RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

S. MARZANO

P. PODIO-GUIDUGLI

Materiali elastici approssimativamente vincolati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 73 (1985), p. 99-117

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__99_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 73 (1985)

Materiali elastici approssimativamente vincolati.

S. MARZANO - P. PODIO-GUIDUGLI (*)

SUMMARY - Firstly, a Signorini-type perturbative scheme for the traction problem of finite elasticity is adapted to accomodate for constitutive equations exhibiting a pole of arbitrary but finite order K in the limit when a certain material modulus tends to zero. A novel trait of the resulting family of successive problems is that the first $K-1$ approximations $\boldsymbol{H}_p$ ($p = 1, 2, ..., K-1$) of the displacement gradient are restricted by an algebraic, rather than differential, system of equations; these equations, in turn, can be treated in appropriate succession so as to involve only one of the $\boldsymbol{H}_p$ at a time. Secondly, elaborating further on an idea of Grioli [1], [2], [3], [4], [8], it is shown how to associate with a given elastic material other materials which are approximately constrained in the sense that the first-order approximation $\boldsymbol{H}_1$ of the displacement gradient obeys an exact linear condition reflecting an internal constraint on feasible deformation. It turns out that in a traction problem for an approximately constrained material the first-order approximation of the stress depends in general on all of the first K approximations of the displacement gradient. Examples of both isotropic and anisotropic approximately constrained materials are briefly discussed.

1. Introduzione.

Di recente G. Grioli ha attirato l'attenzione sulla questione di dipendenza continua da certi moduli elastici convenientemente definiti delle soluzioni di problemi di elasticità finita (si vedano [1], [2],

(*) Indirizzo degli AA.: S. MARZANO: Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Bari; P. PODIO-GUIDUGLI: Dipartimento di Ingegneria Civile Edile, Facoltà di Ingegneria, Università di Roma - Tor Vergata.

[3], [4]). Così facendo, egli si è opportunamente richiamato, nel contesto non lineare, ad una problematica che è stata oggetto di non eccessivo studio anche nell'ambito più semplice dell'elasticità lineare (*cf.*, a questo proposito, i lavori di Carlson [5], [6] e la bibliografia in essi contenuta). Inoltre, indotto a ciò dal suo interesse per certi problemi di propagazione ondosa affrontati per via perturbativa, egli ha posto la domanda seguente: si può scegliere come parametro di perturbazione un modulo elastico opportuno, sì che «... sia possibile associare ad un qualunque continuo elastico, isotropo nella configurazione di riferimento, un unico solido rigido ...» [1], da riguardarsi come limite cui tende il continuo elastico al tendere a zero del parametro, e determinare altresì lo stato di sforzo in questo solido rigido?

A questa domanda, di per sè a prima vista piuttosto inquietante (come mai si potrà determinare ciò che è per definizione indeterminabile, ci si può ingenuamente chiedere) Grioli ha, beninteso, fornito anche una risposta, che qui riassumiamo brevemente per convenienza del lettore, rimandando a [1], [2] per chiarimenti e dettagli:
detti

$$\boldsymbol{E} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbf{1}) \tag{1.1}$$

il tensore di deformazione di Green-St. Venant ($\boldsymbol{F}$ è definito da (2.2)), e $\tilde{\boldsymbol{T}}$ il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, si può, per un materiale elastico isotropo, presumere che l'equazione costitutiva

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \mathcal{G}(\boldsymbol{E}) \tag{1.2}$$

si riduca sempre all'aspetto

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E} + \mathcal{E}(\boldsymbol{E}, \gamma) \quad (^1)\,, \tag{1.3}$$

dove ε è un modulo elastico che corrisponde all'inverso del modulo di Lamé μ dell'elasticità classica, γ è rappresentativo di una lista finita di parametri, ed accade che, per ogni scelta di γ, $\mathcal{E}(\boldsymbol{E}, \gamma)$ tende a zero almeno con la velocità di $\boldsymbol{E}$. Se si suppone ulteriormente che

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon) = \varepsilon\boldsymbol{E}'(0) + \boldsymbol{O}(\varepsilon)\,, \tag{1.4}$$

(1) In relazione al procedimento di riduzione di (2) a (3), è interessante consultare anche il recente lavoro di Ciarlet e Geymonat [7].

segue che, per $\varepsilon \to 0$, lo stato di deformazione si annulla e lo stato di sforzo ha limite

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_0 = \boldsymbol{E}'(0); \tag{1.5}$$

$\boldsymbol{E}'(0)$ descrive il campo di tensione nel solido rigido associato al continuo elastico di partenza.

Fin qui Grioli, ma naturalmente egli presume anche, implicitamente, che l'equazione di bilancio della quantità di moto consenta di determinare il campo $\boldsymbol{E}'(0)$.

In questo lavoro forniamo un'altra possibile risposta al quesito di Grioli, valendoci in buona misura delle idee e degli sviluppi contenuti in [8], sia pure con certe differenze appropriate al contesto. Rendendo sistematico come in [9] l'approccio perturbativo al problema posto da Grioli, sviluppiamo una successione di problemi di equilibrio tale da descrivere il comportamento, in caso di forze assegnate su tutto il bordo, di un materiale elastico non necessariamente isotropo che abbia, per $\varepsilon = 0$, un polo di ordine finito K arbitrario. Riassunta poi per grandi linee, sulla falsariga di [10], la teoria dei materiali elastici con vincoli interni, perveniamo ad una definizione formale di materiale elastico approssimativamente vincolato, ovvero capace soltanto di deformazioni che, al primo ordine di approssimazione in ε, sono dell'uno o dell'altro dei tipi caratteristici delle varie classi di materiali linearmente vincolati. Mostriamo altresì che la prima approssimazione dello stato di sforzo dipende in generale dalle prime K approssimazioni del gradiente di spostamento, le quali possono non essere univocamente determinate. Infine, per mezzo anche di esempi, facciamo vedere che gli unici materiali elastici isotropi approssimativamente vincolati sono i materiali approssimativamente rigidi e quelli approssimativamente incomprimibili, mentre altri tipi di materiali approssimativamente vincolati sono possibili quando per $\varepsilon = 0$ si abbia un polo di ordine superiore al primo, o anche quando il materiale elastico di partenza sia anisotropo.

Ci sembra concettualmente importante disporre di un approccio ai materiali approssimativamente vincolati indipendente dall'ipotesi di isotropia del materiale di partenza, se non altro perchè, riprendendo qui una pertinente osservazione di Thompson [11], porre il problema di dipendenza continua per un materiale isotropo presuppone ottimisticamente di avere incertezza nulla su tutti i moduli materiali eccetto quelli che appaiono nell'equazione costitutiva ridotta. Per ragioni analoghe, val la pena di non restringere l'attenzione ai casi di polo del primo ordine nell'equazione costitutiva del materiale di partenza. Infine, anche per le questioni di propagazione ondosa cui Grioli ha voluto indirizzarsi in [1], disporre di materiali che in prima approssimazione non sono necessariamente rigidi, ma verificano altre condizioni di vincolo, ad esempio, l'incomprimibilità, può riservare diverse sorprese.

2. Uno schema perturbativo per il problema di forze assegnate.

In questa sezione, che è basata sulle sezioni 2 e 4 di [8], descriviamo per il problema di forze ovunque assegnate sul contorno uno schema perturbativo di soluzione che ha tratti di maggiore e, nel contempo, minore generalità dell'analogo schema sviluppato in [8]. Infatti, ammettiamo qui che la dipendenza dal parametro di perturbazione comporti la presenza nell'origine di un polo di ordine finito arbitrario, invece che semplice; d'altra parte, le forze applicate al bordo sono qui morte, cioè esse, ancorchè dipendenti in generale dal parametro, non dipendono però in alcun modo dalla soluzione.

Identifichiamo un corpo continuo con una data regione regolare $\mathcal{B}_0$, che ha parte interna $\mathring{\mathcal{B}}_0$ e contorno $\partial\mathcal{B}_0$ di normale esterna $\boldsymbol{n}_0$, di uno spazio euclideo tridimensionale. Sia $\boldsymbol{x}$ un generico punto di $\mathcal{B}_0$, e sia $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ il campo di spostamento che porta il corpo nel piazzamento corrente; siano

$$\boldsymbol{H} = \nabla\boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

e

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{H} \tag{2.2}$$

i gradienti di spostamento e di deformazione, rispettivamente. Sia inoltre

$$\boldsymbol{S} = \mathcal{F}(\boldsymbol{F}, \varepsilon) \tag{2.3}$$

l'equazione costitutiva che specifica il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff corrispondente ad un assegnato valore $\boldsymbol{F}$ del gradiente di deformazione per ogni scelta del parametro ε in un fissato intorno $\mathcal{C}$

dell'origine. Infine, siano

$$\boldsymbol{b}(\varepsilon) = \varepsilon \boldsymbol{b}_1 , \qquad \boldsymbol{s}(\varepsilon) = \varepsilon \boldsymbol{s}_1 \tag{2.4}$$

le dipendenze dal parametro (qui scelte con il criterio della semplicità) delle forze di volume e di superficie, rispettivamente, applicate a $\mathcal{B}_0$.

Vogliamo determinare un campo di spostamento

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{u}_n , \tag{2.5}$$

che sia soluzione del problema di equilibrio

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \mathcal{F}\big(\boldsymbol{F}(\varepsilon), \varepsilon\big) + \boldsymbol{b}(\varepsilon) = \boldsymbol{0} & \text{in } \mathring{\mathcal{B}}_0 , \\ \mathcal{F}\big(\boldsymbol{F}(\varepsilon), \varepsilon\big) \boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{s}(\varepsilon) \quad = \boldsymbol{0} & \text{su } \partial\mathcal{B}_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

per ogni $\varepsilon \in \mathcal{E}$, sotto le ipotesi di seguito elencate:

(h_1) per ogni $\boldsymbol{F}$ in un opportuno intorno $\mathcal{N}$ dell'identità $\mathbf{1}$, $\mathcal{F}$ ammette l'espansione di Laurent in ε

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{F}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon^{-k} \mathcal{F}_{-k}(\boldsymbol{F}) + \mathcal{F}_0(\boldsymbol{F}) + \varepsilon \mathcal{F}_1(\boldsymbol{F}) + \dots ; \tag{2.7}$$

(h_2) ciascuno degli operatori $\mathcal{F}_n$, per $n = -K, -K+1, \dots, 0, 1, \dots$, è analitico in $\mathcal{N}$;

(h_3) $\qquad \mathcal{F}_{-p}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{0} , \qquad$ per $p = 1, 2, \dots, K$;

(h_4) $$\sum_{k=1}^{K-p} [\mathbf{S}_{-(p+k)} \boldsymbol{H}_k + \zeta_{-(p+k),k}(\boldsymbol{H}_1, \dots, \boldsymbol{H}_{k-1})] = \boldsymbol{0} ,$$

per $p = 1, 2, \dots, K-1$.

Nel formulare queste ipotesi, abbiamo usato la notazione seguente (*cf.* ancora [8], § 2):

$$\mathbf{S}_n = \nabla \mathcal{F}_n|_{\boldsymbol{F}=\mathbf{1}} ; \qquad \boldsymbol{H}_n = \nabla \boldsymbol{u}_n ; \tag{2.8}$$

$$\zeta_{n,1} \equiv \boldsymbol{0} , \qquad \zeta_{n,2} = \tfrac{1}{2} \big(\nabla^{(2)} \mathcal{F}_n|_{\boldsymbol{F}=\mathbf{1}}[\boldsymbol{H}_1]\big)[\boldsymbol{H}_1] , \tag{2.9}$$

e, per $m > 2$,

$$\zeta_{n,m} = \sum_{r=2}^{m} \frac{1}{r!} \sum_{\mathbb{P}_r^m} \Big(\Big(\ldots \Big((\nabla^{(r)}\mathcal{F}_n|_{F=1}[\boldsymbol{H}_{\alpha_1}]\Big)[\boldsymbol{H}_{\alpha_2}]\Big)\ldots\Big)[\boldsymbol{H}_{\alpha_r}]\Big)\,, \tag{2.10}$$

dove $\mathbb{P}_r^m$ è l'insieme di tutte le permutazioni con ripetizione $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ dei numeri $1, 2, \ldots, m$ (presi r alla volta), tali che $\sum_{s=1}^{r} \alpha_s = m$.

Stanti le ipotesi, il tensore degli sforzi ammette la seguente espansione formale nel parametro ε:

$$\boldsymbol{S}(\varepsilon) = \boldsymbol{S}_0 + \varepsilon \boldsymbol{S}_1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{S}_2 + \ldots\,, \tag{2.11}$$

dove si intende

$$\boldsymbol{S}_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}\big(\boldsymbol{F}(\varepsilon), \varepsilon\big) = \mathcal{F}_0(\mathbf{1}) + \sum_{k=1}^{K} [\mathbb{S}_{-k}\boldsymbol{H}_k + \zeta_{-k,k}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{k-1})]\,; \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{F}\big(\boldsymbol{F}(\varepsilon), \varepsilon\big) - \boldsymbol{S}_0}{\varepsilon} = \mathcal{F}_1(\mathbf{1}) + \mathbb{S}_0\boldsymbol{H}_1 + \\ + \sum_{k=1}^{K} [\mathbb{S}_{-k}\boldsymbol{H}_{k+1} + \zeta_{-k,k+1}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_k)]\,; \tag{2.13}$$

e, per $p \geqslant 2$,

$$\boldsymbol{S}_p = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{F}\big(\boldsymbol{F}(\varepsilon), \varepsilon\big) - \Big(\boldsymbol{S}_0 + \sum_{l=1}^{p-1} \varepsilon^l \boldsymbol{S}_l\Big)}{\varepsilon^p} = \\ = \mathcal{F}_p(\mathbf{1}) + \sum_{k=1}^{K} [\mathbb{S}_{-k}\boldsymbol{H}_{k+p} + \zeta_{-k,k+p}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{k+p-1})] + \\ + \sum_{l=1}^{p} [\mathbb{S}_{p-l}\boldsymbol{H}_l + \zeta_{p-l,l}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{l-1})]\,. \tag{2.14}$$

Si genera così una successione infinita di problemi lineari in cascata, dove: la scelta dei gradienti di spostamento $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{K-1}$ resta ristretta dalle (h_4); $\boldsymbol{H}_K$ è una delle soluzioni del problema

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{S}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathring{\mathcal{B}}_0\,, \qquad \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{n}_0 = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\mathcal{B}_0\,, \tag{2.15}$$

(cioè, il campo di sforzo $\boldsymbol{S}_0$ è autoequilibrato), problema che più esplicitamente ha l'aspetto

$$(2.15)' \qquad \begin{cases} \operatorname{Div}(\mathsf{S}_{-K}\boldsymbol{H}_K) = -\boldsymbol{l}_K & \text{in } \mathring{\mathscr{B}}_0\,, \\ (\mathsf{S}_{-K}\boldsymbol{H}_K)\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{s}_K & \text{su } \partial\mathscr{B}_0\,, \end{cases}$$

dove si è posto

$$(2.16) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{l}_K &= \boldsymbol{l}_K(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{K-1}) = \\ &= \operatorname{Div}\Big\{\mathscr{F}_0(1) + \sum_{k=1}^{K-1}[\mathsf{S}_{-k}\boldsymbol{H}_k + \zeta_{-k,k}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{k-1})] + \\ &\qquad\qquad + \zeta_{-K,K}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{K-1})\Big\}\,, \\ \boldsymbol{s}_K &= \boldsymbol{s}_K(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{K-1}) = \\ &= -\Big\{\mathscr{F}_0(1) + \sum_{k=1}^{K-1}[\mathsf{S}_{-k}\boldsymbol{H}_k + \zeta_{-k,k}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{k-1})] + \\ &\qquad\qquad + \zeta_{-K,K}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{K-1})\Big\}\boldsymbol{n}_0\,; \end{aligned}$$

$\boldsymbol{H}_{K+1}$ è una delle soluzioni del problema

$$(2.17) \qquad \operatorname{Div}\boldsymbol{S}_1 = -\boldsymbol{b}_1 \quad \text{in } \mathring{\mathscr{B}}_0\,, \qquad \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{s}_1 \quad \text{su } \partial\mathscr{B}_0\,,$$

dove la prima equazione si scrive, più esplicitamente,

$$(2.17)_1' \qquad \operatorname{Div}(\mathsf{S}_{-K}\boldsymbol{H}_{K+1}) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{l}_{K+1}(\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_K) \quad \text{in } \mathring{\mathscr{B}}_0;$$

e così seguitando.

Si osserva subito il ruolo centrale dell'operatore lineare S_{-K} nel decidere le qualità analitiche di questa successione di problemi, nonchè la buona posizione di ciascun problema della successione.

Le ipotesi (h_3) e (h_4), che assieme garantiscono la finitezza dello stato di sforzo nel limite per $\varepsilon \to 0$, hanno natura locale; in particolare, le (h_4) formano un sistema algebrico lineare nelle incognite $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{K-1}$, le cui equazioni possono essere trattate in successione opportuna: per $p = K - 1$ si ottiene infatti un'equazione in $\boldsymbol{H}_1$ soltanto; per $p = K - 2$, scelta una soluzione della prima equazione, si ottiene un'equazione in $\boldsymbol{H}_2$ soltanto; e così via fino ad ottenersi, per $p = 1$, un'equazione nella sola $\boldsymbol{H}_{K-1}$. Le condizioni di esistenza e unicità di soluzione di questo sistema algebrico sono le ben note condizioni di ortogonalità espresse dal teorema di alternativa di Fredholm, condizioni che restringono ulteriormente la scelta delle approssimazioni successive del gradiente di spostamento e che richiedono l'ispezione del nucleo dell'operatore $\mathbf{S}_{-K}$ e del suo aggiunto.

Inoltre, analoghe condizioni di ortogonalità (questa volta espresse avendo mente al nucleo dell'operatore aggiunto dell'operatore $\operatorname{Div} \mathbf{S}_{-K}[\nabla(\cdot)]$ sulla varietà definita dalla condizione al bordo omogenea

$$\mathbf{S}_{-K}[\nabla(\cdot)]\boldsymbol{n}_0 = \mathbf{0}\,,$$

cf. [9], § 6) vanno poste per la solubilità dei sistemi lineari alle derivate parziali (15), (17) e successivi.

3. Schema perturbativo in presenza di un polo del primo ordine.

Cominciamo con il considerare l'aspetto che gli sviluppi formali della sezione precedente assumono nel caso in cui si abbia un polo del primo ordine per $\varepsilon = 0$.

Anzitutto, l'ipotesi (h_3) si riduce a

$$(h_3) \qquad \mathcal{F}_{-1}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}\,,$$

mentre l'ipotesi (h_4) risulta adesso vuota. Il problema (2.15) diviene semplicemente

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \operatorname{Div}(\mathbf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_1) = -\operatorname{Div}\mathcal{F}_0(\mathbf{1}) & \text{in } \mathring{\mathcal{B}}_0\,, \\ (\mathbf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{n}_0 = -\mathcal{F}_0(\mathbf{1})\boldsymbol{n}_0 & \text{su } \partial\mathcal{B}_0\,; \end{cases}$$

a sua volta, il problema (2.17) diviene

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \operatorname{Div}(\mathbf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_2) = \\ \qquad = -\big(\boldsymbol{b}_1 + \operatorname{Div}(\mathcal{F}_1(\mathbf{1}) + \mathbf{S}_0\boldsymbol{H}_1 + \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1))\big) & \text{in } \mathring{\mathcal{B}}_0\,, \\ (\mathbf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_2)\,\boldsymbol{n}_0 = \\ \qquad = \boldsymbol{s}_1 - (\mathcal{F}_1(\mathbf{1}) + \mathbf{S}_0\boldsymbol{H}_1 + \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1))\,\boldsymbol{n}_0 & \text{su } \partial\mathcal{B}_0\,, \end{cases}$$

etc..

Se ora introduciamo l'ulteriore ipotesi:

(h_5) il campo di sforzo $\mathcal{F}_0(1)$ è autoequilibrato,

segue che altrettanto può dirsi per il campo di sforzo $\mathsf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_1$, e discende da (1) la conseguenza integrale

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathsf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_1 = 0 . \tag{3.3}$$

Ammettiamo adesso, in analogia con l'ipotesi che si fa per stabilire il classico teorema di unicità di Kirchhoff in elasticità lineare, che l'operatore S_{-1} sia (simmetrico e) semi-definito positivo, ovvero che per ogni scelta degli elementi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ di Lin, la collezione dei tensori del secondo ordine, sia

(h_6) $\quad \boldsymbol{A}\cdot\mathsf{S}_{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\mathsf{S}_{-1}\boldsymbol{A} \quad$ e $\quad \boldsymbol{A}\cdot\mathsf{S}_{-1}\boldsymbol{A} \geqslant 0$ (2) .

In vista di (h_6), l'equazione (3) ha l'equivalente locale

$$\boldsymbol{H}_1 \cdot \mathsf{S}_{-1}\boldsymbol{H}_1 = 0 , \tag{3.4}$$

che $\boldsymbol{H}_1$ verifica se e solo se

$$\boldsymbol{H}_1 \in \operatorname{Ker} \mathsf{S}_{-1}; \tag{3.5}$$

per il primo della sequenza di problemi, in cui il dato problema di forze assegnate si disgrega dopo l'introduzione del parametro perturbativo, sono allora possibili soltanto soluzioni concordi con (5).

OSSERVAZIONE 1. Segue da (2.12) e (5) che

$$\boldsymbol{S}_0 = \mathcal{F}_0(1); \tag{3.6}$$

questo campo di sforzo (autoequilibrato) resta indeterminato e indeterminabile nell'ambito della nostra attuale analisi, a meno di non

(2) Resta aperta la questione, inessenziale nel contesto presente, di dedurre eventualmente $(h_6)_1$ e $(h_6)_2$ dalle usuali richieste di iperelasticità del materiale e di positività o ellitticità del piazzamento di riferimento, rispettivamente.

prescriverlo nullo con ulteriori opportune ipotesi di natura costitutiva, ad es., l'ipotesi che il piazzamento di riferimento sia naturale (at ease, nella terminologia introdotta da C. Truesdell).

OSSERVAZIONE 2. Oltre che da (5), la scelta della prima approssimazione del gradiente di spostamento resta ristretta dalla condizione di ortogonalità alla Fredholm

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}_1 + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}_1 - \int_{\mathcal{B}_0} \nabla\boldsymbol{v}\cdot\left(\mathcal{F}_1(\mathbf{1}) + \mathrm{S}_0\boldsymbol{H}_1 + \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1)\right) = 0 \tag{3.7}$$

per ogni $\boldsymbol{v}$ appartenente al nucleo dell'operatore $\left(-\operatorname{Div}\mathrm{S}_{-1}[\nabla(\cdot)],\ \mathrm{S}_{-1}[\nabla(\cdot)]\boldsymbol{n}_0\right)$. Tuttavia questa condizione, coinvolgendo anche i dati $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{s}_1$, non ha il significato costitutivo diretto, e quindi l'interesse, di (5).

4. Materiali elastici vincolati.

Per far emergere nel modo più naturale la nozione di materiale approssimativamente vincolato, occorre a questo punto ricapitolare brevemente gli aspetti salienti della teoria dei vincoli cinematici interni, nella forma particolarmente semplice che essa assume nel caso dei materiali elastici (*cf.* [10], § 4).

Un materiale elastico si dice *vincolato* se il dominio su cui la funzione costitutiva $\mathcal{F}$ è definita è una varietà (connessa e) differenziabile $\mathcal{M}$ dell'insieme Lin$^+$ dei tensori del secondo ordine con determinante positivo, tale che

(i) $\mathbf{1}\in\mathcal{M}$ (cioè, il piazzamento di riferimento è scelto in modo che il corrispondente gradiente di deformazione, $\boldsymbol{F}=\mathbf{1}$, risulta essere un punto di $\mathcal{M}$);

(ii) se $\boldsymbol{F}\in\mathcal{M}$ e se $\boldsymbol{Q}\in$ Orth$^+$, la sottocollezione ortogonale di Lin$^+$, allora $\boldsymbol{QF}\in\mathcal{M}$ (cioè, la varietà $\mathcal{M}$ è chiusa sotto cambiamenti di osservatore);

(iii) $\dim\mathcal{M}\leqslant 8$.

Se si indica con $\dot{\mathcal{M}}(\boldsymbol{F})$ lo spazio tangente a $\mathcal{M}$ nel punto $\boldsymbol{F}\in\mathcal{M}$, lo sforzo $\boldsymbol{S}$ si decompone additivamente in una parte attiva $\boldsymbol{S}_A$ e una parte reattiva $\boldsymbol{S}_R$:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_A + \boldsymbol{S}_R\,, \tag{4.1}$$

con

$$\boldsymbol{S}_A = \mathcal{F}(\boldsymbol{F}) \tag{4.2}$$

e con $\boldsymbol{S}_R$ appartenente al complemento ortogonale di $\dot{\mathcal{M}}(\boldsymbol{F})$, ma per altro arbitrario:

$$\boldsymbol{S}_R \in \big(\dot{\mathcal{M}}(\boldsymbol{F})\big)^{\perp}\,. \tag{4.3}$$

Un esempio classico di vincolo interno è il vincolo di *rigidità*, dove

$$\mathcal{M} = \mathrm{Orth}^+\,. \tag{4.4}$$

Si ottiene allora

$$\dot{\mathcal{M}}(\boldsymbol{F}) = (\mathrm{Skw})\boldsymbol{F}\,, \tag{4.5}$$

dove Skw indica la collezione dei tensori antisimmetrici; quindi, per la (3),

$$\boldsymbol{S}_R = \alpha \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^{-T}\,, \tag{4.6}$$

dove α è uno scalare arbitrario e $\boldsymbol{B}$ è un elemento arbitrario di Sym, la collezione dei tensori simmetrici.

Altri esempi si riassumono nell'assegnazione di un'equazione scalare che definisce $\mathcal{M}$, del tipo

$$\gamma(\boldsymbol{F}) = 0\,, \tag{4.7}$$

naturalmente con

$$\gamma(\mathbf{1}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}) = 0$$

per ogni $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{Orth}^+$ e per ogni $\boldsymbol{F}$ che verifica (7), per soddisfare i requisiti (i) e (ii) di cui sopra. In questo caso,

$$\dot{\mathcal{M}}(\boldsymbol{F}) = \{\boldsymbol{F}' | D\gamma|_{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}' = 0\} \tag{4.8}$$

e pertanto

$$S_R = \alpha\, D\gamma|_F\,, \tag{4.9}$$

dove $D\gamma$ indica il gradiente di γ ed α è ancora uno scalare arbitrario.

La teoria lineare dei materiali elastici vincolati si ottiene facilmente ponendo formalmente

$$F = \mathbf{1} + \eta H \tag{4.10}$$

e interpretando il parametro di linearizzazione η come una qualche conveniente norma del gradiente di spostamento H. Dal punto di vista della teoria lineare (che naturalmente si può formulare in modo diretto, indipendentemente dal presente procedimento deduttivo per linearizzazione o da altri che si possano concepire), un materiale è rigido se il gradiente di deformazione H è antisimmetrico

$$H \in \mathrm{Skw} = \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{1})\,; \tag{4.11}$$

per un materiale rigido lo sforzo S, che, in teoria lineare, come si sa, dev'essere simmetrico, risulta completamente reattivo:

$$S = S_R = \alpha B\,, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } B \in \mathrm{Sym} \text{ arbitrari}\,. \tag{4.12}$$

Del pari, se il vincolo è espresso da una restrizione scalare, la linearizzazione richiede che H appartenga al sottospazio di Lin

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{1}) = \{H | A \cdot H = 0,\ A = D\gamma|_{F=\mathbf{1}} \in \mathrm{Sym}\} \tag{4.13}$$

e si ha

$$S_R = \alpha A\,, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}\,. \tag{4.14}$$

Sono esempi di questa situazione:

(i) l'*incomprimibilità*, in cui

$$\mathcal{M} = \{F | \gamma(F) = \det F - 1 = 0\}\,,$$

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{1}) = \{H | \mathbf{1} \cdot H = \mathrm{tr}\, H = 0\} = \mathrm{Dev}\,, \quad A = \mathbf{1}\,, \quad S_R = \alpha \mathbf{1}\,;$$

dove Dev indica la collezione dei tensori a traccia nulla, o deviatori;

(ii) l'*inestensibilità* nella direzione materiale $\boldsymbol{e}$, in cui

$$\mathcal{M} = \{\boldsymbol{F}|\gamma(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{Fe})\cdot(\boldsymbol{Fe}) - 1 = 0\}\,,$$

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{1}) = \{\boldsymbol{H}|(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{H} = 0\}\,,\qquad \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}\,,\qquad \boldsymbol{S}_R = \alpha\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e};$$

(iii) la *conservazione di ortogonalità* tra le direzioni materiali $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{f}$ $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} = 0)$, in cui

$$\mathcal{M} = \{\boldsymbol{F}|\gamma(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{Fe})\cdot(\boldsymbol{Ff}) = 0\}\,,$$

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{1}) = \{\boldsymbol{H}|(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{H} = 0\}\,,\qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{e}\,,$$

$$\boldsymbol{S}_R = \alpha(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{e})\,.$$

5. Materiali approssimativamente vincolati con polo del primo ordine.

La giustapposizione di (3.5) e (4.13) suggerisce adesso la seguente definizione:

assegnato un sottospazio $\mathcal{V}$ di Lin, con dim $\mathcal{V} \leqslant 8$; assegnato un materiale elastico di equazione costitutiva

$$\boldsymbol{S} = \mathcal{F}(\boldsymbol{F}, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}\mathcal{F}_{-1}(\boldsymbol{F}) + \mathcal{F}_0(\boldsymbol{F}) + \varepsilon\mathcal{F}_1(\boldsymbol{F}) + \dots\,, \tag{5.1}$$

dove ε si interpreta come un opportuno modulo di elasticità e si suppongono verificate le ipotesi (h_2) e (h_3); il materiale si dice *vincolato in prima approssimazione* se accade che

$$\operatorname{Ker} \mathbf{S}_{-1} = \mathcal{V}\,. \tag{5.2}$$

Ad esempio, se si sceglie $\mathcal{V} = \mathrm{Skw}$ (*cf.* (4.11)), il materiale elastico in esame è in prima approssimazione rigido, pur non essendo vincolato ai sensi della definizione con cui si apre la precedente sezione 4. I materiali rigidi in prima approssimazione, che verificano anche le ipotesi (h_5) e (h_6), si comportano evidentemente in modo piuttosto peculiare in un problema di forze assegnate, come un breve esame degli sviluppi che precedono consente di rilevare. Essi formano una classe caratterizzata dal fatto di poter esperimentare deformazioni che, al primo ordine di approssimazione in ε, sono necessariamente di tipo rigido

$$\nabla \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{H}_1 \in \mathrm{Skw} .$$

La prima approssimazione $\boldsymbol{S}_1$ dello stato di sforzo non è tuttavia indeterminata, come accadrebbe per un materiale effettivamente rigido: si ha da (2.13) che

$$\boldsymbol{S}_1 = \mathbb{S}_{-1}\boldsymbol{H}_2 + \mathcal{F}_1(\mathbf{1}) + \mathbb{S}_0\boldsymbol{H}_1 + \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1) , \tag{5.3}$$

dove $\boldsymbol{H}_2 = \nabla \boldsymbol{u}_2$ è una soluzione del problema (3.2), soluzione che esiste se è rispettata la condizione di ortogonalità alla Fredholm (3.7), che assume nel caso presente l'aspetto

$$\boldsymbol{W}\cdot\Big(\int_{\mathcal{B}_0}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}_1 + \int_{\partial\mathcal{B}_0}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{s}_1 + \int_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{F}_1(\mathbf{1}) + \mathbb{S}_0\boldsymbol{H}_1 + \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1))\Big) = 0 \tag{5.4}$$

per ogni tensore antisimmetrico $\boldsymbol{W}$. La specificità di comportamento dei vari materiali facenti parte di questa classe è indicata, al primo ordine di approssimazione ed ai successivi, dall'apparire di un numero sempre crescente di funzioni $\mathcal{F}_n$ e loro derivate nelle formule che forniscono lo stato di sforzo. Prese nel loro complesso, queste considerazioni forniscono, ci pare, una delle possibili risposte alla questione posta da G. Grioli cui si accennava nell'Introduzione.

Ad ulteriore illustrazione della nozione di materiale elastico vincolato in prima approssimazione, riprendiamo brevemente, con qualche complemento e chiarimento, un esempio già considerato in [8].

Consideriamo il materiale iperelastico isotropo detto di St. Venant-Kirchhoff, che è descritto dall'equazione costitutiva

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = -\tfrac{1}{2}\mu\big((\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F})^2 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\big)\boldsymbol{F}^{-T} + \big(\tfrac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} - 3) + {}\\ + \mu(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} - 1)\big)\boldsymbol{F} + \mu(\det\boldsymbol{F})^2\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-T} ,\end{aligned} \tag{5.5}$$

dove i due moduli materiali λ, μ corrispondono agli analoghi moduli di Lamé dell'elasticità lineare isotropa. Notiamo che, ai sensi del procedimento di linearizzazione riassunto dalla (4.10), l'equazione costitutiva (5) ammette la ben nota approssimazione lineare

$$\boldsymbol{S} = \mathbb{S}\boldsymbol{H} = 2\mu\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{H} + \lambda(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H})\mathbf{1} , \tag{5.6}$$

da cui

$$\mathsf{S} = 2\mu \,\mathrm{sym} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \,. \tag{5.7}$$

Notiamo altresì che (5) si può ridurre alla forma (1) in due modi, a seconda che si ponga

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu} \quad \text{oppure} \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \,. \tag{5.8}$$

Con la prima identificazione di ε, si ottiene

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{-1}(\boldsymbol{F}) = -\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F})^2 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\right)\boldsymbol{F}^{-T} + (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}-1)\,\boldsymbol{F} + \\ \qquad\qquad\qquad + (\det \boldsymbol{F})^2\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-T}, \\ \mathcal{F}_0(\boldsymbol{F}) \;= \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}-3)\,\boldsymbol{F}, \\ \mathcal{F}_n(\boldsymbol{F}) \;= \mathbf{0} \quad \text{per } n \geqslant 1; \end{cases} \tag{5.9}$$

inoltre,

$$\mathcal{F}_{-1}(\mathbf{1}) = \mathcal{F}_0(\mathbf{1}) = \mathbf{0} \tag{5.10}$$

e

$$\begin{cases} \mathsf{S}_{-1} = 2\,\mathrm{sym}\,, \quad \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{H}_1^2 + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_1^T + \boldsymbol{H}_1^T\boldsymbol{H}_1\,, \\ \mathsf{S}_0 \;= \lambda\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\,. \end{cases} \tag{5.11}$$

Poichè evidentemente $(11)_1$ implica

$$\mathrm{Ker}\,\mathsf{S}_{-1} = \mathrm{Skw}\,,$$

si è così ottenuto un materiale rigido in prima approssimazione. Osserviamo che le (9)$\div$(11), insieme con le (3.6) e (3), rispettivamente, implicano che

$$\boldsymbol{S}_0 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{S}_1 = 2\,\mathrm{sym}\,\nabla\boldsymbol{u}_2 - (\nabla\boldsymbol{u}_1)^2\,,$$

mentre la condizione di Fredholm (4) si riduce alla usuale richiesta di equilibrio alla rotazione dei carichi.

Con la seconda identificazione di ε, i ruoli di $\mathcal{F}_{-1}$ e $\mathcal{F}_0$ si scambiano e si ha, a parità del resto,

$$(5.12)\qquad \begin{cases} \mathbb{S}_{-1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\,, & \zeta_{-1,2}(\boldsymbol{H}_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_1)\mathbf{1} + (\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{H}_1\,, \\ \mathbb{S}_0 \;= 2\mu \,\mathrm{sym}\,. \end{cases}$$

Consegue da $(12)_1$ che

$$\mathrm{Ker}\, \mathbb{S}_{-1} = \mathrm{Dev}$$

ovvero, ricordando l'esempio (i) della sezione precedente, che siamo adesso in presenza di un materiale incomprimibile in prima approssimazione. Il campo $\boldsymbol{u}_1$ deve dunque essere solenoidale su $\mathcal{B}_0$, e la sua scelta ristretta dalla condizione di Fredholm (3.7), che in questo caso ha l'aspetto

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}_1 + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}_1 - 2 \int_{\mathcal{B}_0} \mu\, \nabla\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{sym}\, \nabla \boldsymbol{u}_1 = 0$$

per ogni scelta di $\boldsymbol{v}$ solenoidale. Inoltre, ancora

$$\boldsymbol{S}_0 = \mathbf{0}\,,$$

mentre

$$\boldsymbol{S}_1 = (\mathrm{Div}\, \boldsymbol{u}_2)\mathbf{1} + 2\mu\, \mathrm{sym}\, \nabla \boldsymbol{u}_1 + \tfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{u}_1)\mathbf{1}\,.$$

Osservazione. Confrontando (7) con $(11)_1$ e $(12)_1$, si vede facilmente che quanto accade per il materiale di St. Venant-Kirchhoff accade anche per ogni altro materiale iperelastico isotropo: se ne può dedurre materiali vincolati in prima approssimazione appartenenti solo all'una o all'altra delle due classi approssimativamente rigida e approssimativamente incomprimibile. Ciò non stupisce, in quanto la rigidità e l'incomprimibilità si presentano in generale come gli unici vincoli « compatibili » con l'isotropia (*cf.* [10], Teorema 2, per il caso dei fluidi).

6. Polo di ordine qualunque.

Esaminiamo adesso brevemente il caso in cui per $\varepsilon = 0$ si abbia un polo di ordine $K > 1$. La definizione data nella sezione 5 va modificata come segue:

assegnato un sottospazio proprio $\mathcal{V} \subset \mathrm{Lin}$; assegnato un materiale elastico di equazione costitutiva (2.7) per la quale le ipotesi $(h_2) \div (h_4)$ sono verificate, $K > 1$, ed ε è un opportuno modulo di elasticità; il materiale si dice vincolato in prima approssimazione se accade che

$$\mathrm{Ker}\,\mathsf{S}_{-K} = \mathcal{V}\,. \tag{6.1}$$

Osservazione. Ponendovi $K = 1$, è facile controllare la consistenza di quest'ultima definizione con quella avanzata in precedenza per il caso di un polo del primo ordine.

A titolo di esempio, consideriamo l'equazione costitutiva lineare

$$\boldsymbol{S} = \mathsf{S}\boldsymbol{H}$$

con

$$\mathsf{S} = 2\mu\,\mathrm{sym} + \lambda \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}\,, \qquad \boldsymbol{B} = \mathbf{1} + \delta \boldsymbol{P}\,, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}\,, \qquad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} = 1\,. \tag{6.2}$$

Questa equazione costitutiva descrive un materiale linearmente elastico ad isotropia trasversa attorno all'asse di versore $\boldsymbol{e}$, per il quale, cioè, tutte le rotazioni del piazzamento di riferimento attorno all'asse di versore $\boldsymbol{e}$ sono ininfluenti sulla risposta meccanica successiva.

Da (2) segue facilmente

$$\mathsf{S} = 2\mu\,\mathrm{sym} + \lambda(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \delta(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \otimes \mathbf{1}) + \delta^2 \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P})\,. \tag{6.3}$$

Per confronto con la (5.7) è subito individuato in δ il modulo materiale responsabile dell'anisotropia, che infatti sparisce per $\delta \to 0$. Scegliendo nella (3)

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta}\,,$$

si può interpretare S come il tensore di elasticità, nel piazzamento di riferimento, di una classe di materiali iperelastici del tipo (2.7), con $K = 2$,

$$\mathsf{S}_{-2} = \lambda \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P}\,, \qquad \mathsf{S}_{-1} = \lambda(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \otimes \mathbf{1})\,, \qquad \mathsf{S}_0 = 2\mu\,\mathrm{sym} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\,, \tag{6.4}$$

e perciò approssimativamente vincolati nel senso che

$$H_1 \in \operatorname{Ker} S_{-2} . \tag{6.5}$$

L'ultima condizione si può equivalentemente scrivere

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{H}_1 = 0 , \tag{6.6}$$

e si interpreta osservando che, in conseguenza di (6), le fibre distese lungo la direzione materiale $\boldsymbol{e}$ risultano inestensibili al primo ordine di approssimazione in ε. Si ottiene così un esempio di materiale approssimativamente vincolato anisotropo.

Per concludere, è interessante osservare che, mentre per il caso di un polo del primo ordine la condizione di vincolo su $\boldsymbol{H}_1$ non ha carattere immediatamente costitutivo, nel senso che essa viene imposta dalle equazioni di equilibrio, per i poli di ordine superiore al primo, invece, la condizione di vincolo segue dall'ipotesi (h_4), e dunque ha in effetti un immediato carattere costitutivo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] G. Grioli, *Onde di Discontinuità in Elasticità Finita: Questioni di Linearizzazione*, in « Onde e Stabilità nei Mezzi Continui », A. M. Anile, S. Motta & S. Pluchino Ed., Quaderni G.N.F.M., pp. 1-17, Catania, 1982.

[2] G. Grioli, *On the Stress in Rigid Bodies*, Meccanica, **18** (1983), pp. 3-7.

[3] G. Grioli, *Metodi perturbativi in problemi di propagazione ondosa*, Convegno su « Onde e Stabilità », Cosenza, 1983.

[4] G. Grioli, *Mathematical Problems in Elastic Equilibrium with Finite Deformations*, Applicable Analysis (1983).

[5] D. E. Carlson, *Dependence of Linear Elasticity Solutions on the Elastic Constants*, I: *Dependence on Poisson's Ratio in Elastostatics*, Journal of Elasticity, **1** (1971), pp. 145-151.

[6] D. E. Carlson, *Dependence of Linear Elasticity Solutions on the Elastic Constants*, II: *Dependence on the Shear Modulus in Elastostatics*, Journal of Elasticity, **2** (1972), pp. 129-134.

[7] P. G. Ciarlet - G. Geymonat, *Sur les Lois de Comportement en Elasticité Non Linéaire Compressible*, C. R. Acad. Sci. Paris, **295** (1982), pp. 423-426.

[8] G. Capriz - P. Podio-Guidugli, *A Generalization of Signorini's Perturbation Method Suggested by Two Problems of Grioli*, Rend. Sem. Mat. Padova, **68** (1982), pp. 149-162.

[9] G. Capriz - P. Podio-Guidugli, *The Role of Fredholm Conditions in Signorini's Perturbation Method*, Arch. Rational Mech. Anal., **70** (1979), pp. 261-288.
[10] M. E. Gurtin - P. Podio-Guidugli, *The Thermodynamics of Constrained Materials*, Arch. Rational Mech. Anal., **51** (1973), pp. 192-208.
[11] J. L. Thompson, *Some Existence Theorems for the Traction Boundary Value Problem of Linearized Elastostatics*, Arch. Rational Mech. Anal., **32** (1969), pp. 369-399.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° febbraio 1984.