RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RICCARDO MARCONI

Il gruppo degli automorfismi esterni di un *p*-gruppo nilpotente infinito e suoi *p*-sottogruppi normali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 74 (1985), p. 123-127

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__123_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 74 (1985)

Il gruppo degli automorfismi esterni di un p-gruppo nilpotente infinito e suoi p-sottogruppi normali.

RICCARDO MARCONI (*)

È un risultato noto (Schmid, [7]) che il gruppo degli automorfismi esterni di un p-gruppo finito, salvo poche eccezioni ben individuate, ammette un p-sottogruppo non banale normale in esso. Questo risultato estende il famoso teorema di Gaschutz ([2]) sull'esistenza di un automorfismo esterno di ordine p in un p-gruppo finito non identico di ordine diverso da p. Un teorema simile a questo è stato recentemente dimostrato da Menegazzo e Stonehewer ([4]) nel caso dei p-gruppi nilpotenti infiniti. In questo lavoro si esaminerà l'esistenza di un p-sottogruppo non banale normale nel gruppo degli automorfismi esterni di tali gruppi.

1. Le notazioni saranno quelle usuali. Se G è un p-gruppo, $O_p(\mathrm{Out}\, G)$ sarà il p-sottogruppo normale massimale in Out G. Se A è un sottogruppo normale in G, $X(A)$ sarà il sottogruppo degli elementi x di G tali che $[x, G]$ è contenuto in A. Si osserva che se A è caratteristico in G, $X(A)$ è caratteristico in G. Se M, N sono sottogruppi caratteristici di G, $\mathrm{Aut}^M(G)$ è il gruppo degli automorfismi di G che centralizzano G/M, $\mathrm{Aut}_N(G)$ è il gruppo degli automorfismi di G che centralizzano N e $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ ne è l'intersezione. È immediato che $\mathrm{Aut}^M(G)$ e $\mathrm{Aut}_N(G)$ sono normali in $\mathrm{Aut}(G)$. Inoltre $\mathrm{Aut}_M^M(G) \simeq Z^1(G/M, Z(M))$, il gruppo degli 1-cocicli da G/M in $Z(M)$, e se M è contenuto in $N \cap Z(G)$,

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova' via Belzoni 7, 35131 Padova (Italy).

allora $\mathrm{Aut}_N^M(G) \cong \mathrm{Hom}(G/N, M)$. Altro risultato noto è che se M è abeliano e $|M| > \aleph_0$, allora $|\Omega_1(M)| = |M|$. B denoterà un sottogruppo basico di G, cioè un sottogruppo contenente G' tale che B/G' è basico in G/G' come gruppo abeliano. Per le proprietà principali di B si rimanda a [8]. Si richiama che un gruppo del tipo di Hall è un p-gruppo finito non abeliano senza sottogruppi caratteristici abeliani non ciclici. La caratterizzazione di questi gruppi che qui verrà utilizzata si può trovare in [3], Satz III.13.10.

2. Enunciamo il seguente

TEOREMA. *Sia G un p-gruppo nilpotente infinito. Allora* $O_p(\mathrm{Out}\, G) = 1$ *se e solo se:*

1) *G è abeliano elementare,*

2) *G è divisibile e $p \neq 2$,*

3) *G è prodotto centrale di $\Omega_1(G)$ e di un p-gruppo quasi-ciclico, con $\Omega_1(G)$ finito extraspeciale di esponente $p \neq 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Se G è abeliano elementare finito, è noto ([7], paragrafo 3) che $O_p(\mathrm{Out}\, G) = 1$. Se G è abeliano elementare infinito, sia $P \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, G$ un p-gruppo. Se $\alpha \in P$, esistono un insieme di indici I e dei sottogruppi G_i di G, con $i \in I$, finiti e stabili per α tali che G sia generato da essi. Se B_i è il sottogruppo di $\mathrm{Aut}\, G$ che stabilizza G_i e K_i quello che centralizza G_i, allora $B_i/K_i \cong \mathrm{Aut}\, G_i$. Inoltre $P \cap B_i \trianglelefteq B_i$, quindi $P \cap B_i \leqslant K_i$ $\forall i \in I$. Abbiamo quindi che $\alpha \in P \cap B_i \leqslant K_i$ $\forall i \in I$, cioè $\alpha = 1$. Poichè α è generico, $P = 1$.

Se G è divisibile di rango finito, G è di Černikov. Quindi, se $P \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, G$ è un p-gruppo, P è finito per [6], Theorem 3.29.2. Inoltre $\Omega_1(G)$ è finito, di conseguenza $\Omega_1(G) \lambda P$ è nilpotente. Segue che $[\Omega_1(G), P] \lneqq \Omega_1(G)$, ma per la normalità di P, $[\Omega_1(G), P]$ è caratteristico in G, quindi $[\Omega_1(G), P] = 1$, perchè $\Omega_1(G)$ non ha sottogruppi caratteristici in G non banali. Applicando un risultato dovuto a Baer ([6], Lemma 3.28) si ottiene che, se $p \neq 2$, allora $P = 1$. Se G è divisibile di rango infinito il ragionamento è identico al caso precedente, con le ovvie modifiche, fermo restando che $p \neq 2$.

Nel terzo caso $Z(G)$ è divisibile di rango 1. Sia $P \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, G$ un p-gruppo. Allora la restrizione di P a $\Omega_1(G)$ è costituita da automorfismi interni di $\Omega_1(G)$, per [7], Proposition 3.2., la restrizione di P a $Z(G)$ è il gruppo identico, per [4], 3.1(i). Segue che $P \leqslant \mathrm{Inn}\, G$. Vediamo ora che in tutti gli altri casi $O_p(\mathrm{Out}\, G) \neq 1$.

Se G è un 2-gruppo abeliano non elementare, l'inversione, cioè l'automorfismo che manda $g \in G$ in g^{-1}, ha ordine 2 ed è contenuta in $Z(\operatorname{Aut} G)$, quindi $O_2(\operatorname{Out} G) \neq 1$.

Se G è abeliano non elementare nè divisibile, $\operatorname{Aut}_\varphi^\varphi(G) \cong \operatorname{Hom}(G/\varphi(G), \varphi(G)) \neq 1$, perciò $O_p(\operatorname{Out} G) \neq 1$.

Se G ha un sottogruppo basico B finito, $G = BZ(G)$ ([8], *XV*)). Se $Z(B) \ngeq \varphi(B)$, allora $\operatorname{Aut}_Z^\varphi(B) \gneq \operatorname{Inn} B$ ([5], Proposition 3.1). L'applicazione che manda $\alpha \in \operatorname{Aut}_Z^\varphi(B)$ in $\bar{\alpha} \in \operatorname{Aut} G$, l'estensione di α a G che centralizza $Z(G)$, è un omomorfismo iniettivo, la cui immagine è contenuta in $\operatorname{Aut}_Z^\varphi(G)$ e non in $\operatorname{Inn} G$. $\operatorname{Aut}_Z^\varphi(G)$ è un p-gruppo. Infatti $\operatorname{Aut}_Z^\varphi(G)/\operatorname{Aut}_Z^{\varphi\cap Z}(G)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\operatorname{Aut}^\varphi(G/\varphi(G) \cap Z(G))$. $\operatorname{Aut}^\varphi(G/\varphi(G) \cap Z(G))$ è un p-gruppo finito, perchè lo è $G/\varphi(G) \cap Z(G)$. Infatti $G/\varphi(G) \cong B/\varphi(B)$ ([8], *XIV*)) e $\varphi(G)/\varphi(G) \cap Z(G)$ è isomorfo a un sottogruppo di $G/Z(G)$. Inoltre $\operatorname{Aut}_Z^{\varphi\cap Z}(G) \cong \operatorname{Hom}(G/Z(G), \varphi(G) \cap Z(G))$, p-gruppo. Perciò $\operatorname{Aut}_Z^\varphi(G) \nleq \operatorname{Inn} G$ ed è un p-gruppo. Se $Z(B) \geqslant \varphi(B)$, allora $Z(G) \geqslant \varphi(G)$ e $\operatorname{Inn} G \leqslant \operatorname{Aut}_\varphi^\varphi(G) \cong \operatorname{Hom}(G/\varphi(G), \varphi(G))$. $\operatorname{Aut}_\varphi^\varphi(G) = \operatorname{Inn} G$ se e solo se $\varphi(G) = Z(G)$ e $|\Omega_1(\varphi(G))| = p$, cioè se e solo se $Z(G)$ è divisibile di rango 1. In quest'ultimo caso esiste $n \in \mathrm{N}$ tale che $G = \Omega_n(G)Z(G)$ con $\Omega_n(G)$ finito. Sia $\mathrm{P} \trianglelefteq \operatorname{Aut}(\Omega_n(G))$ un p-gruppo che centralizza $Z(\Omega_n(G))$. L'applicazione che manda $\alpha \in P$ in $\bar{\alpha} \in \operatorname{Aut} G$, l'estensione di α a G che è l'identità su $Z(G)$, è un omomorfismo iniettivo e la sua immagine è un p-sottogruppo normale in $\operatorname{Aut} G$, poichè $\Omega_n(G)$ è caratteristico in G. Se $\Omega_n(G)$ non è del tipo di Hall, per [7], Corollary 4.2, esiste un tale $P \nleq \operatorname{Inn} \Omega_n(G)$. Quindi la sua immagine non è contenuta in $\operatorname{Inn} G$. Se $\Omega_n(G)$ è del tipo di Hall, allora se $p \neq 2$, per [3], Satz III.13.10, $\Omega_n(G) = \Omega_1(\Omega_n(G))Z(\Omega_n(G)) = \Omega_1(G)Z(\Omega_n(G))$, con $\Omega_1(G)$ extraspeciale di esponente p. Quindi $G = \Omega_1(G)Z(G)$ e già sappiamo che in questo caso $O_p(\operatorname{Out} G) = 1$. Se $p = 2$ e $|Z(\Omega_n(G))| = 2$, allora è $n = 1$. Si consideri l'automorfismo che è l'identità su $\Omega_1(G)$ e l'inversione su $Z(G)$. Ha ordine 2 ed è contenuto in $Z(\operatorname{Aut} G)$. Perciò $O_2(\operatorname{Out} G) \neq 1$. Se $|Z(\Omega_n(G))| \geqslant 4$, in base alla dimostrazione di Satz III.13.10 in [3], si ha che $\Omega_n(G) = EZ(\Omega_n(G))$, con E extraspeciale e $Z(\Omega_n(G))$ ciclico, $\varphi(\Omega_n(G)) \leqslant Z(\Omega_n(G))$ e $\Omega_n(G) = \Omega_2(\Omega_n(G))Z(\Omega_n(G)) = \Omega_2(G)Z(\Omega_n(G))$, dove $\Omega_2(G) = \{g \in G / g^4 = 1\}$. Segue che $G = \Omega_2(G)Z(G)$ e $Z(G) \cap \Omega_2(G)$ è ciclico di ordine 4. Sia $P \trianglelefteq \operatorname{Aut}(\Omega_2(G))$ un p-gruppo. L'applicazione che manda $\alpha \in P$ in $\bar{\alpha} \in \operatorname{Aut} G$, l'estensione di α a G che è l'identità o l'inversione su $Z(G)$ a seconda di come agisce su $\Omega_2(G) \cap Z(G)$, è un omomorfismo iniettivo e l'immagine è un 2-sottogruppo normale in $\operatorname{Aut} G$, perchè $\Omega_2(G)$ è caratteristico in G e l'inversione è in $Z(\operatorname{Aut} Z(G))$. Poichè per [7], Proposition 3.3, esiste un tale

$P \nleqslant \operatorname{Inn}(\Omega_2(G))$, allora l'immagine non è contenuta in $\operatorname{Inn} G$.

Se G ha un sottogruppo basico B infinito, si pone $\Delta = \Omega_1(Z(G) \cap \cap G')$ e $Y = \Omega_1\big(Z(X(\Delta))\big)$. Se $u \in \Delta$, $\operatorname{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G) \cong \operatorname{Hom}(G/\varphi(G), \langle u \rangle)$, p-gruppo di cardinalità $2^{|B|}$, per [8], *XIV*. È lecito suppore $\operatorname{Inn} G \geqslant \geqslant \operatorname{Aut}_\varphi^\Delta(G) \geqslant \operatorname{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G)$ $\forall u \in \Delta$. Questo comporta che per ogni $u \in \Delta$ $|X(\langle u \rangle)/Z(G)| = 2^{|B|}$ e quindi, tenendo presente che $C_G(X(\langle u \rangle)) \geqslant \geqslant \varphi(G)$, che $|Z(X(\langle u \rangle))| = |\Omega_1\big(Z(X(\langle u \rangle))\big)| \geqslant 2^{|B|}$. In particolare esiste $\bar{u} \in \Omega_1\big(Z(X(\langle u \rangle))\big) - G'$. Esiste $v \in G$ tale che $G = \langle v \rangle M$, M massimale con $C_G(\bar{u}) \geqslant M \geqslant C_G\big(X(\Delta)\big) \geqslant \varphi(G)$. Se $p \neq 2$, si costruisce un automorfismo α di G, ponendo $\alpha v = v\bar{u}$ e $\alpha m = m \forall m \in M$. Se $\Delta = \langle u \rangle$, allora $\alpha \in \operatorname{Aut}_Y^Y(G)$. Altrimenti si può supporre $X(\langle u \rangle) \leqslant \varphi(G)$. Infatti se $g \in X(\langle u \rangle) - \varphi(G)$, $u' \in \Delta - \langle u \rangle$ e $G = \langle g \rangle M$, con M massimale, allora si può definire $\beta \in \operatorname{Aut}_\varphi^\Delta(G)$ in questa maniera: $\beta g = gu'$, $\beta m = m \forall m \in M$. β non è interno, perchè altrimenti esisterebbe $w \in G$, con $[g, w] = u' \notin \langle u \rangle$. Di conseguenza $X(\langle u \rangle) \leqslant \varphi(G)$ e quindi $X(\langle u \rangle) \leqslant \leqslant C_G\big(X(\Delta)\big) \cap X(\Delta) \cap C_G\big(X(\langle u \rangle)\big)$. Perciò $X(\langle u \rangle) = Z\big(X(\langle u \rangle)\big) \leqslant \leqslant Z\big(X(\Delta)\big)$ e $\Omega_1\big(Z(X(\langle u \rangle))\big) \leqslant Y$. Quindi in ogni caso $\alpha \in \operatorname{Aut}_Y^Y(G) \cong \cong Z^1(G/Y, Y)$, p-gruppo e α non è interno. Sia ora $p = 2$. La dimostrazione è pressochè identica a quella del caso $p \neq 2$, ma si devono fare alcune lievi modifiche. Siano $\Gamma = \Omega_1(Z(G) \cap G') \cap \mho_1(Z(G) \cap G')$ e $K = \Omega_1\big(Z(X(\Gamma))\big)\Omega_2(Z(G) \cap G')$. Poichè si può supporre $Z(G) \cap G'$ di esponente infinito (altrimenti $|B| \geqslant |G/Z(G)|$ e $\operatorname{Inn} G \ngeqslant \operatorname{Aut}_\varphi^\Delta(G)$, vedi [1], dimostrazione di Theorem 2.4), $\Gamma \neq 1$. Come sopra, si arriva a dimostrare che si può supporre l'esistenza di $\bar{u} \in \Omega_1\big(Z(X(\langle u \rangle))\big) - G'$, dove u è un qualsiasi elemento di Γ. Esiste $v \in G$ tale che $G = \langle v \rangle M$, con M massimale e $C_G(\bar{u}) \geqslant M \geqslant C_G\big(X(\Gamma)\big) \geqslant \varphi(G)$. Sia $d \in Z(G) \cap G'$ tale che $d^4 = 1$ e $d^2 = [v, \bar{u}]$. Allora si pone $\alpha v = v\bar{u}d$ e $\alpha m = m \forall m \in M$. Alla stessa maniera di prima si vede che $\alpha \in \operatorname{Aut}_K^K(G) \cong Z^1(G/K, K)$, 2-gruppo e α non è interno, potendo supporre che $\bar{u} \in K$. Va osservato che la dimostrazione dell'ultima parte del teorema, quella relativa a B infinito, è un adattamento della dimostrazione già data da Menegazzo e Stonehewer in [4], 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Buckley - J. Wiegold, *On the number of outer automorphisms of an infinite nilpotent p-group*, Arch. Math., **31** (1978), pp. 321-328.

[2] W. Gaschutz, *Nichtabelsche p-gruppen besitzen aüßere p-Automorphismen*, J. Algebra, **4** (1966), pp. 1-2.

[3] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967.
[4] F. MENEGAZZO - S. STONEHEWER, *On the automorphism group of a nilpotent p-group*, in corso di stampa presso il J. London Math. Soc.
[5] O. MÜLLER, *On p-automorphisms of finite p-groups*, Arch. Math., **32** (1979), pp. 533-538.
[6] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, part 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
[7] P. SCHMID, *Normal p-subgroups in the group of outer automorphisms of a finite p-group*, Math. Z., **147** (1976), pp. 271-277.
[8] A. E. ZALESSKIĬ, *A nilpotent p-group has an outer automorphism*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **196** (1971) (traduzione in inglese: Soviet Math. Dokl., **12** (1971), pp. 127-130).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 luglio 1984.