

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

OSCAR STEFANI

## **Condizioni di continuità in una misura approssimante**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 73 (1985), p. 271-277

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1985\\_\\_73\\_\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__271_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Condizioni di continuità in una misura approssimante.

OSCAR STEFANI (\*)

Sia  $(X, \rho)$  uno spazio metrico, sia  $E \subset X$  e sia  $d(E)$  il diametro di  $E$ ; si dice che l'insieme  $E$  è  $\delta$ -massimale se  $d(E) = \delta$  e se  $X \supset A \supset E$ , con  $d(A) = \delta$ , implica  $A = E$ . È noto che negli spazi euclidei gli insiemi  $\delta$ -massimali coincidono con quelli ad ampiezza costante  $\delta$ . In [S.Z] sono state date delle condizioni sufficienti affinché le misure approssimanti la misura unidimensionale di Hausdorff di un insieme  $\delta$ -massimale  $E$  e della sua frontiera  $\partial E$ , non presentino discontinuità nel punto  $t = \delta$ .

Nel presente lavoro dimostreremo che le stesse condizioni sono anche necessarie, e ne daremo delle altre equivalenti (teorema § 2).

Per la terminologia e le notazioni usate facciamo riferimento a [S.Z] ed a [S]. In particolare per i simboli:  $\mu(\cdot)$ ,  $m(\cdot)$ ,  $l(\cdot)$ ,  $\nu_\delta(\cdot)$ ,  $(\cdot)^s$ ,  $s_\delta(\cdot)$ ,  $\omega$ ,  $N_R$ ,  $K_0$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $f(\cdot)$ ,  $R(\cdot)$  si veda [S.Z]; per i simboli  $\mu_\delta(\cdot)$ ,  $N^*$ ,  $N'$ , e per la definizione di  $\delta$ -ricoprimento ottimale si veda [S].

Per le proprietà degli insiemi ad ampiezza costante negli spazi euclidei si veda, tra l'altro, [V], Th. 12.19 e [E], Ch. VII.

Lo spazio in cui opereremo sarà sempre  $\mathbb{R}^2$  euclideo e quando avremo a che fare con un ricoprimento  $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$  tale che  $\sum d(F_i) < +\infty$ , intenderemo sempre che gli insiemi  $F_i$  siano ordinati per diametri decrescenti, cioè: se  $i > j$ , allora  $d(F_i) \leq d(F_j)$ .

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova, Via Belzoni 7 - 35131 Padova.

Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

1. Premettiamo due lemmi che useremo nella dimostrazione del Teorema del § 2.

LEMMA 1. Sia  $E$   $\delta$ -massimale in  $\mathbb{R}^2$  euclideo, sia  $\delta^*$  tale che  $0 < \delta^* < \delta$  e sia  $\mathcal{F} = \{F_i, i = 1, \dots, n\}$  un  $\delta^*$ -ricoprimento ottimale finito di  $\partial E$ , allora esistono due indici  $p$  e  $q$ , con  $p \neq q$ ,  $1 < p \leq n$ ,  $1 < q \leq n$ , tali che  $F_1 \cap F_p \neq \emptyset$  e  $F_1 \cap F_q \neq \emptyset$ .

DIM. Posto  $d_1 = d(F_1)$ , è  $d_1 \leq \delta^* < \delta$ ; poichè  $\mathcal{F}$  è ottimale,  $d(F_1 \cap \partial E) = d_1$ ; esistono quindi, data la compattezza di  $F_1 \cap \partial E$ ,  $x_1, x_2 \in F_1 \cap \partial E$  tali che  $|x_1 - x_2| = d_1$ . Sia  $u = (x_1 - x_2)/|x_1 - x_2|$ , siano  $r$  ed  $s$  le due rette per  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente, ortogonali ad  $u$ , sia  $\pi_1$  il semipiano delimitato da  $r$  e non contenente  $s$ , e  $\pi_2$  il semipiano delimitato da  $s$  non contenente  $r$ ; ricordando le proprietà della rappresentazione canonica di  $\partial E: f: \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , costruita mediante le rette d'appoggio, poichè  $r$  ed  $s$  non possono essere rette d'appoggio, è immediato vedere che  $f(u)$  è interno a  $\pi_1$  e  $f(-u)$  è interno a  $\pi_2$ .

Sia  $\Gamma_1$  l'arco di  $\partial E$  di estremi  $x_1$  e  $f(u)$  e contenuto in  $\pi_1$ , e  $\Gamma_2$  l'arco di  $\partial E$  gli estremi  $x_2$  e  $f(-u)$  e contenuto in  $\pi_2$ , è evidente che:

$$1.A \quad \forall x \in \Gamma_1 \setminus \{x_1\}, |x - x_2| > d_1 \text{ e quindi } \Gamma_1 \cap F_1 = \{x_1\},$$

$$1.B \quad \forall x \in \Gamma_2 \setminus \{x_2\}, |x - x_1| > d_1 \text{ e quindi } \Gamma_2 \cap F_1 = \{x_2\}.$$

Da 1.A segue che  $\Gamma_1 \setminus \{x_1\} \subset \bigcup_{i=2}^n (F_i \cap \Gamma_1)$  e pertanto  $\Gamma_1 = \bigcup_{i=2}^n (F_i \cap \Gamma_1)$ , ma allora esiste un  $p > 1$  tale che  $x_1 \in F_p$  e quindi  $F_1 \cap F_p \neq \emptyset$ . Da 1.B segue che  $\Gamma_2 \setminus \{x_2\} \subset \bigcup_{i=2}^n (F_i \cap \Gamma_2)$ , e da 1.B e dal fatto che  $x_1 \in F_p$  e  $d(F_p) \leq d_1$  segue che:

$$\Gamma_2 \setminus \{x_2\} \subset \bigcup_{\substack{2 \leq i \leq n \\ i \neq p}} (F_i \cap \Gamma_2) \quad \text{da cui} \quad \Gamma_2 = \bigcup_{\substack{2 \leq i \leq n \\ i \neq p}} (F_i \cap \Gamma_2)$$

e quindi esiste un  $q > 1$ ,  $q \neq p$  tale che  $x_2 \in F_q$ , pertanto  $F_q \cap F_1 \neq \emptyset$ . //

LEMMA 2. Sia  $C$  chiuso e convesso in  $\mathbb{R}^2$  euclideo, sia  $D \subset \partial C$ ; se esistono  $\delta > 0$  e  $k > 0$  tali che  $v_\delta(D) < k$ , allora si ha:  $\mu(D) < \pi k$ .

DIM. Poichè  $v_\delta(D) < k$  esiste un  $\delta$ -ricoprimento ottimale  $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$  di  $D$  (cfr. [S], Prop. 4) tale che:

$$2.A \quad \sum d(F_i) < k.$$

Si ha ovviamente:

$$2.B \quad \mu(D) \leq \sum \mu(D \cap F_i) \leq \sum \mu(\partial C \cap F_i) \leq \sum \mu(\partial(C \cap F_i)) .$$

Poichè  $\mathcal{F}$  è ottimale, per ogni  $i \in N^*$ ,  $F_i$  è ad ampiezza costante  $d(F_i)$ ; dal fatto, poi, che  $F_i \cap C$  è compatto e convesso ed  $F_i \cap C \subset F_i$ , per note proprietà dei convessi (cfr. [L], sec. 22 e sec. 11) si ha:

$$2.C \quad \mu(\partial(C \cap F_i)) \leq \mu(\partial F_i) = \pi d(F_i) .$$

Da 2.B, 2.C, 2.A segue subito la tesi. //

**2.** Sia  $I \subset \mathbb{R}^2$  ricordiamo che dire che  $v_t(I)$  è continua, come funzione di  $t$ , per  $t = \delta$ , equivale a dire che  $s_\delta(I) = 0$ . Con riferimento al seguente Teorema, in [S.Z] si è dimostrato che: viii  $\Rightarrow$  v  $\Rightarrow$  vi  $\Rightarrow$  i.

**TEOREMA.** *Sia  $\delta > 0$  e sia  $E$   $\delta$ -massimale in  $\mathbb{R}^2$  euclideo, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- i)  $s_\delta(\partial E) = 0$ ;
- ii)  $\forall \varepsilon > 0$  e  $\forall \theta: 0 < \theta < \delta$ , esiste un  $\delta^*$ , con  $0 < \delta^* < \delta$  e un  $\delta^*$ -ricoprimento ottimale finito  $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$  di  $\partial E$  tale che  $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$  e  $\theta < d(F_1)$ ;
- iii)  $\forall \varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento chiuso  $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$  di  $\partial E$  tale che  $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$  e  $\delta - \varepsilon < d(F_1) < \delta$ ;
- iv)  $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}$  tale che  $v_\delta(f(K)) < \varepsilon$ ;
- v)  $\inf \{v_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\} = 0$ ;
- vi)  $s_\delta(E) = 0$ ;
- vii)  $\forall \varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento chiuso  $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$  di  $E$  tale che  $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$  e  $\delta - \varepsilon < d(F_1) < \delta$ ;
- viii)  $m(K_0) = \pi$ .

**DIM.**

i  $\Rightarrow$  ii. Poichè  $s_\delta(\partial E) = 0, v_i(\partial E)$  è continua in  $t = \delta$ , allora è continua anche  $\mu_i(\partial E)$  ed in particolare è:

$$\lim_{t \rightarrow \delta^-} \mu_t(\partial E) = \mu_\delta(\partial E) = v_\delta(\partial E) = \delta .$$

Fissati  $\varepsilon$  e  $\theta$ , posto

$$3.A \quad \varepsilon_1 = \min \{ \varepsilon, (\delta - \theta)/3 \}$$

esiste un ricoprimento aperto, che per la compattezza di  $\partial E$  non è restrittivo supporre finito,  $\mathfrak{G} = \{G_i, i = 1, \dots, n\}$ , tale che

$$\sum d(G_i) < \delta + \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad d(G_1) < \delta.$$

Preso  $\delta^*$  tale che:

$$3.B \quad \max \{ \delta - \varepsilon_1, d(G_1) \} < \delta^* < \delta,$$

$\mathfrak{G}$  è un  $\delta^*$ -ricoprimento di  $\partial E$ ; esiste quindi (vedi [S], Prop. 3) un  $\delta^*$ -ricoprimento ottimale finito  $\mathcal{F} = \{F_i, i = 1, \dots, m\}$  di  $\partial E$  tale che:

$$3.C \quad \sum_{i=1}^m d(F_i) \leq \sum_{i=1}^n d(G_i) < \delta + \varepsilon_1.$$

$\mathcal{F}$  è il ricoprimento cercato. Siano, infatti,  $F_p$  ed  $F_q$  due insiemi intersecanti  $F_1$ , di cui si è dimostrata l'esistenza nel Lemma 1; posto, per  $1 \leq i \leq m$ ,  $d_i = d(F_i)$ , per proprietà dei ricoprimenti ottimali (cfr. [S], 5.1) e la 3.B si ha:

$$d_1 + d_p > \delta^* > \delta - \varepsilon_1, \quad d_1 + d_q > \delta^* > \delta - \varepsilon_1.$$

Dalla seconda relazione si ricava:  $d_q > \delta - \varepsilon_1 - d_1$ .

Ora se fosse  $d_1 \leq \theta$  si avrebbe:

$$d_1 + d_p + d_q > 2\delta - 2\varepsilon_1 - \theta \geq \delta + \varepsilon_1,$$

ma questo sarebbe in contraddizione con 3.C; pertanto  $d(F_1) > \theta$ ; 3.C e 3.A implicano inoltre che  $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ .

ii  $\Rightarrow$  iii. Basta prendere  $\theta = \max \{ \delta/2, \delta - \varepsilon \}$ .

iii  $\Rightarrow$  iv. Dimostriamo che iii implica che, per ogni  $\varepsilon$ , esiste un aperto  $A \subset \omega$  tale che:

$$3.D.1 \quad A \supset K_0;$$

$$3.D.2 \quad \text{se } u \notin A, \text{ allora } -u \in A;$$

$$3.D.3 \quad v_\theta(f(A)) < \varepsilon.$$

Non è restrittivo supporre  $\varepsilon < \delta/2$ . Poichè  $\mu(f(K_0)) = 0$  ([S.Z], Coroll. 9.A) esiste un ricoprimento aperto  $\mathfrak{G} = \{G_i, i \in N^*\}$  di  $f(K_0)$  tale che  $\sum d(G_i) < \varepsilon/2$ .

Posto  $G' = (\bigcup G_i) \cap \partial E$ ,  $G'$  è aperto in  $\partial E$  e poichè  $\varepsilon < \delta$  si ha:

$$v_\delta(G') \leq \sum d(G_i) < \varepsilon/2.$$

In base a iii, fissato  $\varepsilon$ , esiste un ricoprimento chiuso  $\mathfrak{F} = \{F_i, i \in N'\}$  tale che  $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon/4$  e  $\delta - \varepsilon/4 < d(F_1) < \delta$ . Sia  $G'' = \partial E \setminus F_1$ ;  $G''$  è aperto in  $\partial E$  e  $G'' \subset \bigcup_{N' \setminus \{1\}} F_i$ ; ne segue facilmente che:

$$v_\delta(G'') \leq \sum_{N' \setminus \{1\}} d(F_i) = \sum_{N'} d(F_i) - d(F_1) < \varepsilon/2.$$

Ma allora  $v_\delta(G' \cup G'') < \varepsilon$ .

Sia  $A = f^{-1}(G' \cup G'')$ ,  $A$  è l'aperto di  $\omega$  cercato. Infatti,  $A \supset K_0$ , poichè  $f(K_0) \subset G'$ ; se  $u \notin A$ , allora  $-u \in A$ ; infatti se  $u \notin A$  e  $-u \notin A$ , allora  $f(u), f(-u) \notin G' \cup G''$  e quindi in particolare  $f(u), f(-u) \notin G''$ . Quindi  $f(u), f(-u) \in F_1$ ; il che è in contraddizione col fatto che  $d(F_1) < \delta$ . Ora, poichè  $f(A) = G' \cup G''$ , è  $v_\delta(f(A)) < \varepsilon$ . Pertanto  $A$  verifica le proprietà 3.D.

Si costruisca infine un insieme  $K \in \mathcal{K}$  tale che  $K \subset A$ . Basta a tal fine considerare l'insieme  $K'$  di cui all'Osservazione 0.B di [S.Z] e prendere:  $K = (A \cap K') \cup (K' \setminus A)^s$ . Dalla disuguaglianza  $v_\delta(f(K)) \leq v_\delta(f(A))$  segue la iv.

iv  $\Rightarrow$  v. È immediata.

v  $\Rightarrow$  vi. È immediata conseguenza della Prop. 11 di [S.Z].

vi  $\Rightarrow$  i. È immediata.

vii  $\Rightarrow$  iii. È immediata.

ii  $\Rightarrow$  vii. Non è restrittivo supporre  $\varepsilon < \delta/10$ . Fissato  $\theta = \delta - \varepsilon$ , sia  $\mathfrak{F} = \{F_i, i = 1, \dots, n\}$  il  $\delta^*$ -ricoprimento ottimale di  $\partial E$  di cui ii afferma l'esistenza. Per dimostrare che l'implicazione è vera, basterà dimostrare che  $\mathfrak{F}$  è un ricoprimento anche di  $E$ .

Data l'ipotesi su  $\varepsilon$  ed il valore di  $\theta$  è immediato che:

$$\sum_{i=2}^n d(F_i) < 2\varepsilon < 2\delta/10 < \delta^*/2; \quad \text{allora } d(F_i) < \delta^*/2, \text{ per } i \geq 2.$$

Questo per proprietà dei ricoprimenti ottimali (cfr. [S], 5.2) implica  $F_i \cap F_j = \emptyset$  per  $i \neq j$  e  $i, j > 1$ .

Sia  $G = \partial E \setminus F_1$ ,  $G$  è aperto in  $\partial E$ , pertanto  $G = \bigcup \Delta_i$ , ove  $\Delta_i$  sono archi aperti disgiunti e l'unione indicata è al più numerabile. Dimostriamo che:

3.E Per ogni  $i$ , esiste un  $j^*$  con  $2 \leq j^* \leq n$  tale che  $\Delta_i \subset F_{j^*}$ .

In caso contrario, infatti, poichè  $G \subset \bigcup_{j=2}^n F_j$ , si avrebbe

$$\Delta_i = \bigcup_{j=2}^n (F_j \cap \Delta_i)$$

che, essendo per ogni  $j$ ,  $F_j \cap \Delta_i$  chiuso in  $\Delta_i$ , sarebbe in contraddizione con la connessione di  $\Delta_i$ .

Poichè  $\mathcal{F}$  è un ricoprimento di  $\partial E$ , per dimostrare che è un ricoprimento anche di  $E$  basterà dimostrare che  $E^\circ \setminus F_1 \subset \bigcup_{j=2}^n F_j$ . A tal fine, sia  $x \in E^\circ \setminus F_1$ , poichè  $x \notin F_1$ , che è compatto e convesso, esiste una retta  $r$  passante per  $x$ , senza punti in comune con  $F_1$ ; è facile vedere che  $r$  incontra  $\partial E$  in due punti  $x_i, y_i$  appartenenti ad uno stesso  $\Delta_i$ ; per la 3 E esiste quindi un  $j^*$ :  $2 \leq j^* \leq n$  tale che  $x_i, y_i \in F_{j^*}$ , ma poichè  $F_{j^*}$  è convesso anche  $x \in F_{j^*}$  e quindi  $x \in \bigcup_{j=2}^n F_j$ .

viii  $\Rightarrow$  v. È il Coroll. 11.B di [S.Z].

v  $\Rightarrow$  viii. Se  $\inf \{v_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\} = 0$ , esiste una successione  $K_n$  di elementi di  $\mathcal{K}$  tali che  $v_\delta(f(K_n)) < 1/(\pi n^2)$ . Per il Lemma 2 segue che  $\mu(f(K_n)) < 1/n^2$  e quindi (vedi [S.Z], 0.1)  $l(K_n) < 1/n^2$ .

Posto  $H_n = \{u \in \omega \setminus N_R : R(u) < 1/n\}$  si ha  $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$  e quindi:

3.F  $m(H_n) \rightarrow m(K_0)$ .

Poichè (cfr. [S.Z], 0.3):

$$\frac{1}{n^2} > l(K_n) = \int_{K_n} R(u) m(du) \geq \int_{K_n \setminus H_n} R(u) m(du) \geq \frac{1}{n} m(K_n \setminus H_n)$$

si ha:  $m(K_n \setminus H_n) < 1/n$  e quindi:

3.G  $m(K_n \setminus H_n) \rightarrow 0$ .

Tenuto conto che (cfr. [S.Z], Prop. 1):  $\pi = m(K_n) = m(K_n \setminus H_n) + m(K_n \cap H_n)$  da 3.G segue che:

$$3.H \quad m(K_n \cap H_n) \rightarrow \pi.$$

Ora, se  $m(K_0) \neq \pi$ , deve essere  $m(K_0) < \pi$ .

Ma è facile vedere che, se fosse  $m(K_0) < \pi$ , tenendo conto del fatto che  $m(K_n \cap H_n) \leq m(H_n)$ , 3.F e 3.H sarebbero in contraddizione tra loro. //

COROLLARIO. *Se  $E$  è  $\delta$ -massimale in  $\mathbb{R}^2$  euclideo allora  $v_t(E)$  è continua in  $t = \delta$  se e solo se è ivi continua  $v_t(\partial E)$ .*

DIM. È:  $i \Leftrightarrow vi$ . //

#### BIBLIOGRAFIA

- [E] EGGLESTON H. G., *Convexity*, Cambridge University Press, 1963.
- [L] LAY S. R., *Convex Sets and Their Applications*, Wiley & Sons, 1982.
- [Le] LEICHTWEISS K., *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin, 1980.
- [R] ROGERS R. A., *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, 1970.
- [S] STEFANI O., *Ricoprimenti e misure approssimanti*, Rend. Acc. Naz. di Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica, 102° (1984), vol. VIII. pagg. 121-136.
- [S.Z] STEFANI O. - ZIRELLO G., *Misure approssimanti ed insiemi ad ampiezza costante*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 72 (1984), pp. 191-202.
- [V] VALENTINE F. A., *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1984.