RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$, con $A(t)$ matrice 2×2, nel caso oscillante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 74 (1985), p. 175-204

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__175_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 74 (1985)

Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$, con $A(t)$ matrice 2×2, nel caso oscillante.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - A linear homogeneous system of two ordinary scalar differential equations, in the case of oscillatory solutions, is asymptotically solved in two ways, using two different systems asymptotically equivalent to a convenient canonical form of the given system. For both the proposed solutions strict numerical bounds of the error are given and compared.

1. Introduzione.

Molti lavori sono stati dedicati al problema dell'equivalenza asintotica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie e anche qualche trattato ne parla (si veda ad esempio [3], [5], [9], [16]). In accordo con alcuni autori diciamo asintoticamente equivalenti due sistemi se esiste una corrispondenza biunivoca fra le loro soluzioni tale che la differenza di soluzioni corrispondenti tenda a zero quando la variabile indipendente $t \to +\infty$.

Nel paragrafo 3 di questo lavoro (per completezza poichè viene successivamente utilizzato) un risultato noto relativo all'equivalenza asintotica di sistemi di equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti continui (in presenza di una perturbazione continua e sommabile) viene esteso al caso di sistemi a coefficienti localmente sommabili (con perturbazione sommabile).

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7. Università, 35131 Padova (Italy).

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

Argomento di questa ricerca è il comportamento asintotico del sistema

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{1.1}$$

dove $A(t) = (a_{ij}(t))$ è una matrice 2×2, $a_{ij}(t)$ sono funzioni reali di variabile reale t appartenenti a $L_{\mathrm{loc}}([0, +\infty))$. Il sistema viene studiato nel caso oscillante. Con ciò si intende che, detta $y(t) = (y_i(t))$, $i = 1, 2$, una qualunque soluzione non identicamente nulla di (1.1), le funzioni $y_1(t)$, $y_2(t)$ posseggono sulla semitetta $[0, +\infty)$ infiniti zeri isolati che si separano mutuamente (si veda W. T. Reid [18]).

Lo studio asintotico di (1.1) si effettua sulla sua forma canonica

$$\frac{dz}{dx} = C(x)z \qquad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

ricavata nel paragrafo 2 nelle ipotesi I_1, I_2, I_3. La variabile x è definita da (2.6), la funzione $\omega(x)$ da (2.8).

Vengono proposti due sistemi asintoticamente equivalenti al sistema (1.2), rispettivamente nei paragrafi 4 e 5. I risultati principali sono contenuti nel teorema 1 (paragrafo 4) e nel teorema 2 (paragrafo 5). In entrambi i teoremi il maggiore interesse delle soluzioni asintotiche proposte, e nel caso del primo teorema l'unica novità, consiste nell'aver ottenuto le maggiorazioni esplicite dei resti (formule (4.6), (5.7)). Ciò è stato possibile riconoscendo che i resti verificano un sistema di equazioni integrali non lineari (tali sono ad esempio (4.23), (4.24)).

Nei paragrafi 6 e 7 si confrontano le dette maggiorazioni dei resti, si ritorna alle soluzioni del sistema (1.1) e si discutono alcuni esempi.

2. Riduzione del sistema a forma canonica.

2.*A* Si considera il sistema

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{2.1}$$

nelle ipotesi seguenti che saranno giustificate nella sezione 2.*C*.

I_1) La matrice $A(t) = \bigl(a_{ij}(t)\bigr)$ appartiene a $L_{\mathrm{loc}}\bigl([0, +\infty)\bigr)$ e le funzioni $a_{12}(t)$, $a_{21}(t)$ appartengono ad $AC_{\mathrm{loc}}\bigl([0, +\infty)\bigr)$.

I_2) Valgono le disuguaglianze

$$a_{12}(t) > 0, \qquad a_{21}(t) < 0 \qquad \forall t \in [0, +\infty) \tag{2.2}$$

e l'uguaglianza

$$a_{12}(0) + a_{21}(0) = 0\,. \tag{2.3}$$

I_3) Si ha

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{-a_{12}(t)\,a_{21}(t)}\;dt = +\infty\,. \tag{2.4}$$

In queste ipotesi, mediante l'applicazione successiva di una trasformazione lineare $T_1(t)$, di un cambio di variabile indipendente $x = \varphi(t)$ e di una seconda trasformazione lineare $T_2(x)$, il sistema (2.1) si muta nel sistema

$$\frac{dz}{dx} = C(x)\,z \qquad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix} \tag{2.1'''}$$

che dipende dall'unica funzione $\omega(x)$ definita in (2.8).

2.*B* Posto

$$T_1(t) = \begin{pmatrix} \exp\left[\int_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[\int_0^t a_{22}(\tau)\,d\tau\right] \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

la trasformazione $y = T_1(t)\tilde{y}$ muta il sistema (2.1) nel sistema (°)

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{A}(t)\,\tilde{y} \tag{2.1'}$$

(°) La trasformazione $T_1(t)$ è nota; si veda ad esempio, in altre ipotesi, Los' [13].

dove

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(t)\exp\int\limits_0^t [a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)]\,d\tau \\ a_{21}(t)\exp\int\limits_0^t [a_{11}(\tau) - a_{22}(\tau)]\,d\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduco ora la variabile

$$x = \varphi(t) = \int\limits_0^t \sqrt{-a_{12}(\tau)\,a_{21}(\tau)}\,d\tau \tag{2.6}$$

che per la (2.4) muta la semiretta $[0, +\infty)$ in sè. Detta ψ l'inversa di φ e posto $\tilde{y}(\psi(x)) = \tilde{z}(x)$ il sistema (2.1′) si muta in

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = \tilde{C}(x)\,\tilde{z} \tag{2.1″}$$

dove

$$\tilde{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \exp\left[2\int\limits_0^x \omega(s)\,ds\right] \\ -\exp\left[-2\int\limits_0^x \omega(s)\,ds\right] & 0 \end{pmatrix}$$

avendo posto

$$\exp\left[2\int\limits_0^x \omega(s)\,ds\right] = \left\{\left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left[\int\limits_0^t \big(a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)\big)\,d\tau\right]\right\}\circ\psi \tag{2.7}$$

e quindi q.o. in $[0, +\infty)$

$$\omega(x) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\left\{\left[\log\left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)}\right)^{\frac{1}{2}} + \int\limits_0^t [a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)]\,d\tau\right]\circ\psi\right\}. \tag{2.8}$$

Dalle ipotesi I_1, I_2, I_3, risulta $\omega \in L_{\mathrm{loc}}([0, +\infty))$.

Eseguo finalmente la trasformazione lineare

$$(2.9) \qquad \tilde{z} = T_2(x)z \qquad T_2(x) = \begin{pmatrix} \exp\left[\int_0^x \omega(s)\,ds\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-\int_0^x \omega(s)\,ds\right] \end{pmatrix}$$

questa conduce dal sistema (2.1″) alla forma canonica desiderata

$$(2.1''') \qquad \frac{dz}{dx} = C(x)z \qquad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix}.$$

2.C Avendo scelto di studiare sistemi oscillanti conviene supporre $a_{12}(t)\cdot a_{21}(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, +\infty)$; questa ipotesi garantisce infatti l'applicabilità al sistema (2.1′) del teorema (2.1) pag. 31 di W. T. Reid [18] concernente il carattere oscillante delle soluzioni. In realtà la condizione $a_{12}(t)\cdot a_{21}(t) \neq 0$, tenuto conto di I_1, non basta: va sostituita con $a_{12}(t)\cdot a_{21}(t) < 0$ da cui segue, per fissare le idee, la prima delle ipotesi I_2. Infatti se fosse $a_{12}(t)\cdot a_{21}(t) > 0$ $\forall t \in [0, +\infty)$ il sistema non potrebbe essere oscillante perchè, considerata una soluzione non banale $y(t) \equiv (y_i(t))$ $(i = 1, 2)$ di (2.1) e la funzione

$$\alpha(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)]\,d\tau\right]\cdot y_1(t)\cdot y_2(t)\,,$$

si avrebbe q.o. in $[0, +\infty)$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \exp\left[-\int_{t_0}^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)]\,d\tau\right]\cdot [a_{21}(t)y_1^2(t) + a_{12}(t)y_2^2(t)]$$

e ne discenderebbe la monotonia di $\alpha(t)$ e l'impossibilità che $y_1(t)\cdot y_2(t)$ si annulli più di una volta in $[0, +\infty)$. Infine la seconda delle ipotesi I_2, che è comoda perchè evita l'introduzione di una costante opportuna nella (2.7), non è per nulla restrittiva. Infatti, se il sistema (2.1) non la verificasse, l'affinità

$$y_1 = y_1^* \qquad y_2 = \sqrt{-\frac{a_{21}(0)}{a_{12}(0)}}\, y_2^*$$

lo trasformerebbe in un sistema che la verifica.

3. Equivalenza asintotica per una classe di sistemi lineari.

Riportiamo il seguente classico teorema in una versione leggermente modificata. Esso verrà utilizzato marginalmente nella dimostrazione del teorema 1 del paragrafo 4 e completamente in quella del teorema 2 del paragrafo 5. In questo paragrafo non è necessario scegliere particolari norme per matrici e vettori; essenziale è soltanto che la norma del loro prodotto non superi il prodotto delle loro norme.

TEOREMA. Considerati i due sistemi lineari

$$u' = D(x)\, u \tag{3.1}$$

$$z' = [D(x) + B(x)]z\,, \tag{3.2}$$

dove $B(x)$, $D(x)$ sono matrici $n \times n$ appartenenti a $L_{\mathrm{loc}}[0, +\infty)$, se tutte le soluzioni del sistema (3.1) sono limitate, e se

$$\min\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \operatorname{tr} D(s)\, ds > -\infty\,, \tag{3.3}$$

$$\int_0^{+\infty} \|B(x)\|\, dx < +\infty\,, \tag{3.3'}$$

allora i due sistemi (3.1), (3.2) sono asintoticamente equivalenti.

Nelle stesse ipotesi la corrispondenza biunivoca S esistente tra le soluzioni dei sistemi (3.1), (3.2) è un omeomorfismo per la topologia della convergenza uniforme in $[0, +\infty)$.

OSSERVAZIONE. La prima parte dell'enunciato ora riportato si trova in F. Brauer [3] pag. 35, più completo è l'enunciato che si legge in A. Wintner [19] pag. 200; entrambi gli autori suppongono però che le matrici $B(x)$, $D(x)$ siano continue in $[0, +\infty)$.

Vista la modifica delle ipotesi e la più precisa formulazione della tesi, riportiamo qui una dimostrazione del teorema. Essa è diversa da quelle degli autori sopra citati, ma si ispira a metodi largamente usati (peraltro sempre in ipotesi di continuità) in teoremi strettamente simili; si veda [9], [16].

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo dapprima che tutte le soluzioni di (3.2) sono limitate in $[0, +\infty)$. Sia $U(x)$ una matrice fondamentale di soluzioni di (3.1). L'ipotesi $\|U(x)\|$ limitata e la (3.3) equivalgono all'esistenza di una costante $k > 0$ tale che

$$(3.4) \qquad \|U(x)U^{-1}(s)\| \leqslant k \qquad \forall (x, s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) .$$

Dalla formula di Lagrange segue che ogni soluzione $z(x)$ di (3.2) verifica l'equazione integrale

$$z(x) = U(x)\,U^{-1}(0)z(0) + \int_0^x U(x)\,U^{-1}(s)B(s)z(s)ds ,$$

dalla quale equazione si ottiene

$$\|z(x)\| \leqslant k\|z(0)\| + k\int_0^x \|B(s)\| \cdot \|z(s)\| ds ,$$

e quindi, per il lemma di Gronwall, si ha (1) in $[0, +\infty)$

$$\|z(x)\| \leqslant k\|z(0)\| \cdot \exp\left[k\int_0^x \|B(s)\| ds\right] \leqslant k\|z(0)\| \cdot \exp\left[k\int_0^{+\infty} \|B(s)\| ds\right] .$$

(1) Per dimostrare che tutte le soluzioni del sistema (3.2) sono limitate sarebbe sufficiente sapere la (3.4) valida per $x \geqslant s \geqslant 0$, ferma restando naturalmente la (3.3'). Si veda per es R. Conti [7], teor. 7' pag. 28, dove queste ipotesi assicurano che i sistemi (3.1), (3.2) siano uniformemente stabili. La validità della (3.4) per $s \geqslant x \geqslant 0$ sarà utilizzata per stabilire l'equivalenza asintotica fra le soluzioni dei due sistemi. Per il lemma di Gronwall si è seguito L. Cesari [6], pag. 35 (3.2.i).

Dimostriamo ora l'equivalenza asintotica dei sistemi (3.1) e (3.2). Sia $a \geqslant 0$ e risulti

$$\theta = k \int_a^{+\infty} \|B(s)\| ds < 1 ; \tag{3.5}$$

dimostriamo dapprima la tesi su $[a, +\infty)$. Sia X lo spazio di Banach delle funzioni continue e limitate di $[a, +\infty)$ in R^n, con la norma

$$\|z\|_\infty = \sup_{x \geqslant a} \|z(x)\| \qquad z \in X .$$

Sia $u(x)$ una soluzione di (3.1); le ipotesi (3.3′), (3.4) ci permettono di definire la corrispondenza $T_u : X \to X$ ponendo

$$T_u z(x) = u(x) - \int_x^{+\infty} U(x) U^{-1}(s) B(s) z(s) ds .$$

Dimostriamo che T_u è una contrazione in X. Se $z_1, z_2 \in X$ si ottiene infatti

$$\|T_u z_1(x) - T_u z_2(x)\| \leqslant k \|z_1 - z_2\|_\infty \int_a^{+\infty} \|B(s)\| ds ,$$

quindi, ricordando la (3.5),

$$\|T_u z_1 - T_u z_2\|_\infty \leqslant \theta \|z_1 - z_2\|_\infty .$$

Pertanto T_u ha un unico punto fisso $z_u(x)$ che risulta soluzione di (3.2), in quanto

$$z_u(x) = u(x) - \int_x^{+\infty} U(x) U^{-1}(s) B(s) z_u(s) ds . \tag{3.6}$$

Definiamo allora la corrispondenza S ponendo $Su = z_u$. Viceversa sia $\tilde{z}(x)$ una soluzione di (3.2) e poniamo

$$\tilde{u}(x) = \tilde{z}(x) + \int_x^{+\infty} U(x) U^{-1}(s) B(s) \tilde{z}(s) ds . \tag{3.7}$$

Si ottiene che $\tilde{u} \in X$ ed è soluzione di (3.1). Inoltre dalla (3.7) segue $\tilde{z} = T_{\tilde{u}}\tilde{z} = S\tilde{u}$. Si conclude con ovvie considerazioni che la corrispondenza S fra le soluzioni di (3.1) e (3.2) è biunivoca e che $\lim_{x \to +\infty} \|u(x) - Su(x)\| = 0$; resta così stabilita in $[a, +\infty)$ l'equivalenza asintotica di (3.1) e (3.2).

Vediamo ora che S è un omeomorfismo per la topologia della convergenza uniforme in $[a, +\infty)$. Sia $z = Su$, $z_0 = Su_0$; tenuto conto della (3.7), si ottiene

$$\begin{aligned} \|u(x) - u_0(x)\| &\leq \|z(x) - z_0(x)\| + \int_x^{+\infty} k\|B(s)\| \cdot \|z(s) - z_0(s)\| ds \\ &\leq \|z - z_0\|_\infty + \|z - z_0\|_\infty \cdot k \int_a^{+\infty} \|B(s)\| ds \\ &\leq (1 + \theta)\|z - z_0\|_\infty \end{aligned}$$

da cui discende

$$\|u - u_0\|_\infty \leq (1 + \theta)\|z - z_0\|_\infty .$$

Analogamente, tenuto conto della (3.6), si ottiene

$$\|z(x) - z_0(x)\| \leq \|u - u_0\|_\infty + \theta\|z - z_0\|_\infty$$

e quindi

$$\|z - z_0\|_\infty \leq (1 - \theta)^{-1}\|u - u_0\|_\infty .$$

Dalla relazione

$$(3.8) \qquad (1 + \theta)^{-1}\|u - u_0\|_\infty \leq \|z - z_0\|_\infty \leq (1 - \theta)^{-1}\|u - u_0\|_\infty$$

segue finalmente che S è un omeomorfismo per la topologia della convergenza uniforme su $[a, +\infty)$. Poichè nelle ipotesi considerate le soluzioni di (3.1), (3.2) sono definite in $[0, +\infty)$, univocamente determinate dai dati iniziali nel punto a e dipendono con continuità [2]

[2] In questo caso la dipendenza continua dai dati si riconduce sostanzialmente all'applicazione del lemma di Gronwall nell'intervallo $[x, a]$, appli-

da questi nell'intervallo $[0, a]$, si può concludere che l'equivalenza asintotica e l'omeomorfismo S valgono in $[0, +\infty)$.

4. Prima rappresentazione asintotica con maggiorazione dell'errore.

4.*A* Nel teorema 1 diamo una prima risposta al problema di assegnare *una soluzione asintotica con maggiorazione dell'errore* al sistema $(2.1'''')$, ottenuto nel paragrafo 2 come forma canonica del sistema (2.1). Allo scopo useremo un sistema approssimante a coefficienti costanti.

TEOREMA 1. Considerata $\omega(x)$, introdotta al paragrafo 2 mediante la formula (2.8) ed appartenente a $L_{\mathrm{loc}}([0, +\infty))$, supponiamo che esista una costante ω_∞ tale che

$$\int_0^{+\infty} |\omega(x) - \omega_\infty| dx < +\infty, \qquad |\omega_\infty| < 1 . \tag{4.1}$$

Allora i due sistemi

$$z' = C(x) z \qquad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$v' = Fv \qquad F = \begin{pmatrix} -\omega_\infty & 1 \\ -1 & \omega_\infty \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

sono asintoticamente equivalenti, e la corrispondenza biunivoca S tra le soluzioni dei due sistemi è un omeomorfismo per la topologia della convergenza uniforme in $[0, +\infty)$.

cazione che porta alle disuguaglianze

$$\sup_{x\in[0,a]} (\|z(x) - z_0(x)\|) \leqslant \|z(a) - z_0(a)\| \cdot \exp \int_0^a \|D(s) + B(s)\| ds$$

$$\sup_{x\in[0,a]} (\|u(x) - u_0(x)\|) \leqslant \|u(a) - u_0(a)\| \cdot \exp \int_0^a \|D(s)\| ds .$$

Vale per $z(x)$ la rappresentazione asintotica

$$z(x) = z(x, \gamma, h) = h[v(x, \gamma) + \eta(x, \gamma)] \tag{4.4}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} z_1(x, \gamma, h) \\ z_2(x, \gamma, h) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x + \gamma) + \eta_1(x, \gamma) \\ \cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x + \gamma - \arcsin\omega_\infty) + \eta_2(x, \gamma) \end{pmatrix} \begin{matrix} h \in R \\ \gamma \in R \end{matrix} \tag{4.5}$$

dove, sulla semiretta $x \geqslant \alpha$ sotto definita, si ha

$$\max_i |\eta_i(x, \gamma)| = \|\eta(x, \gamma)\|_2 \leqslant \mu_0(x) \tag{4.6}$$

con $\mu_0(x)$ data da

$$\mu_0(x) = \frac{2k(x)}{1 - 2\sqrt{2}\,k(x) + \sqrt{1 - 4\sqrt{2}\,k(x)}} \tag{4.7}$$

e

$$k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - |\omega_\infty|}} \int_x^{+\infty} |\omega(s) - \omega_\infty|\, ds\,. \tag{4.8}$$

Ovviamente $\mu_0(x)$ è definita sulla semiretta $x \geqslant \alpha$ dove

$$k(x) \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\,. \tag{4.9}$$

4.*B* Osservazioni. L'asintotica equivalenza dei due sistemi, il connesso omeomorfismo e quindi la (4.4) dove $\lim_{x\to+\infty} \|\eta(x, \gamma)\| = 0$ sono una immediata conseguenza del teorema riportato nel paragrafo 3. Nel caso particolare di un sistema approssimante a coefficienti costanti, come il sistema (4.3), e di una perturbazione sommabile come quella che presenta il sistema (4.2) l'equivalenza asintotica è affermata da L. Cesari [6] pag. 41; per la dimostrazione L. Cesari rinvia a N. Levinson [12] che tuttavia suppone la perturbazione continua.

Mentre nella dimostrazione della prima parte dell'enunciato (applicazione del teorema del paragrafo 3) si può pensare di usare una norma euclidea per matrici e vettori, per la dimostrazione della seconda parte dell'enunciato (maggiorazione dell'errore) conviene introdurre norme opportune. Precisamente per i vettori introdurremo le norme

$$(4.10) \qquad \|z(x)\|_1 = \sum_i |z_i(x)|\,, \qquad \|z(x)\|_2 = \max_i |z_i(x)|$$

e per le matrici del tipo 2×2 la norma

$$(4.11) \qquad \|A(x)\|_2 = \max_{ij} |a_{ij}(x)|\,.$$

Queste norme risultano compatibili, nel senso che

$$(4.12) \qquad \|A(x)z(x)\|_2 \leqslant \|A(x)\|_2 \cdot \|z(x)\|_1\,.$$

Sempre per la dimostrazione della seconda parte dell'enunciato si sfrutterà nella (4.16) il fatto che la differenza di soluzioni corrispondenti mediante S

$$\eta(x, \gamma) = z(x, \gamma, 1) - v(x, \gamma)$$

è soluzione del sistema

$$(4.13) \qquad \tilde{\eta}' = C(x)\tilde{\eta} + \big(C(x) - F\big)v(x, \gamma)\,,$$

mentre nella dimostrazione del teorema del paragrafo 3 ci si è implicitamente serviti del sistema

$$(4.14) \qquad \tilde{\eta}' = F\tilde{\eta} + \big(C(x) - F\big)z(x, \gamma, 1)\,,$$

come si vede ad esempio da (3.7).

Soltanto la scelta di (4.13), che conduce ad un sistema di equazioni integrali non lineari in opportuni vettori $\eta(x, \gamma_1)$, $\eta(x, \gamma_1 + \pi/2)$ ci permette di ottenere, con il metodo qui usato, la maggiorazione (4.6) di $\|\eta(x, \gamma)\|_2$.

4.C Dimostrazione della (4.6). Consideriamo $v(x, \gamma)$ e $z(x, \gamma, 1)$ soluzioni corrispondenti mediante S dei sistemi (4.3), (4.2). Ricordiamo che $z(x, \gamma, 1)$ si ottiene ponendo $h = 1$ nella (4.5) e di conseguenza che

$$v(x, \gamma) = \begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\, x + \gamma\right) \\ \cos\left(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\, x + \gamma - \arcsin \omega_\infty\right) \end{pmatrix}$$

$$\eta(x, \gamma) = z(x, \gamma, 1) - v(x, \gamma)\,, \quad \lim_{x \to +\infty} \eta(x, \gamma) = 0\,.$$

Sostituendo $z = \eta + v$ nel sistema (4.2) otteniamo che $\eta(x, \gamma)$ è l'unica soluzione infinitesima del sistema (4.13)

$$\tilde{\eta}' = C(x)\tilde{\eta} + b(x, \gamma)\,,$$

avendo posto

$$b(x, \gamma) = \left(C(x) - F\right) v(x, \gamma) = \tag{4.15}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(-\omega(x) + \omega_\infty\right) \sin\left(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\, x + \gamma\right) \\ \left(\omega(x) - \omega_\infty\right) \cos\left(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\, x + \gamma - \arcsin \omega_\infty\right) \end{pmatrix}.$$

È ovvio che $b(x, \gamma) \in L\left([0, +\infty)\right)$. Considerata allora una qualunque matrice fondamentale $Z(x)$ di soluzioni del sistema (4.2) si ha

$$\eta(x, \gamma) = -\int_x^{+\infty} Z(x) Z^{-1}(s) b(s, \gamma)\, ds\,, \tag{4.16}$$

dove il prodotto $Z(x)Z^{-1}(s) = \phi(x, s) = \left(\varphi_{ij}(x, s)\right)$ è notoriamente invariante rispetto ad un cambiamento di matrice fondamentale. Scegliamo

$$Z(x) = Z(x, \gamma_1, 1) = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11}(x) & \bar{z}_{12}(x) \\ \bar{z}_{21}(x) & \bar{z}_{22}(x) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

dove si è posto per semplicità di scrittura

$$z(x, \gamma_1, 1) = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11}(x) \\ \bar{z}_{21}(x) \end{pmatrix} \qquad z\left(x, \gamma_1 + \frac{\pi}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} \bar{z}_{12}(x) \\ \bar{z}_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza, mediante S, otteniamo la matrice fondamentale del sistema (4.3)

$$V(x,\gamma_1) = \tag{4.18}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x+\gamma_1) & \cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x+\gamma_1) \\ \cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x+\gamma_1-\arcsin\omega_\infty) & -\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x+\gamma_1-\arcsin\omega_\infty) \end{pmatrix}$$

e la matrice differenza

$$Z(x,\gamma_1,1) - V(x,\gamma_1) = H(x,\gamma_1) = \begin{pmatrix} \bar\eta_{11}(x) & \bar\eta_{12}(x) \\ \bar\eta_{21}(x) & \bar\eta_{22}(x) \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

dove si è posto

$$\eta(x,\gamma_1) = \begin{pmatrix} \bar\eta_{11}(x) \\ \bar\eta_{21}(x) \end{pmatrix} \qquad \eta\left(x,\gamma_1+\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \bar\eta_{12}(x) \\ \bar\eta_{22}(x) \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Poichè $\det[V(x,\gamma_1)] = -\sqrt{1-\omega_\infty^2}$, $V(x,\gamma_1)$ è limitata in $[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x,\gamma_1) = 0$, $\operatorname{tr} C(x) = 0$, si conclude che

$$\det[Z(x,\gamma_1,1)] = -\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,.$$

È ora necessario ottenere la maggiorazione di

$$\|\phi(x,s)\|_2 = \|Z(x,\gamma_1,1)Z^{-1}(s,\gamma_1,1)\|_2$$

in funzione di opportune maggiorazioni di $\|\eta(x,\gamma_1)\|_2$, $\|\eta(x,\gamma_1+\pi/2)\|_2$.

Posto (³)

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \max\limits_{s\geq x}\|\eta(s,\gamma_1)\|_2\,, \qquad \mu_2(x) = \max\limits_{s\geq x}\left\|\eta\left(s,\gamma_1+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\|_2 \\ \mu(x) = \max\limits_i \mu_i(x) \end{cases} \tag{4.21}$$

(³) Ovviamente nelle ipotesi poste $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu(x)$ esistono e dipendono anche da γ_1.

si ha

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,\varphi_{11}(x,s) = \bar{z}_{11}(x)\bar{z}_{22}(s) - \bar{z}_{12}(x)\bar{z}_{21}(s) = \\
&= [\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x + \gamma_1) + \bar{\eta}_{11}(x)]\cdot \\
&\cdot[-\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,s + \gamma_1 - \arcsin\omega_\infty) + \bar{\eta}_{22}(s)] - \\
&- [\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x + \gamma_1) + \bar{\eta}_{12}(x)]\cdot \\
&\cdot[\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,s + \gamma_1 - \arcsin\omega_\infty) + \bar{\eta}_{21}(s)] = \\
&= -\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,(x-s) + \arcsin\omega_\infty) - \bar{\eta}_{11}(x)\cdot \\
&\cdot\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,s + \gamma_1 - \arcsin\omega_\infty) + \bar{\eta}_{22}(s)\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x + \gamma_1) - \\
&- \bar{\eta}_{12}(x)\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,s + \gamma_1 - \arcsin\omega_\infty) - \bar{\eta}_{21}(s)\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,x + \gamma_1) + \\
&\qquad\qquad + \bar{\eta}_{11}(x)\bar{\eta}_{22}(s) - \bar{\eta}_{12}(x)\bar{\eta}_{21}(s)
\end{aligned}
$$

e quindi per $s \geqslant x$ si ha

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,|\varphi_{11}(x,s)| &\leqslant 1 + \sqrt{\bar{\eta}_{11}^2(x) + \bar{\eta}_{12}^2(x)} + \sqrt{\bar{\eta}_{22}^2(s) + \bar{\eta}_{21}^2(s)} + \\
&+ \sqrt{\bar{\eta}_{11}^2(x) + \bar{\eta}_{12}^2(x)}\cdot\sqrt{\bar{\eta}_{22}^2(s) + \bar{\eta}_{21}^2(s)} \leqslant \\
&\qquad 1 + 2\sqrt{2}\,\mu(x) + 2\mu^2(x) = (1 + \sqrt{2}\,\mu(x))^2 .
\end{aligned}
$$

Analogamente si trova la stessa maggiorazione per le altre $|\varphi_{ij}(x,s)|$, di modo che

$$
\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,\|\phi(x,s)\|_2 \leqslant (1 + \sqrt{2}\,\mu(x))^2 \qquad s \geqslant x . \tag{4.22}
$$

Cerchiamo ora di ottenere la (4.6). Ponendo nella (4.16) $\gamma = \gamma_1$ e successivamente $\gamma = \gamma_1 + \pi/2$ otteniamo

$$
\eta(x,\gamma_1) = -\int_x^{+\infty} \phi(x,s)\,b(s,\gamma_1)\,ds \tag{4.23}
$$

$$
\eta\left(x, \gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\int_x^{+\infty} \phi(x,s)\,b\left(s, \gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) ds . \tag{4.24}
$$

Sia ora ξ un punto in cui $\|\eta(s,\gamma_1)\|_2$ è massima sulla semiretta $s \geqslant x$, sia cioè $\|\eta(\xi,\gamma_1)\|_2 = \mu_1(x)$. Dalla (4.23), fattovi $x = \xi$, si ha

$$(4.25) \qquad \|\eta(\xi,\gamma_1)\|_2 = \left\| \int_{\xi}^{+\infty} \phi(\xi, s)\, b(s,\gamma_1)\, ds \right\|_2$$

da cui segue, ricordando la (4.12) e la (4.22),

$$(4.26) \qquad \|\eta(x,\gamma_1)\|_2 \leqslant \mu_1(x) \leqslant \int_{\xi}^{+\infty} \|\phi(\xi,s)\|_2 \cdot \|b(s,\gamma_1)\|_1\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+\sqrt{2}\mu(\xi))^2}{\sqrt{1-\omega_\infty^2}} \int_{\xi}^{+\infty} \|b(s,\gamma_1)\|_1\, ds\,.$$

Poichè $\xi \geqslant x$ e quindi $\mu(\xi) \leqslant \mu(x)$ si ha ancora

$$(4.27) \qquad \|\eta(x,\gamma_1)\|_2 \leqslant \mu_1(x) \leqslant \frac{(1+\sqrt{2}\mu(x))^2}{\sqrt{1-\omega_\infty^2}} \int_{x}^{+\infty} \|b(s,\gamma_1)\|_1\, ds\,.$$

Analogamente si ottiene

$$(4.28) \qquad \left\| \eta\left(x, \gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) \right\|_2 \leqslant \mu_2(x) \leqslant \frac{(1+\sqrt{2}\mu(x))^2}{\sqrt{1-\omega_\infty^2}} \int_{x}^{+\infty} \left\| b\left(s, \gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) \right\|_1 ds\,.$$

Poichè [4]

$$(4.29) \qquad \|b(s,\gamma)\|_1 = |\omega(s) - \omega_\infty| \left\{ \left|\sin\left(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\, s + \gamma\right)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\cos\left(\sqrt{1-\omega_\infty^2}\, s + \gamma - \arcsin \omega_\infty\right)\right| \right\} \leqslant |\omega(s) - \omega_\infty| \sqrt{2}\cdot\sqrt{1 + |\omega_\infty|}\,,$$

dalle (4.27), (4.28) segue che

$$(4.30) \qquad \mu(x) \leqslant \left(1 + \sqrt{2}\,\mu(x)\right)^2 k(x)$$

([4]) Si ha infatti $|\sin(\theta-\delta)| + |\cos(\theta+\delta)| \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+|\sin 2\delta|}$. Nella (4.29) γ indica indifferentemente γ_1, $\gamma_1 + \pi/2$.

con $k(x)$ indipendente da γ_1 e data da

$$k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - |\omega_\infty|}} \int_x^{+\infty} |\omega(s) - \omega_\infty| ds$$

in accordo con (4.8).

Ricordando che $\mu(x)$ è continua ed infinitesima si trova, su una opportuna semiretta $x \geqslant \alpha$ nella quale sia $k(x) \leqslant 1/4\sqrt{2}$,

$$\mu(x) \leqslant \mu_0(x)$$

dove $\mu_0(x) \equiv 0$ per $x \geqslant x_1$ se $\exists x_1$ tale che $k(x_1) = 0$; in caso contrario $\mu_0(x)$ è la minima radice positiva dell'equazione in t

$$t = (1 + \sqrt{2}t)^2 k(x) .$$

In ogni caso $\mu_0(x)$ è fornita da (4.7).

È importante osservare che la maggiorazione trovata di $\mu(x)$, e quindi di $\|\eta(s, \gamma_1)\|_2$, $\|\eta(s, \gamma_1 + \pi/2)\|_2$, non dipende da γ_1, contrariamente a quanto avviene per $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu(x)$; la maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo a $z(x, \gamma, 1)$ la sua espressione asintotica $v(x, \gamma)$ è uniforme rispetto a γ. Segue pertanto la (4.6).

5. Seconda rappresentazione asintotica con maggiorazione dell'errore.

5.*A* A differenza di quanto si è fatto nel teorema 1, confrontiamo ora il sistema (2.1‴) con un sistema approssimante a coefficienti non costanti. Sviluppando una tecnica analoga, otteniamo nel teorema 2 una diversa soluzione asintotica di (2.1‴), sempre accompagnata da maggiorazione dell'errore. I simboli $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ verranno usati in accordo con le (4.10), (4.11), mentre $\| \; \|$ indicherà (ad esempio) una norma euclidea.

TEOREMA 2. Considerata $\omega(x)$, introdotta al paragrafo 2 mediante la formula (2.8) ed appartenente a $L_{\mathrm{loc}}([0, +\infty))$, supponiamo ancora che esista una costante ω_∞ tale che

$$(5.1) \qquad \int_0^{+\infty} |\omega(x) - \omega_\infty| dx < +\infty \qquad |\omega_\infty| < 1$$

e supponiamo inoltre che riesca

$$(5.2) \qquad |\omega(x)| \leqslant 1 \qquad x \in [0, +\infty) .$$

Allora i due sistemi

$$(5.3) \qquad z' = C(x) z \qquad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix}$$

$$(5.4) \qquad u' = D(x) u \qquad D(x) = \sqrt{\frac{1-\omega^2(x)}{1-\omega_\infty^2}} \begin{pmatrix} -\omega_\infty & 1 \\ -1 & \omega_\infty \end{pmatrix}$$

sono asintoticamente equivalenti, e la corrispondenza biunivoca S_1 esistente tra le soluzioni dei due sistemi è un omeomorfismo per la topologia della convergenza uniforme in $[0, +\infty)$. Vale per $z(x)$ la rappresentazione asintotica

$$(5.5) \qquad z(x) = z(x, \gamma, h) = h[u(x, \gamma) + \varepsilon(x, \gamma)] ,$$

cioè

$$(5.6) \qquad \begin{pmatrix} z_1(x, \gamma, h) \\ z_2(x, \gamma, h) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \sin[\beta(x) + \gamma] + \varepsilon_1(x, \gamma) \\ \cos[\beta(x) + \gamma - \arcsin \omega_\infty] + \varepsilon_2(x, \gamma) \end{pmatrix} \begin{matrix} h \in R \\ \gamma \in R , \end{matrix}$$

dove si è posto

$$(5.6') \qquad \beta(x) = \int_0^x \sqrt{1 - \omega^2(s)}\, ds ,$$

e vale sulla semiretta $x \geqslant \alpha_1$ sotto definita la seguente maggiorazione

$$(5.7) \qquad \|\varepsilon(x, \gamma)\|_2 \leqslant \lambda_0(x) ,$$

con $\lambda_0(x)$ data da

$$\lambda_0(x) = \frac{2J(x)}{1 - 2\sqrt{2}J(x) + \sqrt{1 - 4\sqrt{2}J(x)}} \tag{5.8}$$

e

$$J(x) = \tag{5.9}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\omega_\infty^2}} \int_x^{+\infty} \frac{|\omega(s) - \omega_\infty| \cdot \sqrt{1 + |\omega(s)|}}{\sqrt{(1-\omega_\infty)(1+\omega(s))} + \sqrt{(1+\omega_\infty)(1-\omega(s))}}\, ds\,.$$

Ovviamente $\lambda_0(x)$ è definita sulla semiretta $x \geqslant \alpha_1$ dove

$$J(x) \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\,. \tag{5.10}$$

5.*B* Dimostrazione della 1ª parte. L'asintotica equivalenza dei due sistemi (5.3), (5.4), il connesso omeomorfismo e la (5.5), dove $\lim_{x\to+\infty} \|\varepsilon(x, \gamma)\| = 0$, sono una immediata conseguenza del teorema del paragrafo 3; basta verificare che $\|C(x) - D(x)\|$ è sommabile in $[0, +\infty)$, che $tr\ D(x) = 0$ e che tutte le soluzioni del sistema (5.4) sono limitate. La I condizione si verifica osservando che gli elementi di $C(x) - D(x)$ sono maggiorabili in valore assoluto con $\big(2/(1-\omega_\infty^2)\big)\cdot$ $\cdot|\omega(x) - \omega_\infty|$. La III condizione si verifica osservando che una matrice fondamentale di soluzioni del sistema (5.4) è data da

$$U(x, \gamma_1) = \tag{5.11}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin[\beta(x) + \gamma_1] & \sin[\beta(x) + \gamma_1 + \pi/2] \\ \cos[\beta(x) + \gamma_1 - \arcsin\omega_\infty] & \cos[\beta(x) + \gamma_1 + \pi/2 - \arcsin\omega_\infty] \end{pmatrix}$$

con $\beta(x)$ definita da (5.6').

Notiamo infine che le ipotesi (5.1), (5.2) assicurano che $\lim_{x\to+\infty} \beta(x) =$ $= +\infty$. Tale conclusione segue infatti da

$$\sqrt{1 - \omega^2(s)} \geqslant 1 - \omega^2(s)$$

e dalle

$$(5.12) \qquad \int_0^{+\infty}(1-\omega_\infty^2)\,ds = +\infty\,, \qquad \int_0^{+\infty}|\omega_\infty^2 - \omega^2(s)\,|ds < +\infty\,.$$

5.*C* Dimostrazione della (5.7). Consideriamo $u(x,\gamma)$ e $z(x,\gamma,1)$ soluzioni corrispondenti mediante S_1 dei sistemi (5.4), (5.3). Ricordiamo che $z(x,\gamma,1)$ si ottiene ponendo $h=1$ nella (5.6), che

$$u(x,\gamma) = \begin{pmatrix} \sin(\beta(x)+\gamma) \\ \cos(\beta(x)+\gamma-\arcsin\omega_\infty) \end{pmatrix}$$

e di conseguenza che

$$\varepsilon(x,\gamma) = z(x,\gamma,1) - u(x,\gamma)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x,\gamma) = 0\,.$$

Ne segue che $\varepsilon(x,\gamma)$ è l'unica soluzione infinitesima del sistema

$$(5.13) \qquad \tilde{\varepsilon}' = C(x)\tilde{\varepsilon} + \tilde{b}(x,\gamma)$$

dove si è posto ([5])

$$(5.14) \qquad \tilde{b}(x,\gamma) = [C(x)-D(x)]u(x,\gamma) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos[\beta(x)+\gamma-\arcsin\omega_\infty] - \cos[\beta(x)+\gamma-\arcsin\omega(x)] \\ -\sin[\beta(x)+\gamma] + \sin[\beta(x)+\gamma+\arcsin\omega(x)-\arcsin\omega_\infty] \end{pmatrix}.$$

Dimostrando la sommabilità di $\tilde{b}(x,\gamma)$, si ottiene che

$$(5.15) \qquad \varepsilon(x,\gamma) = -\int_x^{+\infty} Z(x)Z^{-1}(s)\,\tilde{b}(s,\gamma)\,ds$$

dove $Z(x)$ è una matrice fondamentale di soluzioni del sistema (5.3).

([5]) Come è ovvio il sistema (5.13) a cui soddisfa $\varepsilon(x,\gamma)$ ha un termine noto $\tilde{b}(x,\gamma)$ diverso da quello $b(x,\gamma)$, dato da (4.15), relativo al sistema (4.13) soddisfatto da $\eta(x,\gamma) = z(x,\gamma,1) - v(x,\gamma)$.

Di modo che per giungere alla conclusione con metodo strettamente analogo a quello del teor. 1, rimane solo da far vedere che

$$\frac{1}{\sqrt{1-\omega_\infty^2}}\int_x^{+\infty}\|\tilde{b}(s,\gamma)\|_1\,ds \leqslant J(x) \tag{5.16}$$

con $J(x)$ data da (5.9); infatti nelle considerazioni necessarie per dimostrare la (5.16) è contenuta la verifica della sommabilità di $\tilde{b}(x,\gamma)$.

Verifichiamo ora la (5.16). Si ha

$$\|\tilde{b}(s,\gamma)\|_1 = |\tilde{b}_1(s,\gamma)| + |\tilde{b}_2(s,\gamma)| = 2\left|\sin\frac{\arcsin\omega(s)-\arcsin\omega_\infty}{2}\right| \cdot$$
$$\cdot\left\{\left|\sin\left(\beta(s)+\gamma-\frac{\arcsin\omega_\infty+\arcsin\omega(s)}{2}\right)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\cos\left(\beta(s)+\gamma+\frac{\arcsin\omega(s)-\arcsin\omega_\infty}{2}\right)\right|\right\}$$

e valgono l'identità [6]

$$\left|\sin\frac{\arcsin\omega(s)-\arcsin\omega_\infty}{2}\right| =$$
$$= \frac{|\omega(s)-\omega_\infty|}{\sqrt{(1-\omega_\infty)(1+\omega(s))}+\sqrt{(1+\omega_\infty)(1-\omega(s))}}$$

e la disuguaglianza [7]

$$\left|\sin\left(\beta(s)+\gamma-\frac{\arcsin\omega_\infty+\arcsin\omega(s)}{2}\right)\right| +$$
$$+ \left|\cos\left(\beta(s)+\gamma+\frac{\arcsin\omega(s)-\arcsin\omega_\infty}{2}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+|\omega(s)|}\,,$$

di modo che la (5.16) è dimostrata.

[6] Se $|\alpha| \leqslant \pi/2$, $|\beta| < \pi/2$, si ha

$$\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \frac{|\sin\alpha-\sin\beta|}{\sqrt{(1-\sin\beta)(1+\sin\alpha)}+\sqrt{(1+\sin\beta)(1-\sin\alpha)}}\,.$$

[7] Si veda la nota n. 4.

6. Confronto fra le maggiorazioni di $\|\eta(x,\gamma)\|_2$ e $\|\varepsilon(x,\gamma)\|_2$.

6.*A* Osserviamo innanzitutto che $\mu_0(x)$ e $\lambda_0(x)$ fornite rispettivamente da (4.7) e (5.8) sono o contemporaneamente nulle o contemporaneamente positive. In quest'ultimo caso esse sono rispettivamente la minima radice positiva delle equazioni [8]

$$t = (1+\sqrt{2}t)^2 k(x) \qquad t = (1+\sqrt{2}t)^2 J(x) \tag{6.1}$$

con $k(x)$ e $J(x)$ date da (4.8), (5.9). Poichè si verifica immediatamente che la minima radice positiva t_0 dell'equazione $t = (1+\sqrt{2}t)^2 a$, esistente per $0 < a \leqslant 1/(4\sqrt{2})$, è funzione crescente di a si conclude che

$$\big(0 < \mu_0(x) < \lambda_0(x)\big) \Leftrightarrow \big(0 < k(x) < J(x)\big)\,. \tag{6.2}$$

Procediamo perciò al confronto di $k(x)$ con $J(x)$. Dalle considerazioni che svolgeremo apparirà chiaro che la risposta dipende dal comportamento di ω e dal valore di ω_∞.

I caso: $\omega_\infty \neq 0$. Posto

$$k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-|\omega_\infty|}} \int_x^{+\infty} |\omega(s)-\omega_\infty|\,ds = \int_x^{+\infty} f(s)\,ds\,, \tag{6.3}$$

$$J(x) = \tag{6.4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\omega_\infty^2}} \int_x^{+\infty} \frac{|\omega(s)-\omega_\infty|\sqrt{1+|\omega(s)|}}{\sqrt{(1-\omega_\infty)(1+\omega(s))}+\sqrt{(1+\omega_\infty)(1-\omega(s))}}\,ds =$$

$$= \int_x^{+\infty} g(s)\,ds$$

[8] Ricordiamo che $\mu_0(x)$, $\lambda_0(x)$ sono definite soltanto quando $k(x) \leqslant 1/(4\sqrt{2})$, $J(x) \leqslant 1/(4\sqrt{2})$ cioè sulle semirette indicate rispettivamente con $[\alpha, +\infty)$, $[\alpha_1, +\infty)$.

e tenuto conto che $|\omega_\infty| < 1$, $|\omega(s)| \leqslant 1$, si ha per $\forall s \in [0, +\infty)$

$$(6.5) \qquad \frac{\sqrt{1-\omega_\infty^2}}{2}\, g(s) \leqslant f(s) \leqslant \frac{\sqrt{1+|\omega_\infty|}}{2}\left(\sqrt{1-\omega_\infty}+\sqrt{1+\omega_\infty}\right) g(s)$$

da cui segue, integrando in $[x, +\infty)$,

$$(6.6) \qquad \frac{\sqrt{1-\omega_\infty^2}}{2}\, J(x) \leqslant k(x) \leqslant \frac{\sqrt{1+|\omega_\infty|}}{2}\left(\sqrt{1-\omega_\infty}+\sqrt{1+\omega_\infty}\right) J(x)\,.$$

Poichè

$$\frac{\sqrt{1-\omega_\infty^2}}{2} < \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{\sqrt{1+|\omega_\infty|}}{2}\left(\sqrt{1-\omega_\infty}+\sqrt{1+\omega_\infty}\right) > 1\,,$$

il rapporto $k(x)/J(x)$ può essere maggiore o minore di 1.

II caso: $\omega_\infty = 0$. Segue dalla (6.6), valida anche per $\omega_\infty = 0$, che

$$(6.7) \qquad \tfrac{1}{2}\, J(x) \leqslant k(x) \leqslant J(x)\,.$$

Se inoltre $\lim_{x\to+\infty} \omega(x) = \omega_\infty = 0$ e $J(x) \neq 0$ si ha

$$(6.8) \qquad J(x) \sim k(x) \qquad (x \to +\infty)\,.$$

Infatti da $\omega(s) \to \omega_\infty$ segue

$$(6.9) \qquad \frac{2\sqrt{2}\,|\omega(s)|\cdot\sqrt{1+|\omega(s)|}}{\sqrt{1+\omega(s)}+\sqrt{1-\omega(s)}} = \sqrt{2}\,|\omega(s)| + o\left(\sqrt{2}|\omega(s)|\right) \qquad (s \to +\infty)$$

da cui, integrando in $[x, +\infty)$, si ottiene (9) la (6.8).

6.*B* Esempio I. Sia $\omega(s) \sim \omega_\infty \neq 0$ $(s \to +\infty)$. Ne segue, poichè $f(s)$, $g(s)$ date da (6.3), (6.4) si possono annullare soltanto contempo-

(9) Il fatto che la (6.9) implichi la (6.8) è di immediata verifica; si veda per esempio L. Sirovich, *Techniques of Asymptotic Analysis*, Springer, 1971, proposizione B_2 pag. 20, dove l'ipotesi di continuità a tratti delle funzioni integrande può essere sostituita con quella di locale sommabilità.

raneamente, che

$$f(s)=\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,g(s)+o(g(s)) \qquad (s\to+\infty)\,; \tag{6.10}$$

se ne deduce che

$$k(x)=\sqrt{1-\omega_\infty^2}\,J(x)+o(J(x)) \qquad (x\to+\infty)\,. \tag{6.11}$$

Se ora supponiamo $k(x)\neq 0$, $J(x)\neq 0$ otteniamo

$$\frac{k(x)}{J(x)}\sim\sqrt{1-\omega_\infty^2} \qquad (x\to+\infty)$$

e quindi $k(x)<J(x)$ su una opportuna semiretta.

Esempio II. Sia [10]

$$\omega(s)=\begin{cases}\omega_\infty\neq 0 & s\in[0,+\infty)\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[n,n+\dfrac{1}{n^2}\right]\\[2ex] 0 & s\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[n,n+\dfrac{1}{n^2}\right].\end{cases} \tag{6.12}$$

Si ha allora se $p\leqslant x\leqslant p+1/p^2 \quad p=1,2,\ldots$

$$\int_x^{+\infty}|\omega(s)-\omega_\infty|\,ds=|\omega_\infty|\left\{\left(p+\frac{1}{p^2}-x\right)+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\},$$

se $p+1/p^2\leqslant x<p+1 \quad p=2,3,\ldots$

$$\int_x^{+\infty}|\omega(s)-\omega_\infty|\,ds=|\omega_\infty|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

In ogni caso ne segue immediatamente $k(x)>J(x)$; più precisamente

(10) Ovviamente in accordo con le ipotesi dei teoremi 1, 2 si suppone $|\omega_\infty|<1$.

si ottiene

$$\frac{k(x)}{J(x)} = \frac{\sqrt{1 + |\omega_\infty|}}{2} \left(\sqrt{1 - \omega_\infty} + \sqrt{1 + \omega_\infty}\right) > 1 \,.$$

Ricordando (6.6), si può osservare che $k(x)/J(x)$ assume il massimo valore possibile.

7. Applicazioni dei teoremi asintotici 1, 2 al sistema $dy/dt = A(t)y$.

7.A Le due rappresentazioni asintotiche (4.4), (5.5) delle soluzioni $z(x)$ del sistema in forma canonica (2.1‴)

$$\frac{dz}{dx} = C(x)\, z$$

permettono di risalire alle corrispondenti rappresentazioni delle soluzioni del sistema di partenza (2.1)

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y \,.$$

Ovviamente, oltre alle ipotesi I_1, I_2, I_3 enunciate nella sezione 2.A per il sistema (2.1), occorre che siano verificate le ipotesi (5.1), (5.2) relative alla funzione ω. Le soluzioni dei due sistemi (2.1), (2.1‴) sono infatti legate dalla formula

$$(7.1) \qquad \begin{cases} y_1(t) = \left(-\dfrac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)]\, d\tau\right\} z_1(\varphi(t)) \\[2ex] y_2(t) = \left(-\dfrac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp\left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)]\, d\tau\right\} z_2(\varphi(t)) \end{cases}$$

con $\varphi(t)$ data da (2.6).

7.*B* Esempio. Consideriamo il sistema $dy/dt = A(t)y$ dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \exp[2(1-e^{-t})] \\ -\exp[2(e^{-t}-1)] & a_{11}(t) \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

ed $a_{11} \in L_{\text{loc}}([0, +\infty))$. Si ha

$$x = \varphi(t) = \int_0^t \sqrt{-a_{12}(\tau)\, a_{21}(\tau)}\, d\tau = t \tag{7.3}$$

e, applicando la (2.8)

$$\omega(x) = e^{-x} \qquad x \in [0, +\infty)\,. \tag{7.4}$$

Si giunge quindi alla forma canonica, in questo esempio indipendente da $a_{11}(t)$,

$$\frac{dz}{dx} = C(x)z \qquad C(x) = \begin{pmatrix} -e^{-x} & 1 \\ -1 & e^{-x} \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Poichè $\omega(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$, sono applicabili le formule (6.7), (6.8) ed è quindi leggermente migliore la maggiorazione del resto fornita dal teorema 1. Si trova

$$k(x) = \sqrt{2}\, e^{-x}, \tag{7.6}$$

$$J(x) = \sqrt{2}\left[e^{-x} - \sqrt{1-e^{-2x}} + \log\frac{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}{2} + 1\right] \sim k(x)\,, \tag{7.7}$$

$$\mu_0(x) = \frac{2\sqrt{2}\, e^{-x}}{1 - 4e^{-x} + \sqrt{1-8e^{-x}}} \qquad x \geqslant \log 8\,, \tag{7.8}$$

$$\mu_0(x) \sim \sqrt{2}\, e^{-x}(1 + 4e^{-x}) \qquad (x \to +\infty)\,, \tag{7.8'}$$

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \sin(x+\gamma) + \eta_1(x,\gamma) \\ \cos(x+\gamma) + \eta_2(x,\gamma) \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

$$\|\eta(x,\gamma)\|_2 \leqslant \mu_0(x) \tag{7.9'}$$

e tornando alla soluzione del sistema di partenza

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left[1 - e^{-t} + \int\limits_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right] z_1(t) \\ \\ \exp\left[e^{-t} - 1 + \int\limits_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right] z_2(t) \end{pmatrix}.$$

7.C Applicazione all'equazione di Whittaker. Il sistema (7.5) è facilmente collegabile all'equazione di Whittaker. Poichè le soluzioni di quest'ultima sono note, possiamo scrivere esplicitamente gli sviluppi in serie delle soluzioni di (7.5), confrontandoli così con le rispettive soluzioni asintotiche. Dal confronto risulterà che $\mu_0(x)$, data da (7.8), fornisce una maggiorazione piuttosto soddisfacente dell'errore.

Dal sistema (7.5) seguono le equazioni

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} + (1 - e^{-x} - e^{-2x}) z_1 = 0 \,, \tag{7.11}$$

$$\frac{d^2 z_2}{dx^2} + (1 + e^{-x} - e^{-2x}) z_2 = 0 \,. \tag{7.11'}$$

Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} z_i(x) = \xi^{-\frac{1}{2}} w(\xi) \\ \xi = 2e^{-x} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \tag{7.12}$$

otteniamo che $w(\xi)$ soddisfa all'equazione di Whittaker

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{\xi} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{\xi^2}\right] w = 0 \tag{7.13}$$

dove per ottenere l'equazione trasformata di (7.11) si devono assumere $k = -\frac{1}{2}$, $m = i$ e per la (7.11') $k = \frac{1}{2}$, $m = i$. Usando per le soluzioni della (7.13) la classica serie (11)

$$w = M_{k,m}(\xi) = \xi^{(\frac{1}{2}+m)} e^{-\xi/2}\left[1 + \frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!(2m+1)}\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{(\frac{1}{2}+m-k)(\frac{3}{2}+m-k)}{2!(2m+1)(2m+2)}\xi^2 + \ldots\right] =$$
$$= \xi^{(m+\frac{1}{2})}\left\{1 + \left[\frac{\frac{1}{2}+m-k}{2m+1} - \frac{1}{2}\right]\xi + \left[\frac{(\frac{1}{2}+m-k)(\frac{3}{2}+m-k)}{2(2m+1)(2m+2)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\frac{1}{2}+m-k}{2(2m+1)} + \frac{1}{8}\right]\xi^2 + \ldots\right\}$$

possiamo esprimere le generiche soluzioni di (7.11), (7.11′) sotto la forma

$$z_1(x) = (2e^{-x})^{-\frac{1}{2}}\left\{c_1 M_{-\frac{1}{2},i}(2e^{-x}) + c_2 M_{-\frac{1}{2},-i}(2e^{-x})\right\},$$
$$z_2(x) = (2e^{-x})^{-\frac{1}{2}}\left\{c_1^* M_{\frac{1}{2},i}(2e^{-x}) + c_2^* M_{\frac{1}{2},-i}(2e^{-x})\right\}.$$

Accoppiando $z_1(x)$, $z_2(x)$ in modo da ottenere delle soluzioni del sistema (7.5) e scegliendo opportuni valori delle costanti otteniamo una matrice fondamentale di soluzioni $(z_{ij}(x))$ del sistema (7.5) dove

$$\begin{cases} z_{11}(x) = \sin x + \dfrac{1}{5}e^{-x}(2\cos x + \sin x) + \dfrac{1}{10}e^{-2x}(2\cos x + \sin x) + \ldots \\[2ex] z_{21}(x) = \cos x + \dfrac{1}{5}e^{-x}(2\sin x - \cos x) + \dfrac{1}{10}e^{-2x}(-2\sin x + \cos x) + \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{12}(x) = \cos x - \dfrac{1}{5}e^{-x}(2\sin x - \cos x) - \dfrac{1}{10}e^{-2x}(2\sin x - \cos x) + \ldots \\[2ex] z_{22}(x) = -\sin x + \dfrac{1}{5}e^{-x}(2\cos x + \sin x) - \dfrac{1}{10}e^{-2x}(2\cos x + \sin x) + \ldots\,. \end{cases}$$

Confrontandole con (7.9) otteniamo $h = 1$, e $\gamma = 0$ per la prima soluzione, $\gamma = \pi/2$ per la seconda. Valutando asintoticamente gli errori

(11) Si veda E. T. Whittaker - G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, cap. XVI.

per mezzo del massimo valore assoluto del I termine trascurato otteniamo $e^{-x}/\sqrt{5}$; come sappiamo dalla (7.8) una maggiorazione rigorosa è data da $\mu_0(x)$ il cui valore asintotico è $\sqrt{2}e^{-x}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Birkhoff - L. Kotin, *Autonomous families of differential systems*, J. Math. Anal. Appl., **55** (1976), no. 2, pp. 466-475.

[2] Yu. S. Bogdanov, *Asymptotically equivalent linear differential systems*, Differentsial'nye Uravneniya, **1** (1965), pp. 707-716.

[3] F. Brauer, *Asymptotic equivalence and asymptotic behaviour of linear systems*, Michigan Math. J., **9** (1962), pp. 33-43.

[4] F. Brauer - J. S. W. Wong, *On asymptotic behavior of perturbed linear systems*, J. Differential Equations, **6** (1969), pp. 142-153.

[5] F. Brauer - J. S. W. Wong, *On the asymptotic relationships between solutions of two systems of ordinary differential equations*, J. Differential Equations, **6** (1969), pp. 527-543.

[6] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin, 1963.

[7] R. Conti, *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari*, Riv. Mat. Univ. Parma, **6** (1955), pp. 3-35.

[8] R. Conti, *Equazioni differenziali lineari asintoticamente equivalenti a* $x = 0$, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) **5** (1979), pp. 847-853.

[9] W. A. Coppel, *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Heath, Boston, 1965.

[10] T. Haigh, *Linearization and asymptotic behavior*, Math. Systems Theory, **9** (1975), no. 1, pp. 18-29.

[11] U. Kirchgraber, *Error estimation for perturbed systems*, J. Reine Angew. Math., **288** (1976), pp. 202-206.

[12] N. Levinson, *The asymptotic behavior of a system of linear differential equations*, Amer. J. Math., **68** (1946), pp. 1-6.

[13] G. A. Los', *Sufficient conditions for the stability of solutions of a linear differential system of second order*, English translation Ukrainian Math. J., **32** (1980), pp. 268-273 (1981).

[14] S. A. Mazanik, *Asymptotically equivalent two dimensional linear differential systems*, English translation Diff. Eq., **17** (1981), no. 2, pp. 149-153.

[15] S. A. Mazanik, *Construction of asymptotically equivalent differential systems with piecewise constant matrices*, Dokl. Akad. Nauk BSSR, **25** (1981), no. 5, pp. 399-401.

[16] L. C. Piccinini - G. Stampacchia - G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in R^n*, Liguori, Napoli, 1978.

[17] J. RADZIKOWSKI, *Propriétés asymptotiques des solutions d'un système de deux équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, Demonstratio Math., **11** (1978), no. 1, pp. 83-103.

[18] W. T. REID, *Sturmian theory for ordinary differential equations*, Springer, New York, 1980.

[19] A. WINTNER, *Linear variation of constants*, Amer. J. Math., **68** (1946), pp. 185-213.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 agosto 1984.