RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALEXANDER A. LAŠHI

IRENE A. M. ZIMMERMANN

Modularität und Distributivität im Subidealverband einer Lie-Algebra

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 73 (1985), p. 169-177

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__169_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 73 (1985)

Modularität und Distributivität im Subidealverband einer Lie-Algebra.

Alexander A. Lashi - Irene A. M. Zimmermann (*)

Gegenstand dieser Note ist die Untersuchung des Subidealverbandes gewisser Lie-Algebren. Eine Unteralgebra H einer Lie-Algebra L heißt ein *Subideal* von L, falls es eine aufsteigende Kette $\{H_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ von Unteralgebren H_i von L zwischen $H = H_0$ und $H_n = L$ gibt derart, daß H_i ein Ideal in H_{i+1} ist für jedes i mit $0 \leqslant i < n$.

Das Erzeugnis $\langle A, B\rangle$ zweier Subideale A und B einer Lie-Algebra L ist im allgemeinen nicht wieder ein Subideal von L, so daß man nicht ohne weiteres vom Verband der Subideale einer Lie-Algebra sprechen kann. In einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra L über einem Körper der Charakteristik O jedoch bildet die Gesamtheit der Subideale von L einen vollständigen Verband $\mathcal{V}_{SI}(L)$.

Für diese Lie-Algebren werden in den ersten beiden Abschnitten notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $\mathcal{V}_{SI}(L)$ ein modularer bzw. distributiver Verband ist.

Im dritten Abschnitt sollen Lie-Algebren mit transitiver Idealbeziehung, sogenannte $\mathcal{T}$-Lie-Algebren, untersucht werden.

Es wird zunächst die Struktur auflösbarer $\mathcal{T}$-Lie-Algebren beschrieben. Da in einer $\mathcal{T}$-Lie-Algebra jedes Subideal ein Ideal ist, bildet die Menge aller Subideale einer $\mathcal{T}$-Lie-Algebra stets einen modu-

(*) Indirizzo degli AA.: Tbilisi Mathematical Institute - Academy of Sciences of the Georgian S.S.R., U.S.S.R.; Mathematisches Institut der Universität - Albertstraße 23b - D-7800 Freiburg i. Br. (Germania Occidentale).

Die vorliegende Arbeit entstand während eines Forschungsaufenthaltes des erstgenannten Autors an der Universität Freiburg. Er dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Ermöglichung dieses Aufenthaltes.

laren Verband. Ziel dieses Abschnitts ist es, notwendige und hinreichende Kriterien für die Distributivität des Subidealverbandes einer $\mathcal{T}$-Lie-Algebra anzugeben. Hierbei sind keine Einschränkungen hinsichtlich der Dimension oder des zugrunde liegenden Körpers notwendig.

1. In diesem und dem folgenden Abschnitt betrachten wir Lie-Algebren endlicher Dimension über einem Körper der Charakteristik 0. Schenkman [6] zeigte, daß in einer solchen Lie-Algebra das Erzeugnis $\langle A, B\rangle$ zweier Subideale A und B wieder ein Subideal ist. Daher bildet die Gesamtheit der Subideale einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 einen vollständigen Verband.

Sei V ein Verband, und seien a, b verschiedene Elemente aus V. Man sagt, *a deckt b*, falls $b < a$ ist und für jedes $x \in V$ aus $b \leqslant x < a$ stets $b = x$ folgt. Der Verband V heißt *nach unten modular*, wenn gilt : Werden a und b von $a \cup b$ gedeckt, so decken a und b ihren gemeinsamen Durchschnitt $a \cap b$. Dual heißt V *nach oben modular*, wenn $a \cup b$ sowohl a als auch b deckt, falls $a \cap b$ von a und b gedeckt wird.

Lemma 1. Der Verband $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ der Subideale einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra L über einem Körper der Charakteristik 0 ist nach unten modular.

Beweis. Seien A und B Subideale von L, die von $\langle A, B\rangle$ gedeckt werden. Dann sind A und B Ideale in $\langle A, B\rangle$, so daß $\langle A, B\rangle = A + B$ gilt. Ebenso ist $A \cap B$ ein Ideal in $\langle A, B\rangle$, und wir erhalten $\langle A, B\rangle/A = (A + B)/A \simeq B/A \cap B$. Sei nun X ein Subideal von L mit $B > X > A \cap B$. Dann existiert ein Ideal Y von B so, daß $B > Y \geqslant \geqslant X > A \cap B$ gilt. Wegen $B/A \cap B \simeq (A + B)/A$ gibt es daher ein Ideal $\overline{Y}$ von $A + B$ mit $A < \overline{Y} < A + B$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß A von $A + B$ gedeckt wird.

Ebenso sieht man, daß es kein Subideal von L gibt, welches echt zwischen A und $A \cap B$ liegt.

Bemerkung. Die Aussage von Lemma 1 ist für eine beliebige Lie-Algebra L richtig, wenn die Subideale von L einen Verband bilden.

Der Verband V hat *endliche Länge*, falls jede Kette von Elementen in V endliche, beschränkte Länge hat. Ein Verband V endlicher

Länge ist genau dann modular, wenn V nach oben und nach unten modular ist.

Satz 1. Sei L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Der Verband $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ der Subideale von L ist dann und nur dann modular, wenn jede 2-erzeugte nilpotente Subideal-Sektion schon 2-dimensional ist.

Dabei heißt J/K eine *Subideal-Sektion* von L, wenn J und K Subideale von L sind und K ein Ideal in J ist.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, daß $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ modular ist.

Sei J/K eine 2-erzeugte nilpotente Subideal-Sektion von L.

Jede Unteralgebra H/K von J/K ist ein Subideal in J/K, daher ist H ein Subideal in L. Ebenso gilt für jedes Subideal X von L mit $K \leqslant X \leqslant J$, daß X/K ein Subideal von J/K ist. Also ist der Verband der Unteralgebren von J/K modular.

Nach einem Resultat von Kolman [4] ist dann J/K abelsch und somit 2-dimensional.

Umgekehrt sei nun jede 2-erzeugte nilpotente Subideal-Sektion J/K von L 2-dimensional. Jede Kette in $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ hat endliche, durch $\dim(L)$ beschränkte Länge, d.h., $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ ist ein Verband endlicher Länge. Daher genügt es nach Lemma 1 zu zeigen, daß $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ nach oben modular ist.

Seien also A und B aus $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ so, daß $A \cap B$ von A und B gedeckt wird. Dann ist der Durchschnitt $A \cap B$ der Subideale A und B ein Ideal sowohl in A als auch in B, also auch in $\langle A, B\rangle$. Nun sind $A/A \cap B$ und $B/A \cap B$ einfache Lie-Algebren, und wir unterscheiden drei Fälle.

(i) $A/A \cap B$ und $B/A \cap B$ sind beide 1-dimensional. Dann ist $\langle A, B\rangle/A \cap B$ von zwei Elementen erzeugt und nach einem Satz von Hartley [3] als Erzeugnis zweier abelscher Subideale nilpotent. Nun kann es zwischen $\langle A, B\rangle$ und A bzw. $\langle A, B\rangle$ und B keine weiteren Subideale von L geben, denn nach Voraussetzung ist $\langle A, B\rangle/A \cap B$ 2-dimensional. Also deckt $\langle A, B\rangle$ sowohl A als auch B.

(ii) $A/A \cap B$ und $B/A \cap B$ sind nicht-abelsch einfach. Schenkman zeigte in [6], daß der ω-te Term H^ω der unteren Zentralreihe eines Subideals H einer Lie-Algebra L ein Ideal in L ist.

Daher sind $(A/A \cap B)^\omega = A/A \cap B$ und $(B/A \cap B)^\omega = B/A \cap B$ Ideale in $\langle A, B\rangle/A \cap B$ und man erhält $\langle A, B\rangle/A \cap B = (A + B)/A \cap B$.

Mit einer zum Beweis von Lemma 1 analogen Überlegung ergibt sich wiederum, daß A und B von $\langle A, B\rangle = A + B$ gedeckt werden.

(iii) Im letzten Fall nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $A/A \cap B$ nicht-abelsch einfach und $B/A \cap B$ 1-dimensional ist. Wieder ist $(A/A \cap B)^{\omega} = A/A \cap B$ ein Ideal in $\langle A, B\rangle/A \cap B = (A + B)/A \cap B$. Wegen $(A + B)/A \simeq B/A \cap B$ gibt es kein Subideal von L, das echt zwischen $A + B$ und A liegt, d.h. $A + B$ deckt A. Sei nun Y ein Subideal von L, welches echt zwischen B und $A + B$ liegt. Es ist $\dim((A + B)/A \cap B) = \dim(A/A \cap B) + 1$ und $\dim(Y/A \cap B) > 1$. Also ist $A \cap B$ echt in $A \cap Y$ enthalten, d.h., $A \cap Y$ ist ein Subideal von L mit $A \cap B < A \cap Y < A$ — ein Widerspruch. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

2. In diesem Abschnitt geben wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß der Verband $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ der Subideale einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 distributiv ist.

Zunächst notieren wir die folgende Eigenschaft modularer, nicht-distributiver Verbände.

Lemma 2. In einem modularen, nicht-distributiven Verband V gibt es paarweise verschiedene Elemente a, b und c, so daß $a \cap b = a \cap c = b \cap c$ und $a \cup b = a \cup c = b \cup c$ gilt.

(Zum Beweis siehe etwa Birkhoff [2], Seite 39).

Der von den Elementen a, b und c in Lemma 2 erzeugte Unterverband von V heißt ein *Diamant*.

Hat in der Situation von Lemma 2 der Verband V endliche Länge, so kann man außerdem a, b und c so wählen, daß a, b und c von $a \cup b$ gedeckt werden und $a \cap b$ von a, b und c gedeckt wird.

Lemma 3. Bildet die Menge der Subideale einer Lie-Algebra L einen modularen, nicht-distributiven Verband endlicher Länge, so gibt es in L eine 2-dimensionale abelsche Subideal-Sektion.

Beweis. Nach Lemma 2 existieren in L Subideale A, B und C, für die $A \cup B = A \cup C = B \cup C = H$ und $A \cap B = A \cap C = B \cap C = K$ gilt.

Wähle A, B und C so, daß A, B und C von H gedeckt werden und K von A, B und C gedeckt wird. Dann sind A, B, C und somit auch K Ideale in H. Wir zeigen, daß H/K die gesuchte Subideal-Sektion ist.

Offensichtlich gilt $H/K = A/K \oplus B/K = A/K \oplus C/K = B/K \oplus C/K$.

Wegen $[A/K, A/K] \leqslant [B/K \oplus C/K, A/K] = [B/K, A/K] + [C/K, A/K] = 0$ ist A/K abelsch. Ebenso sieht man, daß B/K und C/K abelsch sind, d.h., H/K ist abelsch. Weil K maximale Unteralgebra von A und A maximale Unteralgebra von H ist, ergibt sich schließlich, daß H/K 2-dimensional ist.

SATZ 2. Sei L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Genau dann ist der Subidealverband $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ von L distributiv, wenn jede abelsche Subideal-Sektion 1-dimensional ist.

BEWEIS. Wenn $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ distributiv ist, so ist der Unteralgebrenverband einer jeden abelschen Subideal-Sektion ebenfalls distributiv, d.h., jede abelsche Subideal-Sektion ist 1-dimensional (vgl. Kolman [4]).

Umgekehrt sei nun jede abelsche Subideal-Sektion von L 1-dimensional. Dann ist auch jede nilpotente Subideal-Sektion J/K von L 1-dimensional. Bezeichnet man mit $Z(J/K)$ das Zentrum von J/K, so ist $(J/K)/(Z(J/K))$ ebenfalls eine nilpotente Subideal-Sektion, und nach Induktion über die Nilpotenzklasse von J/K erhalten wir, daß $(J/K)/(Z(J/K))$ 1-dimensional ist. Hieraus folgt, daß J/K abelsch und daher nach Voraussetzung 1-dimensional ist.

Nun erfüllt L die Bedingung aus Satz 1, also ist $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ ein modularer Verband. Es ist klar, daß $\mathfrak{V}_{SI}(L)$ auch distributiv ist, denn sonst gäbe es—im Widerspruch zur Voraussetzung—nach Lemma 3 eine 2-dimensionale abelsche Subideal-Sektion in L.

3. Eine Lie-Algebra L heißt *$\mathcal{T}$-Lie-Algebra*, wenn die Beziehung, ein Ideal in L zu sein, transitiv ist, d.h., falls J ein Ideal in I und I ein Ideal in L ist, so ist auch J ein Ideal in L. In diesem Abschnitt betrachten wir den Subidealverband von $\mathcal{T}$-Lie-Algebren.

Jedes Subideal einer $\mathcal{T}$-Lie-Algebra L ist ein Ideal in L. Somit stimmt die Menge der Subideale in L mit der Menge der Ideale in L überein und bildet daher einen modularen Verband.

Wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine $\mathcal{T}$-Lie-Algebra einen distributiven Subideal— und also Idealverband besitzt. Allgemein ist die Frage nach der Distributivität des Idealverbandes einer Lie-Algebra ungeklärt. Für eine abelsche Lie-Algebra L ist jedoch bekannt, daß der Idealverband von L dann und nur dann distributiv ist, wenn L 1-dimensional ist (Kolman [4]). Daß dies auch für nilpotente Lie-Algebren gilt, zeigt man leicht durch Induktion über die Nilpotenzklasse einer solchen Lie-Algebra.

Wir beginnen mit einer Beschreibung der Struktur auflösbarer $\mathcal{T}$-Lie-Algebren (*). Der Beweis des folgenden Lemmas verläuft analog zum Beweis des entsprechenden, von Robinson [5] stammenden, gruppentheoretischen Resultats. Wie üblich bezeichnet $L' = [L, L]$ die Kommutator-Algebra von L.

Lemma 4. Eine auflösbare $\mathcal{T}$-Lie-Algebra ist metabelsch.

Beweis. Angenommen, das Lemma ist falsch. Da ein Ideal einer $\mathcal{T}$-Lie-Algebra ebenfalls eine $\mathcal{T}$-Lie-Algebra ist, können wir annehmen, es gebe eine auflösbare $\mathcal{T}$-Lie-Algebra L so, daß $0 \neq L'' = [L', L']$ abelsch ist.

Man zeigt zunächst, daß L'' im Zentralisator $C_L(L')$ von L' in L enthalten ist. Hierzu weisen wir nach, daß $C_L(L')$ das einzige maximale nilpotente Ideal in L ist und als solches das abelsche Ideal L'' enthalten muß.

Sei I ein nilpotentes Ideal in L und $x \in I$. Dann ist $\langle x \rangle$ ein Ideal in L. Wähle $y, z \notin C_L(\langle x \rangle)$. Mit $\alpha \neq 0 \neq \beta$ ist $[x, y] = \alpha x$ und $[x, z] = = \beta x$. Wegen $[[x, z], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ erhält man $[y, z] \in C_L(\langle x \rangle)$. Daher ist $L/C_L(\langle x \rangle)$ abelsch, d.h. $L' \leqslant C_L(\langle x \rangle)$ bzw. $x \in C_L(L')$ und $I \leqslant C_L(L')$. Also liegt jedes nilpotente Ideal von L in $C_L(L')$.

Ferner ist $C_L(L')$ selbst nilpotent, denn aus $[C_L(L'), C_L(L')] \leqslant L'$ folgt $[[C_L(L'), C_L(L')], C_L(L')] = 0$.

Weil $L'' \leqslant C_L(L')$ gilt, ergibt sich aus $[L'', L'] = 0$ die Nilpotenz von L'. Nach dem eben gezeigten muß dann aber L' in $C_L(L')$ enthalten sein, d.h. $[L', L'] = L'' = 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Eine Lie-Algebra L heißt *fast abelsch*, wenn $L = L' \rtimes \langle x \rangle$ ist, wobei L' abelsch ist und $[l, x] = l$ für alle $l \in L'$ gilt.

Lemma 5. Eine auflösbare Lie-Algebra L ist genau dann eine $\mathcal{T}$-Lie-Algebra, wenn L abelsch oder fast abelsch ist.

Beweis. Es ist offensichtlich, daß die Idealbeziehung in abelschen und fast abelschen Lie-Algebren transitiv ist.

(*) $\mathcal{T}$-Lie-Algebren wurden ebenfalls von I. N. Stewart untersucht, vgl. Amayo-Stewart [1], S. 167.

Sei nun L eine auflösbare, nicht-abelsche Lie-Algebra. Nach Lemma 4 ist L metabelsch.

Wir nehmen zuerst an, daß $\dim(L/L') = 1$ ist. Sei $x \in L'$ und $a \in L \setminus L'$ mit $[x, a] \neq 0$. Weil $\langle x \rangle$ ein Ideal in L ist, gilt dann $[x, a] = \mu_{a,x} x$ für ein $\mu_{a,x} \neq 0$ aus dem Grundkörper.

Wenn $\dim(L') > 1$ ist, so gibt es ein Element y in L' mit $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 0$.

Wiederum existiert ein $\mu_{a,y}$ so, daß $[y, a] = \mu_{a,y} y$ gilt. Da auch $\langle x + y \rangle$ ein Ideal in L ist, erhält man

$$[x + y, a] = \mu_{a,x+y}(x + y) = \mu_{a,x} x + \mu_{a,y} y ,$$

woraus $\mu_{a,x+y} = \mu_{a,x} = \mu_{a,y} = \mu_a$ folgt. Setze $a_1 = \mu_a^{-1} a$. Dann ist $L = L' + \langle a_1 \rangle$, und wegen $[z, a_1] = z$ für alle $z \in L'$ ist L fast abelsch.

Sei nun $\dim(L/L') > 1$, und seien a und b Elemente aus $L \setminus L'$ derart, daß $a + L'$ und $b + L'$ linear unabhängig sind. Wie oben existieren μ_a und μ_b mit $[x, a] = \mu_a x$ und $[x, b] = \mu_b x$ für alle $x \in L'$. Weil L nicht abelsch ist, können wir a und b so wählen, daß μ_a und μ_b beide von O verschieden sind.

Es gilt

$$[x, a \pm b] = [x, a] \pm [x, b] = \mu_{a \pm b} x = \mu_a x \pm \mu_b x .$$

Mit $a_1 = \mu_a^{-1} a$ und $b_1 = \mu_b^{-1} b$ folgt nun $\mu_{a \pm b} = 1 \pm 1$.

Sei $x_1 \neq 0$ aus L'. Wir betrachten die folgenden Unteralgebren von L: $A_1 = \langle a_1 - b_1, L' \rangle$ und $A_2 = \langle a_1 - b_1 + x_1 \rangle$.

Wegen $\mu_{a_1 - b_1} = 0$ ist A_1 ein abelsches Ideal in L. Also ist auch A_2 ein Ideal in L.

Wir nehmen an, daß $[a_1, b_1] = 0$ gilt. Dann ist $[a_1, a_1 - b_1 + x_1] = x_1$. Weil A_2 ein Ideal in L ist, folgt nun $x_1 = \lambda(a_1 - b_1 + x_1)$. Hieraus erhält man $a_1 - b_1 \in L'$, ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $a_1 + L'$ und $b_1 + L'$.

Also ist $[a_1, b_1] = y \neq 0$. Nun ist auch $A_3 = \langle a_1 - b_1 \rangle$ ein Ideal in L, und aus $[a_1 - b_1, a_1] = \delta(a_1 - b_1) = y \in L'$ ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch zur Wahl von a und b.

Damit ist gezeigt, daß es in L/L' keine zwei linear unabhängigen Elemente gibt, d.h., L/L' ist 1-dimensional, und das Lemma ist bewiesen.

Mit Hilfe dieser Charakterisierung auflösbarer $\mathcal{T}$-Lie-Algebren zeigen wir nun den

SATZ 3. Sei L eine beliebige $\mathcal{T}$-Lie-Algebra. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Der Subidealverband $\mathcal{V}_{SI}(L)$ von L ist distributiv.

(ii) Jede abelsche Subideal-Sektion ist 1-dimensional.

(iii) Der Subidealverband $\mathcal{V}_{SI}(I/J)$ jeder auflösbaren Subideal-Sektion I/J von L ist eine Kette der Länge höchstens 3.

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei H/K eine abelsche Subideal-Sektion von L. Dann ist der Verband der Unteralgebren von H/K distributiv, d.h., H/K ist 1-dimensional.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei I/J eine auflösbare Subideal-Sektion von L. Nach Lemma 4 ist die Kommutator-Algebra $(I/J)'$ von I/J abelsch und daher nach Voraussetzung 1-dimensional. Nach Lemma 5 ist I/J dann 2-dimensional. Damit ist jedes nicht-triviale Ideal K/J von I/J wie auch die entsprechende Faktoralgebra I/K 1-dimensional. Hieraus folgt $K/J = (I/J)'$, d.h., $(I/J)'$ ist das einzige Subideal von I/J, und $\mathcal{V}_{SI}(I/J)$ ist eine Kette der Länge höchstens 3.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir nehmen an, daß $\mathcal{V}_{SI}(L)$ nicht distributiv ist. Nach Lemma 2 gibt es dann paarweise verschiedene Subideale A, B und C in L derart, daß $A \cup B = A \cup C = B \cup C = H$ und $A \cap B = A \cap C = B \cap C = K$ gilt. Weil L eine $\mathcal{T}$-Lie-Algebra ist, sind A, B, C und K Ideale in H. Nun läßt sich wie im Beweis von Lemma 3 zeigen, daß H/K eine abelsche Subideal-Sektion ist. Aber der Verband der Subideale von H/K ist keine Kette.

Also kann es keinen Diamanten in $\mathcal{V}_{SI}(L)$ geben, und $\mathcal{V}_{SI}(L)$ ist distributiv.

Unmittelbar aus (iii) in Satz 3 erhält man das

KOROLLAR. Sei L eine auflösbare $\mathcal{T}$-Lie-Algebra. Der Verband $\mathcal{V}_{SI}(L)$ der Subideale von L ist dann und nur dann distributiv, wenn L entweder 1-dimensional oder 2-dimensional nicht-abelsch ist.

LITERATUR

[1] R. K. AMAYO - I. N. STEWART, *Infinite-dimensional Lie Algebras*, Nordhoff, Leyden, 1974.

[2] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, third edition, Amer. Math. Soc., Vol. XXV, Providence, R.I. (1967).

[3] B. Hartley, *Locally nilpotent ideals of a Lie-Algebra,* Proc. Cambridge Phil. Soc., **63** (1967), pp. 257-272.
[4] B. Kolman, *Semi-modular Lie-Algebras,* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, **29** (1965), pp. 149-163.
[5] D. J. S. Robinson, *Groups in which normality is a transitive relation,* Proc. Cambridge Phil. Soc., **60** (1964), pp. 21-38.
[6] E. Schenkman, *A theory of subinvariant Lie-Algebras,* Amer. J. Math., **73** (1951), pp. 433-474.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 marzo 1984.