maximale lineare Automorphismen s, s', so daß die Involutionen aus $\langle s \rangle$ bzw. $\langle s' \rangle$ nicht vertauschen, dann ist V ein (absolut) irreduzibler G-Modul. Für endliche Ebenen ist G eine der folgenden Gruppen.*

iii) $G \cong SL(2, 2^l) \cdot \langle s \rangle$ *mit* $o(s)/2 | l$.

iv) $G \cong Sz(q)$ *und* $o(s) = 4$.

v) $G \cong Z_n \cdot \langle s \rangle$. *Für jede Untergruppe R von Z_n gilt* $\dim V | |R| - 1$. *Ferner operiert R fixpunktfrei auf den Geraden sowie auf den von O verschiedenen Punkten von $(V, \mathcal{N})$.*

Bemerkung 1. Die in iii), iv) beschriebenen Möglichkeiten lassen sich durch Ebenen der Ordnung 64 realisieren [1]. Serien von Ebenen vom Typ (iv) sind etwa die Lüneburgebenen. Noch offen scheint die Frage der Existenz von Ebenen, die maximale lineare Automorphismen einer Ordnung 2^n $(n \geqslant 3)$ zulassen.

Bemerkung 2. Offen ist ferner die Frage, welche Struktur G hat, falls die Involutionen aus $\langle s \rangle$ (s durchläuft die maximalen linearen Automorphismen von G) eine elementar abelsche Gruppe bilden. Teilresultate liegen im Fall $\dim V = 4$ vor.

Die verwendete gruppentheoretische und geometrische Bezeichnungsweise ist die übliche. Es sei $V := V(2n, \mathbb{K})$ mit einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 2. Für $|V| < \infty$ sei $\mathbb{K} \cong GF(q)$ mit $q = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$. $\mathcal{N}$ bezeichne einen Spread in V und G das Erzeugnis aller maximalen linearen Automorphismen von $(V, \mathcal{N})$. Für einen solchen Automorphismus s sei i_s die Involution aus $\langle s \rangle$.

Beweis des Satzes:

i) Ein maximaler linear Automorphismus s der Ordnung 2^r besitzt die eindeutig bestimmte Kompositionsreihe

$$\{0\} \subset V^{(s-1)^{2^{r-1}}} \subset \ldots \subset V^{(s-1)^{2^{r-1}}} = V^{(s^{2^{r-1}}-1)} = \mathbb{C}_V(i_s) \subset \ldots \subset V^{s-1} \subset V .$$

Da $i_s = s^{2^{r-1}}$ auf $(V, \mathcal{N})$ eine Elation oder eine Baerinvolution induziert gilt $\dim \mathbb{C}_V(i_s) = n$. $\langle s \rangle$ läßt eine « Gerade » aus $\mathcal{N}$ fest. Wegen der Eindeutigkeit der Kompositionsreihe von $\langle s\rangle$ fällt diese Gerade mit $C_V(i_s)$ zusammen. Folglich bewirkt i_s eine Elation auf $(V, \mathcal{N})$. Da die 2^r Kompositionsfaktoren 1-dimensional sind, gilt $\dim V = o(s)$.

ii) $\{0\} \underset{\neq}{\subseteq} U \subset V$ sei ein G-invarianter Unterraum von V. s, s' bezeichnen maximale lineare Automorphismen, so daß $i_s, i_{s'}$ nicht miteinander vertauschen. U ist $\langle s\rangle$-bzw. $\langle s'\rangle$-invariant und liegt daher in den zu $\langle s\rangle$ bzw. $\langle s'\rangle$ gehörenden Kompositionsreihen. Wäre $\dim U \leqslant \dim V/2$, dann gälte $U \subseteq C_V(i_s) \cap C_V(i_{s'}) = \{0\}$ entgegen der Wahl von s und s'. Also $\dim U > \dim V/2$, d. h. $U \supseteq \langle C_V(i_s) \cup \cup C_V(i_{s'})\rangle = V$. Ersetzen wir V durch $V \underset{\mathbf{K}}{\otimes} L$ mit einem Erweiterungskörper L von $\mathbf{K}$, dann lassen sich die gleichen Schlüsse anwenden. Folglich ist V ein absolut irreduzibler G-Modul Nach i) existieren in G Elationen, G_E bezeichne ihr Erzeugnis. Die Klassifikation der von den Elationen einer endlichen Translationsebene der Charakteristik 2 erzeugten Gruppen [3] zeigt, daß G_E zu einer der folgenden Gruppen isomorph ist: $SL(2, 2^l)$, $Sz(2^k)$ oder $N\cdot\langle i\rangle$ mit einer Involution i und einem Normalteiler N von ungerader Ordnung.

iii) Nehmen wir an $G_E \simeq SL(2, 2^l)$. Bekanntlich gilt $\mathrm{Aut}\,(SL(2, 2^l) \simeq SL(2, 2^l)\cdot Z_l$. Da $i_s \in G_E$ und $Z(G_E) = 1$ operiert $\langle s\rangle$ durch Konjugation treu auf G_E. $SL(2, 2^l)$ enthält nur involutorische 2-Elemente, folglich $o(s)/2 = \dim V/2 | l$.

iv) Ist G_E isomorph zu $Sz(2^k)$, dann hat der durch Konjugation mit s bewirkte Automorphismus von G_E eine Ordnung $\leqslant 4$. Falls $s^4 \neq 1$, dann wird G_E von s^4 zentralisiert. Die verallgemeinerte Elation s^4 läßt genau eine Gerade aus $\mathcal{N}$ fest, die folglich auch unter G_E fest bleibt. Nicht kommutierende Involutionen aus G_E induzieren jedoch auf $(V, \mathcal{N})$ Elationen mit verschiedenen Achsen. Also gilt $G_E = G \simeq Sz(q)$.

v) Nehmen wir schließlich an $G_E = N\cdot\langle i_s\rangle$ mit einem Normalteiler N von G_E von ungerader Ordnung. $M := O_{2'}(G)$, also $M \supseteq N$.

Wie in ii) zeigt man, daß V irreduzibler $M\cdot\langle s\rangle$-Modul ist.

Der Satz von Clifford [2] S. 70 ff. mit M als Normalteiler liefert $V = \bigoplus_{i=1}^{t} W_i$, wobei W_i von allen paarweise isomorphen irreduziblen M-Teilmoduln von V erzeugt wird. $\langle s\rangle$ permutiert transitiv die Räume W_i. Operiert $\langle s\rangle$ scharf transitiv auf den W_i, dann ist M zyklisch und ein Erzeuger m von M besitzt genau $\dim V$ verschiedene Eigenwerte. Also läßt m genau 2 Geraden aus $\mathcal{N}$ fest, die von $\langle s \rangle$ permutiert werden. Folglich gilt $s^2 = 1$ und $(V, \mathcal{N})$ ist desarguessche Ebene.

Im nicht desarguesschen Fall bleiben die Moduln W_i fest unter einer Untergruppe $\langle s_0 \rangle$ von $\langle s \rangle$. $W_i = \bigoplus_j U_{ij}$ mit $U_{ij} \cong U_{ij'}$. Nach Theorem 5.6 aus [2], pg. 79 enthält W_i eine ungerade Anzahl von irreduziblen M-Teilmoduln. Auf diesen operiert $\langle s_0 \rangle$ und läßt folglich einen dieser Moduln, etwa U_{ij_0} fest. $U_{ij_0}^{\langle s \rangle}$ ist ein $M \cdot \langle s \rangle$ invarianter Unterraum von V, also gilt $V = U_{ij_0}^{\langle s \rangle}$. Dies erzwingt $U_{ij_0} = M_i$.

N_i bezeichne den Kern der Darstellung von M auf M_i. Also operiert M/N_i treu auf M_i. Da $\langle s \rangle$ die Moduln M_i transitiv bewegt, ist die Dimension von M_i eine 2-Potenz. In dieser Situation greift ein Satz aus [4] S. 711 und zeigt, daß M/N_i zyklisch ist. Folglich gilt $[M, M] \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} N_i = \{1\}$ und M ist abelsch. Wir zeigen nun, daß M_i trivial ist und haben damit M als zyklische Gruppe nachgewiesen.

Die Achsen der Elationen aus G werden von G permutiert. Wir analysieren den Kern H der Darstellung von G auf diesen Geraden. Ähnlich wie für M erschließen wir:

Ist $O_{2'}(H)$ nichttrivial, dann operiert $O_{2'}(H) \cdot \langle s \rangle$ irreduzibel auf V und V gestattet eine Zerlegung in paarweise nichtisomorphe, irreduzible $O_{2'}(H)$-Teilmoduln. $O_{2'}(H)$ läßt definitionsgemäß alle Elationenachsen fest. Nach dem Satz von Jordan-Hölder gibt es dann höchstens zwei solcher Achsen, ein Widerspruch.

Also gilt $O_{2'}(H) = 1$.

N_i operiert trivial auf M_i. M_i bleibt fest unter allen Elationen aus G und daher liegt N_i in H. Mit $\langle N_i | 1 \leqslant i \leqslant t \rangle \subseteq O_{2'}(H) = \{1\}$ folgt $N_i = \{1\}$ und wir erhalten $M \cong Z_n$.

Wir berechnen den Zentralisator von M in G. S bezeichne eine Sylow-2-Gruppe von G und s einen maximalen linearen Automorphismus in S. $C_S(M) < S$. Nehmen wir an, $C_S(M) > 1$. Dann vertauscht s mit einer Involution $j \in C_S(M)$. Diese Involution zentralisiert G_E, und ist somit eine Baerinvolution. $C_V(j)$ ist der eindeutige Unterraum aus der Kompositionsreihe von $\langle s \rangle$ der Dimension $\dim V/2$. Also gilt $C_V(j) = C_V(i_s)$, ein Widerspruch, da i_s eine Elation induziert. Folglich gilt $C_S(M) = 1$ und damit $C_G(M) = M$. Da $G/M \cong S$ treu auf M operiert, ist S abelsch. Wie oben sieht man, daß S keine Baerinvolution enthalten kann. Demnach enthält S genau eine Involution, nämlich i_s und S ist als zyklisch erkannt.

Wir haben bereits $O_{2'}(H)$ als trivial nachgewiesen. Die Zerlegung

$G = M \cdot \langle s \rangle$ liefert $H = \{1\}$. Für jede Untergruppe R von M gilt $\mathbf{C}_G(R) \supseteq M$. Wird R von einer Involution (d. h. Elation) aus G zentralisiert, dann bereits von allen und $R \subseteq H = \{1\}$. Also $\mathbf{C}_G(R) = M$ für alle nichttrivialen Untergruppen R von M. Insbesondere ergibt sich die Teilbarkeitsaussage aus v). Wie für M schließen wir: V ist irreduzibler $R \cdot \langle s \rangle$-Modul und wird in paarweise nichtisomorphe, irreduzible R-Teilmoduln zerlegt. Besitzt R im projektiven Abschluß von $(V, \mathcal{N})$ einen von O verschiedenen Fixpunkt, dann läßt R eine Gerade l aus $\mathcal{N}$ fest. Wegen $\mathbf{C}_G(R) = M$ ist l sicherlich nicht Achse einer Elation aus G. Folglich stabilisiert R die Geraden 1^{s^i} $(1 \leqslant i \leqslant \dim V)$.

Aus dem Satz von Jordan-Hölder und der Zerlegung von V in paarweise nichtisomorphe irreduzible R-Teilmoduln folgt nun der gewünschte Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] W. Büttner, *Einige Translationsebenen der Ordnung* 64, Preprint FB Mathematik, TH Darmstadt (1983).

[2] D. G. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, Evanston, London (1968).

[3] Chr. Hering, *On shears of translation planes*, Abh. Math. Sem. Hamb., **37** (1972).

[4] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 giugno 1983.