Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

M. Carriero

A. Leaci

E. Pascali

Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito con termine noto misura

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 73 (1985), p. 63-87

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__63_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 73 (1985)

Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito con termine noto misura.

M. CARRIERO - A. LEACI - E. PASCALI (*)

SUMMARY - Let E be a bounded set of finite perimeter (in the sense of De Giorgi [7]) in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, $A = (1, a_1, \ldots, a_n)$ a real vector field $L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$, uniformly Lipschitz in x for almost all t and μ a Radon measure defined on the subsets of $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, satisfying the condition (K). The aim of this paper is to prove existence, trace and localization results for (*).

0. Introduzione.

In questo lavoro, estendendo alcuni dei risultati stabiliti da A. Leaci in [14], [15], proviamo un risultato di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati per le soluzioni generalizzate del problema

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \mu & \text{in } E \\ u|_{\mathcal{F}_A^+ E} = u_0 \end{cases}$$

dove E è un insieme limitato e di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$, μ è una misura di Radon definita su $\mathbb{R}^{n+1}$ (cfr. [7]), finita sui limitati, soddisfacente la condizione (K) (cfr. definizione (1.3)) ed $\mathcal{F}_A^+ E$ è definita nel paragrafo 1.

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università di Lecce, 73100 Lecce.

Lavoro eseguito nell'ambito di un progetto nazionale di ricerca finanziato dal Ministero della Pubblica Istruzione.

Successivamente proviamo che la traccia u^* che compare nella definizione di soluzione generalizzata di $(*)$ (cfr. definizioni (1.1), (1.2)), coincide con il limite delle medie integrali di u.

Approfondiamo, infine, il carattere locale delle soluzioni generalizzate di $(*)$.

Rispetto a precedenti lavori ([2], [8], [14]) questa nota si differenzia essenzialmente perchè consideriamo le soluzioni di $(*)$ in insiemi E limitati e di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$, nel caso di un termine noto misura; a causa di questo le soluzioni u che si ottengono possono avere discontinuità su superfici non parallele alle linee caratteristiche. Inoltre le ipotesi sui coefficienti sono più generali e studiamo le tracce delle soluzioni generalizzate sulla frontiera ridotta $\mathcal{F}^*E$.

Le dimostrazioni si fondano su una combinazione di tre tipi di considerazioni:

1) studio delle linee caratteristiche per campi discontinui, secondo l'impostazione seguita da A. Leaci in [14], [15];
2) analisi globale per funzioni aventi derivate prime in una sola direzione misura in E, simile a quella condotta per funzioni definite in tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ da K. Krickeberg [13];
3) analisi fine per le tracce, basata sui lavori [6] di E. De Giorgi e [16] di M. Miranda, che presenta qualche analogia con quella sviluppata in situazione diversa da G. Anzellotti e M. Giaquinta in [1].

Per finire, notiamo che la considerazione dei problemi $(*)$ si è rivelata utile per lo studio delle soluzioni di sistemi di equazioni e disequazioni differenziali ordinarie associati al problema del rimbalzo elastico (cfr. [3], [4]).

Ringraziamo il Prof. Ennio De Giorgi per le utili discussioni avute sull'argomento.

1. Formulazione del problema e teorema di esistenza.

Sia E un insieme limitato e di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$ e per ogni numero s, con $0 \leqslant s \leqslant 1$, consideriamo l'insieme

$$E_{(s)} = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lim_{\varrho \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^{n+1}(E \cap B_\varrho(t, x))}{\mathcal{L}^{n+1}(B_\varrho)} = s \right\}$$

dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ di densità s rispetto a E, dove $\mathcal{L}^{n+1}$ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{n+1}$ e $B_\varrho(t, x)$ è la sfera aperta di centro $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ e raggio $\varrho > 0$.

Sia μ una misura di Radon definita su $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sia $A = (1, a_1, \ldots, a_n)$ un campo vettoriale reale su $\mathbb{R}^{n+1}$. Sulle funzioni a_i facciamo la seguente ipotesi:

(H_1) $a_i = a_i(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ per ogni i ed esiste $k < +\infty$ tale che per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$|a_i(t, x) - a_i(t, x')| \leqslant k|x - x'| \qquad \text{per ogni } x, x' \in \mathbb{R}^n .$$

Indichiamo con $\langle A, \nu\rangle := \nu_t + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i$ dove $\nu = (\nu_t, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ è il versore normale a $\mathcal{F}^*E$ (frontiera ridotta di E) diretto all'interno di E (ν ed $\mathcal{F}^*E$ definiti come in [7]).

Per la proposizione 4 di [14] possiamo definire, a meno di insiemi di misura $\mathcal{H}^n$ nulla, due sottoinsiemi di $\mathcal{F}^*E$ nel seguente modo

$$\mathcal{F}_A^+E = \{(t, x) \in \mathcal{F}^*E |\, \langle A(t, x), \nu(t, x)\rangle > 0\}$$
$$\mathcal{F}_A^-E = \{(t, x) \in \mathcal{F}^*E |\, \langle A(t, x), \nu(t, x)\rangle < 0\} ,$$

e porre

$$\mathcal{F}_A^*E = \mathcal{F}_A^+E \cup \mathcal{F}_A^-E;$$

sui sottoinsiemi Σ di $\mathcal{F}_A^*E$ consideriamo lo spazio $L_A^1(\Sigma)$ delle funzioni g misurabili rispetto alla misura n-dimensionale di Hausdorff $\mathcal{H}^n$ (vedi ad esempio [7], [9]) tali che

$$\|g\|_{L_A^1(\Sigma)} = \int_\Sigma |g|\, |\langle A, \nu\rangle| d\mathcal{H} < +\infty .$$

Nel seguito converremo di indicare con A_0 il campo vettoriale $(1, 0, \ldots, 0)$.

Definizione (1.1). Assegnata μ, siano $u \in L^1(E)$ e $u^* \in L_A^1(\mathcal{F}_A^*E)$; diremo che *$u$ è soluzione generalizzata in E di*

$$(1) \qquad \mathcal{A}u := \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \mu ,$$

avente traccia u^* *su* $\mathcal{F}^*_A E$, se per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ si ha

$$\int_E u\mathcal{A}^*\varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}^*_A E} u^* \varphi \langle A, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \,, \tag{2}$$

dove $\mathcal{A}^*\varphi = \partial\varphi/dt + \sum_{i=1}^{n} \partial(a_i\varphi)/\partial x_i$ (1).

Osserviamo che se u è soluzione generalizzata in E di (1), allora la traccia u^* verificante (2) è unica (a meno di un insieme di misura $\mathcal{H}^n$ nulla).

Definizione (1.2). Assegnata $u_0 \in L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)$, se la (2) è verificata e inoltre $u^* = u_0 \mathcal{H}^n$ — q.o. su $\mathcal{F}^+_A E$, diremo che u è soluzione generalizzata in E di (1) e verifica la condizione al contorno $u|_{\mathcal{F}^+_A E} = u_0$.

Per dimostrare i principali teoremi (di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati (cfr. teor. (1.3), (1.4)); di traccia (cfr. teor. (2.1), (2.2), (3.2)); di località (cfr. teor. (3.1), (3.3), (4.2))) conviene richiamare alcuni risultati ottenuti in [14], [15] sulle linee caratteristiche.

Nell'ipotesi (H_1) per il campo A, per ogni $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n) \in \mathbb{R}^n$ il sistema delle caratteristiche

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_i}{dt} = a_i(t, \gamma(t)) \\ \gamma_i(0) = x^0_i \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ha un'unica soluzione $\gamma_{x^0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; le curve $\gamma_{x^0}(\cdot)$ ricoprono tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ al variare di x^0 in $\mathbb{R}^n$ senza intersecarsi tra loro.

In [15] è definito il cambiamento di variabili

$$\Gamma\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

ponendo

$$\Gamma(t, x^0) = (t, \gamma_{x^0}(t)) \,.$$

(1) Nel seguito useremo semplicemente la dizione « *u soluzione generalizzata in E* », omettendo per brevità il riferimento alla traccia u^*.

La trasformazione Γ è lipschitziana con la sua inversa in ogni striscia del tipo $[-d_0, d_0]\times\mathbb{R}^n$ e il suo Jacobiano J_Γ verifica la disuguaglianza

$$0 < \exp\left(-nk|t|\right) \leqslant J_\Gamma(t, x) = \exp\left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(s, \gamma_x(s))\, ds\right] \leqslant \exp\left(nk|t|\right)$$

per ogni t, per quasi ogni x.

Ovviamente Γ^{-1} trasforma la curva caratteristica γ_{x_0} nella retta $\{(t, x^0)|t \in \mathbb{R}\}$.

Ancora in [14], [15] è definita una successione di funzioni boreliane $\tau_h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che, per quasi ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$, l'insieme

$$E_{x_0} := \{t \in \mathbb{R}|\left(t, \gamma_{x_0}(t)\right) \in E_{(1)}\} \qquad \text{(eventualmente vuoto)}$$

è unione di intervalli aperti $]\tau_{2h-1}(x^0), \tau_{2h}(x^0)[$ con $h = 1, 2, \ldots, p(x^0) < < +\infty$;

e si ha inoltre

$$\left(\tau_{2h-1}(x^0), \gamma_{x^0}\left(\tau_{2h-1}(x^0)\right)\right) \in \mathcal{F}_A^+ E\,,$$

$$\left(\tau_{2h}(x^0), \gamma_{x^0}\left(\tau_{2h}(x^0)\right)\right) \in \mathcal{F}_A^- E\,.$$

Il successivo lemma serve a ridurre la (2) al caso in cui $a_i \equiv 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Intanto osserviamo che (cfr. [15]) E è un insieme limitato di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$ se e solo se $\tilde{E} = \Gamma^{-1}(E)$ è limitato e di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$;

$$\begin{array}{lll} u \in L^1(E) & \text{se e solo se} & \tilde{u} = u\circ\Gamma \in L^1(\tilde{E})\,; \\ u^* \in L^1_A(\mathcal{F}^*_A E) & \text{se e solo se} & \tilde{u}^* = u^*\circ\Gamma \in L^1_{A_0}(\mathcal{F}^*_{A_0}\tilde{E})\,; \\ \varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1}) & \text{se e solo se} & \tilde{\varphi} = \varphi\circ\Gamma \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})\,; \end{array}$$

allora, indicata con $\tilde{\mu}$ la misura immagine di μ secondo Γ (cioè la misura data da $\tilde{\mu}(B) = \mu(\Gamma(B))$ per ogni B boreliano di $\mathbb{R}^{n+1}$) e osservato che $\tilde{E}_{(1)} = \Gamma^{-1}(E_{(1)})$, possiamo provare il seguente risultato:

Lemma (1.1). *L'equazione* (1) *ha soluzione generalizzata in* E $u \in \in L^1(E)$ *verificante la condizione al contorno* $u|_{\mathcal{F}_A^+ E} = u_0$ *se e solo se* *l'equazione* $\partial\tilde{v}/\partial t = \tilde{\mu}$ *ha soluzione generalizzata in* $\tilde{E}$ *verificante la condizione al contorno* $\tilde{v}|_{\mathcal{F}^+_{A_0}\tilde{E}} = 0$.

Dim. Cominciamo con l'osservare che dal teorema di integrazione rispetto alla misura immagine (cfr. [11]) e da quanto visto in [15] utilizzando la formula

$$(3) \qquad \int_{\mathcal{F}^*_A E} \varphi\langle A, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathcal{F}^*_{A_0}\tilde{E}} \tilde{\varphi} J_\Gamma \nu_t \, d\mathcal{H}^n \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathrm{Lip}\,(R^{n+1}) ,$$

$u \in L^1(E)$ verifica (2) se e solo se $\tilde{u} \in L^1(\tilde{E})$ verifica

$$(2)' \qquad \int_{\tilde{E}} \tilde{u} \frac{\partial(\tilde{\varphi}\cdot J_\Gamma)}{\partial t} \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{\tilde{E}_{(1)}} \tilde{\varphi}\, d\tilde{\mu} + \int_{\mathcal{F}^*_{A_0}\tilde{E}} \tilde{u}^*(\tilde{\varphi}\cdot J_\Gamma)\,\nu_t \, d\mathcal{H}^n = 0 .$$

D'altra parte se $\tilde{v} \in L^1(\tilde{E})$ è soluzione generalizzata in $\tilde{E}$ di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t} = \tilde{\mu} & \text{in } \tilde{E} \\ \tilde{v}|_{\mathcal{F}^+_{A_0}\tilde{E}} = 0 \end{cases}$$

e $\tilde{w} \in L^1(\tilde{E})$ è soluzione generalizzata in $\tilde{E}$ di

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + [(-\operatorname{div} A)\circ\Gamma]\tilde{w} = [(\operatorname{div} A)\circ\Gamma]\tilde{v} & \text{in } \tilde{E} \\ \tilde{w}|_{\mathcal{F}^+_{A_0}\tilde{E}} = \tilde{u}_0\cdot J_\Gamma , \end{cases}$$

allora $\tilde{u} = (\tilde{v} + \tilde{w})/J_\Gamma$ verifica (2)' con $\tilde{u}^*|_{\mathcal{F}^+_{A_0}\tilde{E}} = \tilde{u}_0$.

Poichè il problema (4), per ogni $\tilde{v} \in L^1(\tilde{E})$, ha soluzione generalizzata in $L^1(\tilde{E})$ (cfr. teorema 7 di [14]), l'asserto segue in modo immediato. q.e.d.

In tal modo ci siamo ricondotti a studiare l'equazione (1) con la condizione $u|_{\mathcal{F}^+_A E} = u_0$ nel caso in cui $a_i \equiv 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e il dato è nullo su $\mathcal{F}^+_{A_0}E$.

Sia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la famiglia dei boreliani limitati di $\mathbb{R}^n$; per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

indichiamo con $L(B)$ l'unione delle caratteristiche relative al campo A passanti per punti di B.

L'insieme $L(B)$ è boreliano.

Sussiste il seguente

TEOREMA (1.2). *Se $u \in L^1(E)$ è soluzione generalizzata in E di* (1), *allora per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si ha*

$$\int\limits_{E \cap L(B)} u\mathcal{A}^*\varphi \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int\limits_{E_{(1)} \cap L(B)} \varphi \, d\mu + \int\limits_{\mathcal{F}_A^* E \cap L(B)} u^*\varphi \langle A, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \tag{5}$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$.

DIM. È sufficiente provare la (5) nel caso in cui $A = A_0$.

Consideriamo dapprima il caso in cui B è aperto.

Consideriamo una successione di funzioni lipschitziane $\varphi_m\colon \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \chi_B(x) \qquad \text{per ogni } x, \ |\varphi_m| \leqslant 1 \, .$$

Per ipotesi, per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\int\limits_E u\varphi_m(x) \frac{\partial\varphi}{\partial t} \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int\limits_{E_{(1)}} \varphi_m \varphi \, d\mu + \int\limits_{\mathcal{F}_{A_0}^* E} u^* \varphi_m \varphi \nu_t \, d\mathcal{H}^n = 0 \, ,$$

da cui, passando al limite in virtù del teorema della convergenza dominata, si ha la tesi.

Supponiamo ora che $\mathcal{L}^{n+1}(L(B)) = 0$ (e quindi $\mathcal{L}^n(B) = 0$). Proviamo che

$$\int\limits_{\mathcal{F}_{A_0}^* E \cap L(B)} u^* \varphi \nu_t \, d\mathcal{H}^n = 0 \, . \tag{6}$$

Infatti, per le proprietà della frontiera ridotta (cfr. il n. 2 di questo lavoro), basta considerare il caso di una ipersuperficie K di classe C^1 del tipo

$$K = \{(t, x) | t = \psi(x) \ \text{ e } \ \psi \in C^1(\mathbb{R}^n)\} \, , \qquad \nu_t \geqslant 0 ;$$

dalla formula di Gauss-Green classica otteniamo

$$\int_{K \cap L(B)} u^* \varphi \nu_t \, d\mathcal{H}^n = \int_B u^*(\psi(x), x)\, \varphi(\psi(x), x)\, d\mathcal{L}^n = 0 \,.$$

La tesi segue allora per approssimazione dell'insieme boreliano B mediante aperti. q.e.d.

Per ottenere i principali teoremi dobbiamo introdurre la condizione (K) che generalizza una condizione di K. Krickeberg (cfr. [13]).

DEFINIZIONE (1.3). Diremo che la misura μ verifica la condizione (K) in E se:

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}^{n+1}(L(B)) = 0 \Rightarrow \mu(L(B) \cap M) = 0$ per ogni $M \subseteq E_{(1)}$, $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Sussiste il seguente

TEOREMA (1.3) (*esistenza*). *Sia E un insieme limitato di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$ e le a_i funzioni che verificano l'ipotesi (H_1). Assegnate $u_0 \in L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)$ e μ misura di Radon definita su $\mathbb{R}^{n+1}$, esiste $u \in L^1(E)$ soluzione generalizzata in E di* (1) *verificante la condizione al contorno $u|_{\mathcal{F}^+_A E} = u_0$, se e solo se μ verifica la condizione (K).*

DIM. Per il lemma (1.1) possiamo limitarci al caso $A = A_0$. Mostriamo dapprima che la condizione (K) è necessaria.

Se u è una soluzione di (1), dal teorema (1.2) si ha, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{E \cap L(B)} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)} \cap L(B)} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}^*_{A_0} E \cap L(B)} u^* \varphi \nu_t \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$.

Se $\mathcal{L}^{n+1}(L(B)) = 0$, dalla (6) segue $\int_{E_{(1)} \cap L(B)} \varphi \, d\mu = 0$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$, per cui $\mu(L(B) \cap M) = 0$ per ogni $M \subseteq E_{(1)}$, $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$.

La condizione (K) è sufficiente.

Se μ verifica la condizione (K), per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste (cfr. [9], [12], [13]) μ_x misura su $\mathbb{R}$ (dipendente da x) tale che:

$|\mu_x| \leqslant v(x)$ con $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e, posto $B(x) = \{t \in \mathbb{R} | (t, x) \in B\}$

per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, risulta

$$\mu_x(B(x)) \in L^1(\mathbb{R}^n)\,, \qquad \mu(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_x(B(x))\, d\mathfrak{L}^n(x)\,.$$

Allora, per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$ si ha

$$\int_{E_{(1)}} \varphi\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{E_x} \varphi\, d\mu_x(t) \Big)\, d\mathfrak{L}^n(x)\,. \tag{7}$$

Poniamo

$$E^1 = \{(t, x) \in E_{(1)} | t \leqslant \tau_2(x)\}$$

e in generale

$$E^i = \{(t, x) \in E_{(1)} | t \leqslant \tau_{2i}(x) < +\infty\} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E^j\,.$$

Essendo le funzioni τ_{2i} boreliane, gli E^i sono boreliani.

Fissato i poniamo

$$u^i(t, x) = \mu_x(E^i(x) \cap \{\eta \leqslant t\})\,;$$

osserviamo che, per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, $u^i(\cdot, x)$ è continua da destra in t e proviamo che u^i è una funzione misurabile. Infatti, fissato $h \in N$, per $2^h \leqslant j < 2^{h+1}$ sia $t_j = ((j - 2^h)T_0)/2^h$ (poichè l'insieme E in considerazione è limitato, abbiamo supposto $E \subset [0, T_0] \times \mathbb{R}^n$) e definiamo

$$u^i_j(x) = \mu_x(E^i(x) \cap \{t \leqslant t_j\})\,.$$

Le u^i_j sono misurabili; possiamo supporre che u^i_j sia una funzione boreliana per ogni $i, j \in N$.

Sia

$$U^i_h(t, x) = \sum_{j=1}^{2^h} u^i_j(x)\, \chi_{(t_j, t_{j+1}]}(t)\,;$$

si verifica che le U^i_h sono boreliane e

$$\lim_{h \to \infty} U^i_h(t, x) = u^i(t, x) \qquad \text{per ogni } t, \text{ per q.o. } x\,.$$

Allora la funzione

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} u^i(t, x)\, \chi_{E^i}(t, x)$$

è misurabile e per q.o. x risulta

$$u(t, x) = \begin{cases} \mu_x\big((\tau_{2h-1}(x), t]\big) & \text{se } t \in \big(\tau_{2h-1}(x), \tau_{2h}(x)\big) \\ 0 & \text{altrove ;} \end{cases}$$

inoltre $u \in L^1(E)$ in quanto

$$|u(t, x)| \leqslant v(x) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T_0] \text{ e per q.o. } x \in \mathbb{R}^n .$$

Ora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha (cfr. 2.6.7 in [9])

$$\int_{E_x} \varphi\, d\mu_x(t) = -\int_{E_x} u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, d\mathfrak{L}^1(t) + \sum_{h=1}^{p(x)<+\infty} \varphi\big(\tau_{2h}(x), x\big)\, u^*\big(\tau_{2h}(x), x\big) \tag{8}$$

dove $u^*\big(\tau_{2h}(x), x\big) = \lim\limits_{t \to \tau_{2h}^-(x)} u(t, x)$ e si è tenuto conto del fatto che $\lim\limits_{t \to \tau_{2h-1}^+(x)} u(t, x) = 0.$

Utilizzando ancora le funzioni U_h^i si verifica che u^* è $\mathcal{H}^n$-misurabile su $\mathcal{F}_{A_0}^* E$; l'integrabilità di u^* segue osservando che, detta f l'unica soluzione in E (cfr. [14]) del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = v & \text{in } E \\ f|_{\mathcal{F}_{A_0}^+ E} = 0 \end{cases}$$

(il termine noto v verifica la condizione $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_x)$, $|\mu_x| \leqslant v(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$), si ha

$$|u^*(\tau, \xi)| \leqslant f|_{\mathcal{F}_{A_0}^- E}(\tau, \xi) \qquad \mathcal{H}^n\text{ - q.o.} .$$

Dalla (8) si deduce che la funzione

$$x \to \sum_{h=1}^{p(x)} \varphi\big(\tau_{2h}(x), x\big)\, u^*\big(\tau_{2h}(x), x\big)$$

è di classe $L^1(\mathbb{R}^n)$; inoltre, come in [15], si prova che:

$$(9)\qquad \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{h=1}^{p(x)} \varphi(\tau_{2h}(x), x)\, u^*(\tau_{2h}(x), x)\, d\mathfrak{L}^n(x) =$$

$$= \sum_{h=1}^{+\infty} \int_{F_{2h}} \varphi(\tau_{2h}(x), x)\, u^*(\tau_{2h}(x), x)\, d\mathfrak{L}^n(x) =$$

$$= -\sum_{h=1}^{+\infty} \int_{G_{2h}} \varphi(\tau, \xi)\, u^*(\tau, \xi)\, \nu_t(\tau, \xi)\, d\mathcal{H}^n = -\int_{\mathcal{F}^-_{A_0}E} \varphi(\tau, \xi)\, u^*(\tau, \xi)\, \nu_t(\tau, \xi)\, d\mathcal{H}^n ,$$

dove

$$F_{2h} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\infty < \tau_{2h}(x) < +\infty\} ,$$

$$G_{2h} = \text{grafico di } \tau_{2h} \text{ su } F_{2h} .$$

In conclusione, da (7) per (8) e (9), si ha che

$$\int_{E_{(1)}} \varphi\, d\mu + \int_E u \frac{\partial \varphi}{dt}\, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{\mathcal{F}^*_{A_0}E} u^* \varphi \nu_t\, d\mathcal{H}^n = 0 ,$$

cioè la tesi. q.e.d.

Teorema (1.4). (*Unicità e dipendenza continua dai dati.*)

Nelle ipotesi del teorema (1.3), *se* μ *verifica la condizione* (K) *l'equazione* (1) *ha un'unica soluzione generalizzata in* E *verificante la condizione al contorno* $u|_{\mathcal{F}^+_A E} = u_0$ *e vale la maggiorazione*

$$(10)\qquad \|u\|_{L^1(E)} + \|u^*\|_{L^1_A(\mathcal{F}^-_A E)} \leq c(n, k, T_0)\left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + |\mu|(E_{(1)})\right) ,$$

dove la costante $c(n, k, T_0)$ *è data in* (10)'.

Dim. L'unicità segue immediatamente dal teorema 7 di [14]. Per provare la maggiorazione (10) utilizzeremo le considerazioni svolte nel corso della dimostrazione del lemma (1.1).

Indicate con $\tilde{\mu}_+$ e $\tilde{\mu}_-$ la variazione positiva e la variazione negativa di $\tilde{\mu}$, siano $\tilde{v}_+$ e $\tilde{v}_-$ le soluzioni generalizzate dei problemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}_\pm}{\partial t} = \tilde{\mu}_\pm & \text{in } \tilde{E} \\ \tilde{v}_\pm\big|_{\mathcal{F}^+_{A_0}\tilde{E}} = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\int_{\tilde{E}} \tilde{v}_\pm \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{\tilde{E}_{(1)}} \varphi\, d\tilde{\mu}_\pm + \int_{\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E}} \tilde{v}^*_\pm \varphi \nu_t\, d\mathcal{H}^n = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})\,.$$

Osserviamo che deve essere $\tilde{v}_\pm \geqslant 0$ $\mathcal{L}^{n+1}$-q.o. e $\tilde{v}^*_\pm \geqslant 0$ $\mathcal{H}^n$-q.o.

Scegliendo $\varphi \equiv 1$ si ottiene

$$\int_{\tilde{E}_{(1)}} d\tilde{\mu}_\pm + \int_{\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E}} \tilde{v}^*_\pm \nu_t\, d\mathcal{H}^n = 0\,,$$

da cui, poichè per l'unicità $\tilde{v} = \tilde{v}_+ - \tilde{v}_-$ è la soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \tilde{\mu} & \text{in } \tilde{E} \\ \tilde{v}\big|_{\mathcal{F}^+_{A_0}\tilde{E}} = 0 \end{cases}$$

e $|\tilde{v}| \leqslant \tilde{v}_+ + \tilde{v}_-$, si ha

$$\|\tilde{v}^*\|_{L^1_{A_0}(\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E})} = \int_{\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E}} |\tilde{v}^*||\nu_t|\, d\mathcal{H}^n \leqslant |\tilde{\mu}|(\tilde{E}_{(1)}) = |\mu|(E_{(1)})\,;$$

ancora dall'equazione, per $\varphi(t, x) = t$, si ha

$$\int_{\tilde{E}} \tilde{v}_\pm\, d\mathcal{L}^{n+1} = -\int_{\tilde{E}_{(1)}} t\, d\tilde{\mu}_\pm - \int_{\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E}} t \tilde{v}^*_\pm \nu_t\, d\mathcal{H}^n \leqslant T_0 \int_{\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E}} \tilde{v}^*_\pm |\nu_t|\, d\mathcal{H}^n\,,$$

pertanto

$$\|\tilde{v}\|_{L^1(\tilde{E})} = \int_{\tilde{E}} |\tilde{v}|\, d\mathcal{L}^{n+1} \leqslant \int_{\tilde{E}} (\tilde{v}_+ + \tilde{v}_-)\, d\mathcal{L}^{n+1} \leqslant T_0 \int_{\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E}} (\tilde{v}^*_+ + \tilde{v}^*_-)|\nu_t|\, d\mathcal{H}^n = \\ = T_0 |\mu|(E_{(1)})\,.$$

D'altra parte per $\tilde{w}$ soluzione generalizzata di (4) e per $\tilde{w}^*$, utilizzando [15] e la formula (3), sussistono le maggiorazioni

$$\|\tilde{w}\|_{L^1(\tilde{E})} \leqslant \left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + nkT_0|\mu|(E_{(1)})\right) T_0 \exp(nkT_0)\,,$$

$$\|\tilde{w}^*\|_{L^1_{A_0}(\mathcal{F}^-_{A_0}\tilde{E})} \leqslant \left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + nkT_0|\mu|(E_{(1)})\right) \exp(nkT_0)\,.$$

Allora per $\tilde{u} = (\tilde{v} + \tilde{w})/J_\Gamma$ si ha

$$\|u\|_{L^1(E)} = \|\tilde{u}J_\Gamma\|_{L^1(\tilde{E})} \leqslant T_0|\mu|(E_{(1)}) + T_0 \exp(nkT_0)\left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + \right.$$
$$\left. + nkT_0|\mu|(E_{(1)})\right) \leqslant T_0\left(1 + nkT_0 \exp(nkT_0)\right) \cdot \left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + |\mu|(E_{(1)})\right)$$

e

$$\|u^*\|_{L^1_A(\mathcal{F}^-_A E)} = \|\tilde{u}^* J_\Gamma\|_{L^1_{A_0}(\mathcal{F}^-_{A_0} E)} \leqslant$$
$$\leqslant |\mu|(E_{(1)}) + \exp(nkT_0)\left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + nkT_0 \cdot |\mu|(E_{(1)})\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + nkT_0 \exp(nkT_0)\right)\left(\|u_0\|_{L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)} + |\mu|(E_{(1)})\right),$$

da cui la (10) con

(10)′ $$c(n, k, T_0) = (1 + T_0)\left(1 + nkT_0 \exp(nkT_0)\right). \qquad \text{q.e.d.}$$

2. Teoremi di traccia.

Sia E un insieme limitato e di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$; μ una misura di Radon definita su $\mathbb{R}^{n+1}$; sia, inoltre, $(u, u^*) \in L^1(E) \times L^1_A(\mathcal{F}^*_A E)$ tale che per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ si abbia

(11) $$\int_E u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}^*_A E} u^* \varphi \langle A, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^n = 0\,.$$

Posto

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{in } E \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\bar{\mu}(B) = \mu(B \cap E_{(1)}) + \int\limits_{B \cap \mathcal{F}_A^* E} u^* \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n ,$$

si riconosce che anche $\bar{\mu}$ è misura di Radon e si ha per ogni $\varphi \in$ $\in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$ a supporto compatto

$$(11)' \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \bar{u} \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi \, d\bar{\mu} = 0 .$$

Vale il seguente

TEOREMA (2.1). *Se* $(u, u^*) \in L^1(E) \times L^1_A(\mathcal{F}_A^* E)$ *verifica* (11), *allora per* $\mathcal{H}^n$ *quasi tutti i punti* $(\tau, \xi) \in \mathcal{F}_A^* E$

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \frac{1}{\mathfrak{L}^{n+1}(E \cap B_\varrho(\tau, \xi))} \int\limits_{E \cap B_\varrho(\tau, \xi)} |u^*(\tau, \xi) - u(t, x)| d\mathfrak{L}^{n+1} = 0 .$$

DIM. Ricordiamo che (cfr. [6], [7])

$$\mathcal{F}^* E = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right) \cup N ,$$

dove $\mathcal{H}^n(N) = 0$, ogni K_j è compatto contenuto in una ipersuperficie S_j di classe C^1 e per $\mathcal{H}^n$-quasi ogni $(t, x) \in K_j$ il vettore

$$\nu(t, x) = \lim_{\varrho \to 0^+} \frac{\int\limits_{B_\varrho(t,x)} D\chi_E}{\int\limits_{B_\varrho(t,x)} |D\chi_E|}$$

sta sulla retta normale a S_j in (t, x).

È possibile supporre che i K_j siano disgiunti e che esista su ogni S_j un campo continuo di vettori $n_j(t, x)$ con $|n_j(t, x)| = 1$ e con $n_j(t, x) =$ $= \nu(t, x)$ per $\mathcal{H}^n$-quasi tutti i $(t, x) \in K_j$.

Come già nella dimostrazione del teorema (1.3) esaminiamo dapprima il caso in cui $a_i \equiv 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

È possibile raffinare ulteriormente la partizione K_j in modo che su ogni elemento di tale partizione si abbia $\nu_t \equiv 0$ oppure $\nu_t \geqslant \varepsilon > 0$ o $\nu_t \leqslant -\varepsilon < 0$.

Fissato K_j per cui valga una delle ultime due condizioni, possiamo adattare la dimostrazione dei teoremi 1 e 2 di [16] e provare che esiste $\Theta_j^* \in L^1_{A_0}(K_j)$ tale che per ogni sfera aperta B_ϱ e per ogni $\varphi \in C^1_0(B_\varrho)$ si abbia

$$\int_{B_\varrho} \bar{u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{K_j \cap B_\varrho} \Theta_i^* \varphi \nu_t\, d\mathcal{H}^n + \int_{B_\varrho \setminus K_j} \varphi\, d\bar{\mu} = 0\,. \tag{12}$$

Confrontando (11)′, per $\varphi \in C^1_0(B_\varrho)$, e la (12) si ha

$$\int_{K_j \cap B_\varrho} \Theta_j^* \varphi \nu_t\; d\mathcal{H}^n = \int_{K_j \cap B_\varrho} u^* \varphi \nu_t\; d\mathcal{H}^n\,,$$

da cui segue $\Theta_j^* = u^*\, \mathcal{H}^n$ q.o. su K_j.

Si può, allora, definire $\mathcal{H}^n$ q.o. su $\mathcal{F}^*_{A_0}E$ una funzione Θ^* che coincide con u^*.

Per lo stesso teorema 1 di [16] e per come è definita $\bar{u}$, per $\mathcal{H}^n$ quasi tutti i punti $(\tau, \xi) \in \mathcal{F}^*_{A_0}E$ si ha

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \frac{1}{\mathfrak{L}^{n+1}(E \cap B_\varrho(\tau, \xi))} \int_{E \cap B_\varrho(\tau,\xi)} |u^*(\tau, \xi) - u(t, x)| d\mathfrak{L}^{n+1} = 0\,. \tag{13}$$

Per completare la dimostrazione nel caso a_i non tutti nulli, facendo riferimento alle notazioni utilizzate per provare il lemma (1.1), osserviamo che le funzioni $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, J_Γ rientrano nel caso già trattato $a_i \equiv 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, per cui verificano la proprietà (13).

Dalle maggiorazioni per J_Γ viste nella prima parte di questa nota segue che anche $\tilde{u}$ verifica (13).

Infine, poichè $\tilde{u} = u \circ \Gamma$ e Γ è una trasformazione bilipschitziana, si ottiene che u verifica la tesi. q.e.d.

Dai teoremi 1 e 2 di [16] si ricava anche il seguente

TEOREMA (2.2). *Se* $(u, u^*) \in L^1(E) \times L^1_A(\mathcal{F}^*_A E)$ *verifica* (11) *e* S *è una ipersuperficie lipschitziana limitata in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *tale che ogni curva caratteristica la intersechi al più in un punto, allora esistono due tracce* $\bar{u}^+$

e $\overline{u}^-$ *appartenenti a* $L^1_A(S)$ *tali che per ogni* $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_S \varphi\, d\bar{\mu} = \int_S (\overline{u}^+ - u^-)\varphi\langle A, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^n$$

e quindi

$$\int_S d|\bar{\mu}| = \int_S |\overline{u}^+ - \overline{u}^-|\, |\langle A, \nu\rangle|\, d\mathcal{H}^n .$$

DIM. Consideriamo dapprima il caso $A = A_0$ e supponiamo S di classe C^1 con $\nu_t \geqslant 0$ su S. Si ha allora, posto $S_0 = \{(t, x) \in S | \nu_t = 0\}$ e $S_j = \{(t, x) \in S | \nu_t > 1/j\}$, $S = \left(\bigcup_{j\in N} S_j\right) \bigcup S_0$ e $\mathcal{L}^{n+1}(L(S_0)) = 0$.

Per ogni S_j possiamo utilizzare i teoremi 1 e 2 di [16] per cui, se indichiamo con Ω_j^+ e Ω_j^- il sopragrafico e il sottografico di S_j, risulta che esistono due tracce di $\overline{u}$ su S_j, $\overline{u}_j^+$ e $\overline{u_j^-}$, per cui

$$\int_{\Omega_j^\pm} \overline{u}\, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{S_j} \overline{u}_j^\pm \varphi \nu_t\, d\mathcal{H}^n + \int_{\Omega_j^\pm} \varphi\, d\bar{\mu} = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$ a supporto compatto. Da questa uguaglianza si ricava

$$\int_{S_j} |u_j^\pm| \nu_t\, d\mathcal{H}^n \leqslant \mathrm{cost}\, (\|\overline{u}\|_{L^1}, |\bar{\mu}|) .$$

Poichè le $\overline{u}_j^\pm$ sono definite come medie integrali, si ha che ν_t— $\mathcal{H}^n$ q.o. su S sono definite $\overline{u}^+$ e $\overline{u}^-$ e appartengono a $L^1_A(S)$.

Se indichiamo con Ω^+ e Ω^- rispettivamente il sopragrafico e il sottografico di S, osservato che $\bar{\mu}$ verifica la proprietà (K) su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, si ha che è possibile passare al limite per $j \to +\infty$ nell'uguaglianza precedente per cui

$$\int_{\Omega^\pm} \overline{u}\, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_S \overline{u}^\pm \varphi \nu_t\, d\mathcal{H}^n + \int_{\Omega^\pm} \varphi\, d\bar{\mu} = 0 .$$

Confrontando con la (11)$'$ si ha la tesi.

Il caso generale si prova utilizzando una partizione di S in porzioni di ipersuperfici C^1 e tenendo presente la formula (3) per il cambiamento di variabili sulle ipersuperfici. q.e.d.

3. Carattere locale delle soluzioni.

In questo paragrafo evidenziamo il carattere locale delle soluzioni generalizzate di (1).

Sussiste il seguente

TEOREMA (3.1). *Se* $u \in L^\infty(E)$ *è soluzione generalizzata in* E *di* (1), *allora per ogni sottoinsieme* L *di* E, *di perimetro finito in* $\mathbb{R}^{n+1}$, *esiste* $u_L^* \in L^\infty(\mathcal{F}_A^* L)$ *tale che per ogni* $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$ *risulta*

$$\int_L u\mathcal{A}^*\varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{L_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* L} u_L^* \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \, .$$

DIM. Per il lemma (1.1) possiamo ridurci a considerare $A = A_0$. Sia allora u soluzione generalizzata in E di $\partial u / \partial t = \mu$; possiamo supporre che per q.o. x $u(\cdot, x)$ sia $BV(E_x)$ e continua da destra in t.

Fissato L sottoinsieme di E, di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$, si ha per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_L u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\mathfrak{L}^{n+1} = \int_{\mathbf{R}^n} d\mathfrak{L}^n(x) \int_{L_x} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\mathfrak{L}^1(t) =$$

$$= -\int_{\mathbf{R}^n} d\mathfrak{L}^n(x) \int_{L_x} \varphi \, d\mu_x + \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{h=1}^{p'(x)} \varphi\big(\tau'_{2h}(x), x\big) \, u_L^*\big(\tau'_{2h}(x), x\big) \, d\mathfrak{L}^n(x) -$$

$$- \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{h=1}^{p'(x)} \varphi\big(\tau'_{2h-1}(x), x\big) \, u_L^*\big(\tau'_{2h-1}(x), x\big) \, d\mathfrak{L}^n(x)$$

(per la limitatezza di u e per la 2.6.7 in [9]), dove p', τ'_h sono funzioni analoghe di p, τ_h riferite ad L,

$$u_L^*\big(\tau'_{2h}(x), x\big) = \lim_{t \to \tau'^{-}_{2h}(x)} u(t, x)$$

$$u_L^*\big(\tau'_{2h-1}(x), x\big) = \lim_{t \to \tau'^{+}_{2h-1}(x)} u(t, x) \, .$$

Come nella dimostrazione del teorema (1.3) si ottiene

$$\int_L u \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{L_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}^*_{A_0} L} u^*_L \varphi \nu_t \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$. q.e.d.

Osservazione (3.1). Per il teorema (2.1) sulle tracce, si ha anche

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^{n+1}(L \cap B_\varrho(\tau, \xi))} \int_{L \cap B_\varrho(\tau, \xi)} |u^*_L(\tau, \xi) - u(t, x)| d\mathcal{L}^{n+1} = 0$$

per $\mathcal{H}^n$ q.o. $(\tau, \xi) \in \mathcal{F}^*_A L$.

Osservazione (3.2). Il seguente esempio mostra che nel teorema precedente l'ipotesi $u \in L^\infty(E)$ non può essere sostituita dall'ipotesi $u \in L^1(E)$.

Esempio. Sia E il quadrato $(0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ e $u(t, x) = 1/\sqrt{x} \in$ $\in L^1(E)$ la soluzione di $\partial u/\partial t = 0$ in E, verificante $u|_{\mathcal{F}^+_{A_0} E} = 1/\sqrt{x}$.
Posto

$$Q_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n}\right) \times \left(0, \frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \text{per } n \in N \text{ e } L = \bigcup_{n \in N} Q_n ,$$

si verifica che L è un sottoinsieme di E di perimetro finito in $\mathbb{R}^2$ e

$$\int_{\mathcal{F}^*_{A_0} L} u^*_L |\nu_t| d\mathcal{H}^1 \geqslant 2 \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^2} = +\infty .$$

È evidente tuttavia che se $u \in L^1(E)$ e a-priori è noto che $u^*_L \in$ $\in L^1_A(\mathcal{F}^*_A L)$ allora vale ancora la tesi del teorema (3.1).
Conseguenza dei teoremi (1.2), (3.1) e (2.1) è il seguente

Teorema (3.2). *Siano L, M sottoinsiemi di E di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$ tali che $L \cap M = \emptyset$, $L \cup M = E$; posto*

$$S = \mathcal{F}^*_A L \cap \mathcal{F}^*_A M ,$$

se $u \in L^\infty(E)$ *è soluzione generalizzata in* E *di* (1), *allora per ogni* $\varphi \in \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$ *si ha*

$$\text{(i)}\quad \int_S \varphi\, d\mu = \int_S (u_L^* - u_M^*)\varphi \langle A, \nu_L\rangle\, d\mathcal{H}^n \qquad (\nu_L \textit{ normale interna a } L)$$

e quindi

$$\text{(ii)}\quad \int_S d|\mu| = \int_S |u_L^* - u_M^*||\langle A, \nu_L\rangle|\, d\mathcal{H}^n\,.$$

DIM. Per ipotesi, per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_E u\mathcal{A}^*\varphi\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)}} \varphi\, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E} u^*\varphi \langle A, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^n = 0\,;$$

allora, poichè $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(\frac{1}{2})})) = 0$, per il teorema (1.2) si ha

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\int_M u\mathcal{A}^*\varphi\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_L u\mathcal{A}^*\varphi\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{M_{(1)}} \varphi\, d\mu + \int_{L_{(1)}} \varphi\, d\mu + \\ &\qquad + \int_{L_{(\frac{1}{2})} \cap M_{(\frac{1}{2})}} \varphi\, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E} u^*\varphi \langle A, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^n = 0\,.\end{aligned}$$

D'altra parte per il teorema (3.1) si ha:

$$(15)\qquad \int_M u\mathcal{A}^*\varphi\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{M_{(1)}} \varphi\, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* M} u_M^*\varphi \langle A, \nu_M\rangle\, d\mathcal{H}^n = 0$$

(ν_M normale interna a M)

e

$$(16)\qquad \int_L u\mathcal{A}^*\varphi\, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{L_{(1)}} \varphi\, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* L} u_L^*\varphi \langle A, \nu_L\rangle\, d\mathcal{H}^n = 0$$

(ν_L normale interna a L).

Confrontando (14), (15) e (16), tenendo conto che, essendo $L \cap \cap M = \emptyset$, a meno di insiemi di misura $\mathcal{H}^n$ nulla $\mathcal{F}_A^* E = \mathcal{F}_A^* L \,\Delta\, \mathcal{F}_A^* M$, u^* coincide con u_M^* e u_L^* rispettivamente su $\mathcal{F}_A^* M \setminus \mathcal{F}_A^* L$ e $\mathcal{F}_A^* L \setminus \mathcal{F}_A^* M$, e inoltre $S = (\mathcal{F}_A^+ L \cap \mathcal{F}_A^- M) \cup (\mathcal{F}_A^- L \cap \mathcal{F}_A^+ M)$ e $\langle A, \nu_M \rangle = -\langle A, \nu_L \rangle$, si ha

$$\int_{L_{(\frac{1}{2})} \cap M_{(\frac{1}{2})}} \varphi \, d\mu = \int_S (u_L^* - u_M^*) \varphi \langle A, \nu_L \rangle \, d\mathcal{H}^n \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1}) \,. \tag{17}$$

Poichè $S \subseteq L_{(\frac{1}{2})} \cap M_{(\frac{1}{2})}$, da (17) segue la (i); la (ii) ne discende facilmente. q.e.d.

Vale anche il seguente

TEOREMA (3.3). *Siano fissati E ed F insiemi limitati, di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$; sia u soluzione generalizzata in L^1 di*

$$\mathcal{A} u = \mu \qquad \textit{in } E \textit{ ed in } F \,.$$

Posto

$$S = (\mathcal{F}_A^+ E \cap \mathcal{F}_A^- F) \cup (\mathcal{F}_A^- E \cap \mathcal{F}_A^+ F)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi \, d\mu^* = -\int_S \varphi \, d\mu + \int_S (u_E^* - u_F^*) \varphi \langle A, \nu_E \rangle \, d\mathcal{H}^n$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$,

si ha che u è soluzione generalizzata dell'equazione $\mathcal{A} u = \mu + \mu^*$ in $E \cup F$.

Osserviamo esplicitamente che se è anche $(E \cup F)_{(1)} = E_{(1)} \cup F_{(1)}$, allora u è soluzione generalizzata di $\mathcal{A} u = \mu$ in $E \cup F$.

DIM. Poniamo $L = E \cup F$ e inizialmente supponiamo che $E \cap \cap F = \emptyset$. Poichè u è soluzione di (1) in E ed in F si ha per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_E u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E} u_E^* \varphi \langle A, \nu_E \rangle \, d\mathcal{H}^n +$$
$$+ \int_F u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{F_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* F} u_F^* \varphi \langle A, \nu_F \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \,,$$

da cui

$$\int_L u\mathcal{A}^*\varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)}\cup F_{(1)}} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E} u_E^* \varphi \langle A, \nu_E\rangle \, d\mathcal{H}^n + \int_{\mathcal{F}_A^* F} u_F^* \varphi \langle A, \nu_F\rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \, .$$

Allora, posto

$$u^* = \begin{cases} u_E^* & \text{su } \mathcal{F}_A^* E \setminus \mathcal{F}_A^* F \\ u_F^* & \text{su } \mathcal{F}_A^* F \setminus \mathcal{F}_A^* E \end{cases}$$

e procedendo come nella dimostrazione del teorema (3.2) si ottiene

$$\int_L u\mathcal{A}^*\varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{L_{(1)}} \varphi \, d\mu - \int_S \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* L} u^* \varphi \langle A, \nu_L\rangle \, d\mathcal{H}^n + \\ + \int_S (u_E^* - u_F^*) \varphi \langle A, \nu_E\rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \, ,$$

e questo prova la tesi nel caso $E \cap F = \emptyset$.

Per il caso generale ci riconduciamo al precedente considerando gli insiemi disgiunti e di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$, E ed $F \setminus E$. Infatti, come nella dimostrazione del teorema (2.1) possiamo considerare una partizione di $\mathcal{F}^*(F \setminus E) \setminus \mathcal{F}^* F$ in porzioni di ipersuperfici regolari K_j per cui è possibile utilizzare il teorema (2.2). Ora poichè una delle due tracce coincide con u_E^* che per ipotesi è in L_A^1, segue che anche l'altra $u_{F\setminus E}^*$ è $\langle A, \nu_E\rangle - \mathcal{H}^n$ integrabile.

Per la parte finale dell'osservazione (3.2) si ha la tesi con

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi \, d\mu^* = -\int_{\mathcal{F}_A^* E \cap \mathcal{F}_A^*(F\setminus E)} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E \cap \mathcal{F}_A^*(F\setminus E)} (u_E^* - u_{F\setminus E}^*) \, \varphi \langle A, \nu_E\rangle \, d\mathcal{H}^n \, .$$

D'altra parte dal teorema (2.2) si ha che

$$\int_{\mathcal{F}_A^* E \cap F_{(1)}} \varphi \, d\mu = \int_{\mathcal{F}_A^* E \cap F_{(1)}} (u_E^* - u_{F\setminus E}^*) \varphi \langle A, \nu_E\rangle \, d\mathcal{H}^n \, ,$$

per cui in definitiva

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi \, d\mu^* = -\int_S \varphi \, d\mu + \int_S (u_E^* - u_F^*) \varphi \langle A, \nu_E\rangle \, d\mathcal{H}^n \, .$$

q.e.d.

4. Ulteriori considerazioni sulla località.

È interessante osservare che oltre al teorema (1.2) sussiste anche il seguente risultato che in un certo senso lo inverte.

TEOREMA (4.1). *Assegnata* μ *verificante la condizione* (K) *in* E, *sia* $(u, u^*) \in L^1(E) \times L^1_A(\mathcal{F}^*_A E)$; *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $B_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$\mathfrak{L}^{n+1}(E \setminus L(B_\varepsilon)) < \varepsilon$$

e vale

$$\int_{E \cap L(B_\varepsilon)} u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)} \cap L(B_\varepsilon)} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}^*_A E \cap L(B_\varepsilon)} u^* \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0 \tag{18}$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$, *allora* u *è soluzione generalizzata in* E *di* (1) *con traccia* u^* *su* $\mathcal{F}^*_A E$.

DIM. Osserviamo preliminarmente che la relazione (18) continua a valere se al posto di $L(B_\varepsilon)$ si considera $L(B)$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $B \subseteq B_\varepsilon$.

È possibile allora scegliere gli insiemi B_ε in modo che $B_\varepsilon \subseteq B_{\varepsilon'}$ se $\varepsilon \geqslant \varepsilon' > 0$.

Essendo per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{L}^{n+1}(E \setminus L(B_\varepsilon)) < \varepsilon$, è immediato verificare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{E \cap L(B_\varepsilon)} u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} = \int_E u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1}$$

e, utilizzando anche la condizione (K),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{E_{(1)} \cap L(B_\varepsilon)} \varphi \, d\mu = \int_{E_{(1)}} \varphi \, d\mu \, .$$

Infine, per avere che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathcal{F}^*_A E \cap L(B_\varepsilon)} u^* \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathcal{F}^*_A E} u^* \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H} \, ,$$

mostriamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^n(\mathcal{F}^*_A E \setminus L(B_\varepsilon)) = 0 \, .$$

Infatti, posto $B = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\varepsilon>0} B_\varepsilon$, essendo E limitato e di perimetro finito si ha

$$\int_E \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{\mathcal{F}_A^* E} \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$ e quindi, per il teorema (1.2)

$$\int_{E \cap L(B)} \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{\mathcal{F}_A^* E \cap L(B)} \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$.

Poichè $\mathfrak{L}^{n+1}(E \cap L(B)) = 0$, si ottiene

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{F}_A^* E \cap L(B)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^n(\mathcal{F}_A^* E \setminus L(B_\varepsilon)) = 0\,.$$

Possiamo dunque conseguire la tesi passando al limite per $\varepsilon \to 0$ nella relazione (18). q.e.d.

Il teorema (4.1) suggerisce una nozione più debole di soluzione generalizzata in E di (1); ciò permetterà di stabilire il carattere locale di tali soluzioni per una classe di funzioni più ampia di quella considerata nel teorema (3.1).

DEFINIZIONE (4.1). Sia u una funzione $\mathfrak{L}^{n+1}$-misurabile in E e u^* $\mathcal{H}^n$-misurabile su $\mathcal{F}_A^* E$.

Diremo che u *è quasi-soluzione in E di* (1) *con traccia* u^*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\mathfrak{L}^{n+1}(E \setminus L(B_\varepsilon)) < \varepsilon\,, \qquad u \in L^1(E \cap L(B_\varepsilon))\,, \qquad u^* \in L_A^1(\mathcal{F}_A^* E \cap L(B_\varepsilon))$$

e vale

$$\int_{E \cap L(B_\varepsilon)} u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathfrak{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)} \cap L(B_\varepsilon)} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E \cap L(B_\varepsilon)} u^* \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$.

TEOREMA (4.2). *Se u è quasi-soluzione in E di* (1) *con traccia u^*, allora per ogni sottoinsieme L di E, di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$, esiste u_L^**

$\mathcal{H}^n$-misurabile su $\mathcal{F}_A^* L$ tale che u è quasi-soluzione in L di (1) *con traccia u_L^*.*

DIM. Come nella dimostrazione del teorema (2.1), sia $\mathcal{F}_A^* L = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) \cup N$ e siano $C_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tali che $L(C_m) = L\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} K_j\right)$. Per m sufficientemente grande, posto $D_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus C_m$, si ha

$$\mathcal{L}^{n+1}(L \setminus L(D_\varepsilon)) < 2\varepsilon\,, \qquad \mathcal{F}_A^* L \cap L(D_\varepsilon) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1} K_j$$

e vale

$$\int_E u \chi_{L(D_\varepsilon)} \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{E_{(1)}} \chi_{L(D_\varepsilon)} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* E} u^* \chi_{L(D_\varepsilon)} \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$.

Da queste relazioni, al variare di ε, segue l'esistenza di una funzione u_L^* $\mathcal{H}^n$-misurabile su $\mathcal{F}_A^* L$, ottenuta come nella dimostrazione del teorema (3.1) (ossia come limite lungo le linee caratteristiche), tale che (utilizzando il teorema (2.2)) $u_L^* \chi_{L(D_\varepsilon)} \in L_A^1(K_j)$ per ogni j.

Poichè $\mathcal{F}_A^* L \cap L(D_\varepsilon) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1} K_j$, si ha $u_L^* \chi_{L(D_\varepsilon)} \in L_A^1(\mathcal{F}_A^* L)$ e quindi, dall'osservazione (3.2), si ottiene

$$\int_{L \cap L(D_\varepsilon)} u \mathcal{A}^* \varphi \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{L_{(1)} \cap L(D_\varepsilon)} \varphi \, d\mu + \int_{\mathcal{F}_A^* L \cap L(D_\varepsilon)} u_L^* \varphi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^{n+1})$. q.e.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ANZELLOTTI - M. GIAQUINTA, *Funzioni BV e tracce*, Rend. Sem. Mat. Padova, **60** (1978), pp. 1-21.

[2] C. BARDOS, *Problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels*; *théorèmes d'approximation*; *application à l'équation de transport*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., s. 4, t. **3** (1970), pp. 185-233.

[3] M. Carriero - A. Leaci - E. Pascali, *Convergenza per l'equazione degli integrali primi associata al problema del rimbalzo,* Atti Acc. Lincei, **72** (1982), pp. 209-216.

[4] M. Carriero - A. Leaci - E. Pascali, *Convergenza per l'equazione degli integrali primi associata al problema del rimbalzo elastico unidimensionale* Ann. Mat. Pura e Appl., s. IV, **133** (1983), pp. 227-256.

[5] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$ *dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni,* Ann. Mat. Pura Appl., s. IV, **36** (1954), pp. 191-213.

[6] E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$ *dimensionali in uno spazio ad* r *dimensioni,* Ricerche Mat., **4** (1955), pp. 95-113.

[7] E. De Giorgi - F. Colombini - L. C. Piccinini, * *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate,* Quaderni S.N.S. Pisa (1972).

[8] L. De Simon - G. Torelli, *First order linear partial differential equations with discontinuous coefficients,* Ann. Mat. Pura e Appl., s. IV, **128** (1981), pp. 325-340.

[9] H. Federer, * *Geometric measure theory,* Springer-Verlag (1969).

[10] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation,* Notes on Pure Math. Australian National University, Canberra (1977).

[11] P. R. Halmos, * *Measure theory,* Van Nostrand, New York (1950).

[12] A. Ionescu Tulcea - C. Ionescu Tulcea, * *Topics in the theory of lifting,* Springer-Verlag (1969).

[13] K. Krickeberg, *Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) **44** (1957), **92**, pp. 105-133.

[14] A. Leaci, *Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito,* Att Acc. Lincei, **71** (1981), pp. 55-59.

[15] A. Leaci, *Sulle soluzioni generalizzate di equazioni alle derivate parziali del primo ordine,* Note di Matematica (Lecce).

[16] M. Miranda, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali,* Rend. Sem. Mat. Padova, **38** (1967), pp. 238-257.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 dicembre 1983.