RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Abbildungen auf Ringen insbesondere mit Involution

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 69-88

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__69_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 72 (1984)

Abbildungen auf Ringen insbesondere mit Involution.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Seien R und T Ringe (mit Involution *, falls im Kontext erforderlich). Wir betrachten additive Abbildungen zwischen Ringen. Die folgende Zusammenstellung zum Inhalt der Note vermerkt zunächst die vorausgesetzte definierende Abbildungseigenschaft, dann die Problemstellung, dann die schon bearbeiteten Fälle (a) und schließlich die in dieser Note betrachteten Fälle (b).

I) Sei $\sigma\colon R \to T$ mit $(aa^*)^\sigma = a^\sigma a^{*\sigma}$ für alle $a \in R$. Ist σ ein Ringmorphismus? (a) R ist einfach mit char $R \neq 2$ [15]. (b) R ist beliebig.

II) Sei $\delta\colon R \to R$ mit $(aa^*)^\delta = aa^{*\delta} + a^\delta a^*$ für alle $a \in R$. Ist δ eine Derivation? (a, b) wie bei I.

III) Sei $\sigma\colon R \to T$ mit $(aa^*)^\sigma = a^\sigma a^{\sigma^*}$. Ist $*\sigma = \sigma*$ und damit σ vom Typ I? (b) R ist beliebig.

IV) Sei $\delta\colon R \to R$ mit $(aa^*)^\delta = aa^{\delta *} + a^\delta a^*$ für alle $a \in R$. Ist $*\delta = \delta*$ und somit δ vom Typ II? (a, b) wie bei I.

V) Sei $'\colon [R, R] \to T$ mit $[a, b]' = [a', b']$ für alle $a, b \in R$. Gibt es $\alpha\colon R \to T$, so daß α Ringmorphismus oder $-\alpha$ Ringantimorphismus und $\alpha|[R, R] = '$. (a) R und T sind einfach mit Charakteristik $\neq 2, 3$ [3]. (b) R und T sind prim beliebiger Charakteristik.

(*) Indirizzo dell'A.: FB 6, Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstraße 3, D-4300 Essen 1, BRD.

VI) Sei $'\colon [V_R, V_R] \to T$ mit $[a, b]' = [a', b']$ für alle $a, b \in [V_R, V_R]$. Gibt es einen Ringmorphismus $\alpha\colon \overline{[V_R, V_R]} \to T$, so daß $\alpha|[V_R, V_R] = '$? (a) R und T sind prim mit Charakteristik $\neq 2$ und $Z_S = Z$ [12, 13]. (b) Einbeziehung der Charakteristik 2 und des Falles $Z_S \neq Z$.

VII) Sei $'\colon R \to R$ mit $[a, b]' = [a, b'] + [a', b]$ für alle $a, b \in R$. Gibt es $\delta\colon R \to \hat{R}$ und $\varepsilon\colon R \to Z(\hat{T})$, so daß δ Derivation und $' = \delta + \varepsilon$. (a) R ist primitiv mit char $R \neq 2$ [6]. (b) R ist prim mit char $R = 2$.

VIII) Sei $'\colon R \to T$ mit $[a, b]' = [a', b']$ für alle $a, b \in R$. Gibt es $\sigma\colon R \to \check{T}$ und $\tau\colon R \to Z(\check{T})$, so daß σ Ringmorphismus oder $-\sigma$ Ringantimorphismus und $' = \sigma + \tau$. (a) R und T sind prim mit Charakteristik $\neq 2$ [5, 8, 9, 11]. (b) R und T sind prim mit Charakteristik 2.

Bemerkung. Naturgemäß orientieren sich meine Überlegungen an den jeweils zitierten Noten. So basieren die Betrachtungen in (V-VIII) auf der Existenz von 2 bzw. 3 orthogonalen Idempotenten in R. Ist $\hat{R}$ die zentrale Hülle von R [9, 13], so kann man oft durch geeignete Wahl eines Erweiterungskörpers K von $\hat{Z} := Z(\hat{R})$ hinreichend viele Idempotente in $\hat{R} \otimes_{\hat{Z}} K$ erzeugen (z. ß. falls $\hat{R}$ einfacher PI-Ring nicht zu kleiner $\hat{Z}$-Dimension ist) und dann bei erweiterten Abbildungen ähnliche Überlegungen durchführen [9, 13]. Hiermit sind die verbleibenden Problemfälle aufgezeigt. Weiterhin gewinnt man über die Theorie der zentralen Hülle aus unseren Überlegungen entsprechende Folgerungen wie in [9, 13].

A. Definitionen und Notationen.

Sei $S = S(R) := \{a \in R | a^* = a\}$, $K = K(R) := \{a \in R | a^* = -a\}$, $Z = Z(R)$ das Zentrum von R, $Z_K = Z_K(R) := Z \cap K$ und $Z_S = Z_S(R) := Z \cap S$. Für $a, b \in R$ sei $[a, b] := ab - ba$ und $a \circ b := ab + ba$. Für $A, B \subset R$ sei A^+ die von A erzeugte additive Untergruppe von R, ${}^nA := \{a^n | a \in A\}^+$ für $0 < n \in \mathbb{Z}$, $\bar{A}$ der von A erzeugte Unterring von R, $[A, B] := \{[a, b] | a \in A, b \in B\}^+$, $A \circ B := \{a \circ b | a \in A, b \in B\}^+$, $\operatorname{ann}_R A := \{a \in R | aA = 0\}$, $I = I(\bar{A})$ das größte in $\bar{A}$ enthaltene Ideal (*-Ideal) von R, $N(A) := \{aa^* | a \in A\}^+$, $V_A := \{a - a^* | a \in A\}^+$ und $W_A := \{a + a^* | a \in A\}^+$. Mit IUG meinen wir invariante Untergruppen. IUG-Theorie steht für den Inhalt der Noten [1, 4, 16, 17, 18]. In einigen Aussagen werden Konklusionen $\mathcal{K}$ der IUG-Theorie vorausgesetzt. Diese liefert also diejenigen Situationen, in denen auf die Voraussetzung $\mathcal{K}$ verzichtet werden kann.

I. Sei $\sigma: R \to T$ mit $(aa^*)^\sigma = a^\sigma a^{*\sigma}$ für alle $a \in R$. Wir vermerken hinreichende Bedingungen dafür, daß

(*) $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ für alle $a, b \in R$.

1.1 Lemma. Für alle $a, b, c \in R$ gilt:

(1) $(ab + b^*a^*)^\sigma = a^\sigma b^\sigma + b^{*\sigma} a^{*\sigma}$.

(2) $(ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma = -(b^*a^*)^\sigma + b^{*\sigma}a^{*\sigma}$.

(3) $$\big((ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma\big)c^\sigma - c^{*\sigma}\big((ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma\big) + c^\sigma\big((ba)^\sigma - b^\sigma a^\sigma\big) - \\ - \big((ba)^\sigma - b^\sigma a^\sigma\big)c^{*\sigma} = 0\,.$$

Beweis. Ersetzt man in der definierenden Gleichung a durch $a + b^*$, so erhält man (1, 2). Anwendung von (1,2) auf

$$(ab)c + c^*(ab)^* + c(ba) + (ba)^*c^* - (ab + b^*a^*)c - c^*(ab + b^*a^*) - \\ - (cb + b^*c^*)a - a^*(cb + b^*c^*) + b^*(a^*c + c^*a) + (a^*c + c^*a)b = 0$$

liefert (3). □

1.2 Satz. Sei $\bar{K} = R = \bar{S}$, $\bar{R}^\sigma$ halbprim und 2-torsionsfrei. Dann gilt (*).

Beweis. Nach dem Beweis von [2; Theorem 2.1.11, p. 70] gibt es zu $a \in R$ ein $0 < n \in \mathbf{Z}$, so daß $2^n a \in K + K \circ K$. Nun verfolgt man den Beweis von [2; Theorem 4.1.1, pp. 155-157]. □

1.3 Satz. Sei T 2-torsionsfrei, $z \in Z_K(R)$, $z^\sigma \in Z(T)$ und z^σ regulär in T. Dann gilt (*).

Beweis. Seien $u, v \in K$, $s, t \in S$ und $a, b \in R$. Es ist $2R \subset K + S$, $2z^\sigma u^\sigma = s^\sigma \circ u^\sigma = (z \circ u)^\sigma = 2(zu)^\sigma$ und

$$2z^\sigma\big(z^\sigma s^\sigma - (zs)^\sigma\big) = (z^2)^\sigma \circ s^\sigma - z^\sigma \circ (zs)^\sigma = (z^2 \circ s)^\sigma - \big(z \circ (zs)\big)^\sigma = 0\,,$$

also

$(a)\quad z^\sigma a^\sigma = (za)^\sigma.$

Für $a = u$, $b = s$ und $c = z$ gilt $2\big((u \circ s)^\sigma - u^\sigma \circ s^\sigma\big) z^\sigma = 0$ nach 1.1 (3) und $[u, s]^\sigma = [u^\sigma, s^\sigma]$, also

$(b)\quad (us)^\sigma = u^\sigma s^\sigma$ und $(su)^\sigma = s^\sigma u^\sigma$.

Mit (a, b) errechnet man

$(c)\quad \big((u + zv)(s + zt)\big)^\sigma = (u + zv)^\sigma (s + zt)^\sigma.$

Wegen $2za = z(a \pm a^*) + (za) \pm (za)^*$ gilt $2zR \subset (K + zK) \cap (S + zS)$. Mit (a, c) erhält man (*). □

1.4. Lemma Sei char $T = 2$, $Z(R)^\sigma \subset Z(T)$, $1 \in R$, $x \in Z(R)$ mit $x + x^* = 1$ und 1^σ regulär in T. Für alle $a, b \in R$, $s, t \in S$ und $z \in Z$ gilt:

(1) $S = W_R$ und $R^\sigma \subset (S + xS)^\sigma$.

(2) $(a \circ b)^\sigma = a^\sigma \circ b^\sigma$.

(3) $(st)^\sigma = s^\sigma t^\sigma$.

(4) $\big((az)^\sigma + a^\sigma z^\sigma\big) \circ S^\sigma = 0$.

(5) $\big((sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma\big)\big((sz)^\sigma + s^\sigma z^{*\sigma}\big) = 0$, falls $(sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma \in Z(T)$.

Beweis. Wegen $s = xs + (xs)^*$ und $(x - x^*)a = x(a + a^*) - (xa^* + x^*a)$ gilt (1). Für $c = x$ in 1.1 (3) erhält man (2). Nach (2) und 1.1 (2) gilt $(s(xt))^\sigma + s^\sigma (xt)^\sigma = ((x^*t)s)^\sigma + (x^*t)^\sigma s^\sigma = (s(x^*t))^\sigma + s^\sigma (x^*t)^\sigma$, also (3). Für $b = z$ in 1.1 (3) gilt $\big((az)^\sigma + a^\sigma z^\sigma\big) \circ (c + c^*)^\sigma = 0$, also (4) wegen (1). (5) Nach 1.1 (2) und (3) ist $(sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma = (sz^*)^\sigma + s^\sigma z^{*\sigma}$ und $(sz^*)^\sigma (sz)^\sigma = (s^2 zz^*)^\sigma = s^\sigma s^\sigma z^\sigma z^{*\sigma}$, also $\big((sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma\big)\big((sz)^\sigma + s^\sigma z^{*\sigma}\big) = s^\sigma z^{*\sigma}\big((sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma\big) + \big((sz^*)^\sigma + s^\sigma z^{*\sigma}\big)(sz)^\sigma = 0$. □

1.5. Satz. Sei T prim mit char $T = 2$, $Z(R)^\sigma \subset Z(T)$, $1 \in R$, $x \in Z(R)$ mit $x + x^* = 1$ und $1^\sigma \neq 0$ und $I\big(\overline{(S^2)^\sigma}\big) \neq 0$. Dann gilt (*).

BEWEIS. Seien $a \in R$, $u, v, s, t \in S$ und $z \in Z$. Nach 1.4 (3, 4, 5) ist $((sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma) \circ \overline{(S^\circ)^\sigma} = 0$, also $(sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma \in Z(T)$, somit

(a) $(sz)^\sigma = s^\sigma z^\sigma$ oder $(sz)^\sigma = s^\sigma z^{*\sigma}$.

Für $S' := \{s \in S | (sx)^\sigma = s^\sigma x^\sigma\}$ und $S'' := \{s \in S | (sx)^\sigma = s^\sigma x^{*\sigma}\}$ gilt $S = S' \cup S''$. Wegen $0 \neq 1^\sigma = 1^\sigma 1^\sigma = 1^\sigma (x + x^*)^\sigma = 1^\sigma ((1x)^\sigma + 1^\sigma x^{*\sigma})$ ist $1 \in S' \setminus S''$, also $s \notin S''$ oder $1 + s \notin S''$, somit $s \in S'$, demnach $S' = S$. Mit $s^\sigma = 0$ ist $(sz)^\sigma = 0$ wegen (a), also $(sz)^\sigma = s^\sigma z^\sigma$. Sei $s^\sigma \neq 0$. Wegen $S' = S$ und (a) ist $(sz)^\sigma = s^\sigma z^\sigma$ oder $(s(z + x))^\sigma = s^\sigma (z + x)^\sigma$, also

(b) $(sz)^\sigma = s^\sigma z^\sigma$.

Wegen 1.4 (1, 3) und (b) ist

$$x^\sigma x^\sigma + x^\sigma = x^\sigma (x + 1)^\sigma = x^\sigma (x^*)^\sigma = (xx^*)^\sigma = (x(x + 1))^\sigma = (x^2)^\sigma + x^\sigma,$$

also $(x^2)^\sigma = (x^\sigma)^2$, somit $((s + tx)x)^\sigma = (s + tx)^\sigma x^\sigma$, demnach $(ax)^\sigma = a^\sigma x^\sigma$, schließlich $((s + tx)(u + vx))^\sigma = (s + tx)^\sigma (u + vx)^\sigma$. Wegen 1.4 (1) gilt (*). □

BEMERKUNG ZU 1.5. Ist $R^\sigma \circ T \subset R^\sigma$ so erhält man mit IUG-Voraussetzungen zu 1.4, daß $I(\overline{(S^2)^\sigma}) \neq 0$. Spezialfall: $R^\sigma = T$.

II. Sei $T := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$, $\delta: R \to R$ mit $(aa^*)^\delta = aa^{*\delta} + a^\delta a^*$ für alle $a \in R$ und $\sigma: R \to T$, $a \mapsto \begin{pmatrix} a & a^\delta \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Wir vermerken hinreichende Bedingungen dafür, daß

(*) $(ab)^\delta = ab^\delta + a^\delta b$ für alle $a, b \in R$.

Gleichwertig zu (*) ist $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ für alle $a, b \in R$.

2.1 SATZ. Sei R 2-torsionsfrei, $\bar{K} = R = \bar{S}$ und $\operatorname{ann}_R [R, R] = 0$. Dann gilt (*).

BEWEIS. Man verfolgt die Beweise von [1; Theorem 4.1.1, 4.1.2, pp. 155-158] und 1.2. □

2.2 SATZ. Sei R 2-torsionsfrei, $z \in Z_K$ regulär in R und $z^\delta \in Z$. Dann gilt (*).

Beweis. Man verwendet 1.3 und beachtet, daß $z^\sigma \in Z(T)$ und z^σ regulär in T ist. □

2.3 Satz. Sei R *-prim mit char $R = 2$, $Z(R)^\delta \subset Z(R)$, $1 \in R$, $x \in Z(R)$ mit $x + x^* = 1$ und $I(\bar{S}) \neq 0$. Dann gilt (*).

Beweis. Zunächst ist $Z(R)^\sigma \subset Z(T)$ und 1^σ regulär in T. Sei $s \in S$, $z \in Z$, $a := (sz)^\sigma + s^\sigma z^\sigma$ und $b := (sz)^\delta + sz^\delta + s^\delta z$. Dann ist $a = be_{12}$. Nach 1.4 (3, 4, 5) ist $b \circ S = 0$, also $b \in Z$, somit $a \in Ze_{12} \subset Z(T)$, demnach $bS(z + z^*) = 0$, schließlich $a = 0$. Nun verfolgt man den Beweis von 1.5. □

III. Sei $\sigma\colon R \to T$ mit $(aa^*)^\sigma = a^\sigma a^{\sigma *}$ für alle $a \in R$. Wir vermerken hinreichende Bedingungen dafür, daß

(*) $\quad a^{*\sigma} = a^{\sigma *}$.

Sei $X := \{s \in S(R) | s^\sigma \in S(T)\}$ und $Y := \{a \in S(T) | s^\sigma a s^\sigma = 0$ für alle $s \in X\}$.

3.1 Lemma. Für alle $a, b \in R$ und $s, t \in X$ gilt:

(1) $\quad (ab^* + ba^*)^\sigma = a^\sigma b^{\sigma *} + b^\sigma a^{\sigma *}$.

(2) $\quad N(R)^\sigma = N(R^\sigma)$ und $(W_{R^2})^\sigma \subset W_{T^2}$, insbesondere $N(R) + W_{R^2} \subset X$.

(3) $\quad (s(a + a^*)s)^\sigma = s^\sigma(a^\sigma + a^{\sigma *})s^\sigma$.

(4) $\quad Y \circ X^\sigma \subset Y$.

Beweis. Ersetzt man in der definierenden Gleichung a durch $a + b$, so erhält man (1). Mit (1) gilt (2).

(3) Wegen (1, 2) ist $(s(a + a^*)s)^\sigma = ((as + sa^*)\circ s)^\sigma - (as^2 + s^2a^*)^\sigma =$

$$= (a^\sigma s^\sigma + s^\sigma a^{\sigma *})\circ s^\sigma - a^\sigma (s^\sigma)^2 - (s^\sigma)^2 a^{\sigma *} = s^\sigma(a^\sigma + a^{\sigma *})s^\sigma.$$

(4) Sei $c \in Y$. Wegen (1, 2) ist $0 = s^\sigma c(s \circ t)^\sigma + (s \circ t)^\sigma c s^\sigma = s^\sigma c(s^\sigma \circ t^\sigma) +$

$$+ (s^\sigma \circ t^\sigma) c s^\sigma = s^\sigma (c \circ t^\sigma) s^\sigma. \quad \square$$

3.2 SATZ. Sei $1 \in R$, $1^\sigma \in Z(T)$ und 1^σ regulär in T. Dann gilt (*). Spezialfall: $1^\sigma = 1 \in T$.

BEWEIS. Wegen $1 \in N(R)$ ist $1^\sigma 1^\sigma = 1^\sigma \in Z_S(T)$, also $a^\sigma + a^{*\sigma} = (a1^* + 1 \cdot a^*)^\sigma = a^\sigma 1^{\sigma *} + 1^\sigma a^{\sigma *} = 1^\sigma(a^\sigma + a^{\sigma *})$, somit $1^\sigma(a^{*\sigma} - a^{\sigma *}) = 0$, demnach (*). □

3.3 SATZ. Sei char $R = 2$, $1 \in R$, T^*-prim und $I := I(\overline{X^\sigma}) \neq 0$. Dann gilt (*).

BEWEIS. Sei $s \in X$. Wegen $1 \in N(R)$ ist $0 = (s \circ 1)^\sigma = s^\sigma \circ 1^\sigma$ und $1^\sigma = 1^\sigma 1^\sigma$, also $[s^\sigma, 1^\sigma] = 0$, somit $1^\sigma \in Z(T)$. Mit 3.2 erhält man (*). □

BEMERKUNG ZU 3.3. Ist $N(R)^\sigma$ oder $(W_{R^2})^\sigma$ IUG von T, so erhält man mit IUG-Voraussetzungen, daß $I(\overline{X^\sigma}) \neq 0$. Spezialfall: σ ist surjectiv. Dann ist nämlich $N(R)^\sigma = N(T)$ und $(W_{R^2})^\sigma = W_{T^2}$.

3.4 LEMMA. Sei T *-prim, char $T \neq 2$, $S_4(T) \neq 0$ und $(W_{R^2})^\sigma \circ W_T \subset (W_{R^2})^\sigma \neq 0$ (etwa σ surjektiv). Dann gilt $K(R)^\sigma \subset K(T)$.

BEWEIS. Wir führen die Annahme $K(R)^\sigma \not\subset K(T)$ zum Widerspruch. Nach 3.1 (3) ist $Y \neq 0$. Nach [17; Theorem 20, p. 351] und 3.1 (2, 4) gibt es ein *-Ideal $I \neq 0$ von T, so daß $W_I \subset Y$.

Wegen $2I \subset V_I + W_I$ und $2\,V_I S(T)\, V_I \subset W_I$ gilt für alle $s \in X$, daß $2s^\sigma 2I s^\sigma 2I s^\sigma \subset 2s^\sigma V_I s^\sigma V_I s^\sigma = 0$, Widerspruch. □

3.5 LEMMA. Sei T *-prim mit $S_8(T) \neq 0$ oder $\big(S_4(T) \neq 0$ und $Z_S(T) \neq Z(T)\big)$, $A \in \{N(R)^\sigma, (W_{R^2})^\sigma\}$, $[A, V_T] \subset A \neq 0$ (etwa σ surjektiv). Dann gilt $K(R)^\sigma \subset K(T)$.

BEWEIS. O.E. sei $Y \neq 0$, also $A \not\subset Z_S(T)$. Nach der IUG-Theorie gibt es ein *-Ideal $I \neq 0$ von T, so daß $[V_I, W_I] \subset A$ und $I \subset \bar{A}$. Für $Y \subset Z(T)$ ist ${}^2A = 0$, also ${}^2[V_I, W_I] = 0$, Widerspruch nach der IUG-Theorie. Sei nun $Y \not\subset Z(T)$. Nach der IUG-Theorie und 3.1 (2, 4) gibt es ein *-Ideal J von T, so daß $0 \neq J \subset I$ und $[V_J, W_J] \subset Y$, also ${}^3[V_J, W_J] = 0$, Widerspruch nach der IUG-Theorie. □

3.6 LEMMA. Sei ($1 \in R$ oder $\bar{K} = R$) und T 2-torsionsfrei. Dann gilt $S(R)^\sigma \subset S(T)$.

BEWEIS. Sei $s \in S$. Im 1. Fall ist $2s^\sigma = (s \circ 1)^\sigma \in (W_{R^2})^\sigma \subset X^\sigma$, also

$s^\sigma \in S(T)$. Im 2. Fall gibt es nach dem Beweis von [2; Theorem 2.1.11, p. 70] ein $0 < n \in \mathbb{Z}$, so daß $2^n s \in K \circ K \subset (W_{R^2})^\sigma \subset X^\sigma$, also $S^\sigma \in S(T)$. □

Wegen $2R \subset K + S$ gilt

3.7 SATZ. Unter den Voraussetzungen (3.4 oder 3.5) und 3.6 gilt (*).

IV. Sei $T := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ mit Involution $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ 0 & a^* \end{pmatrix}$, $\delta: R \to R$ mit $(aa^*)^\delta = aa^{\delta *} + a^\delta a^*$ für alle $a \in R$ und $\sigma: R \to T$, $a \to \begin{pmatrix} a & b^\delta \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Wir vermerken hinreichende Bedingungen dafür, daß

(*) $a^{*\delta} = a^{\delta *}$ für alle $a \in R$.

Gleichwertig zu (*) ist $a^{*\sigma} = a^{\sigma *}$ für alle $a \in R$.

4.1 SATZ. Sei $1 \in R$ und $1^\delta \in Z(R)$. Dann gilt (*).

BEWEIS. Es ist $1^\sigma \in Z(T)$ und 1^σ regulär in T. Mit 3.2 erhält man (*). □

4.2 SATZ. Sei R *-prim, char $R = 2$, $1 \in R$ und $I := I(X) \neq 0$. Dann gilt (*).

BEWEIS. Wie im Beweis von 3.3 ist $[X^\sigma, 1^\sigma] = 0$, also $[X, 1^\delta] = 0$, somit $1^\delta \in Z$. Mit 4.1 erhält man (*). □

4.3 LEMMA. Sei R *-prim, char $R \neq 2$ und $S_4(R) \neq 0$. Dann gilt $K^\delta \subset K$.

BEWEIS. Sei $\tilde{Y} := \{a \in S(R) | sas = 0$ für alle $s \in X\}$. Nach 3.1 (3) ist $W_{K^\delta} \subset \tilde{Y}$ und analog 3.1 (4) ist $\tilde{Y} \circ X \subset \tilde{Y}$. Nun verfolgt man den Beweis von 3.4. □

4.4 LEMMA. Sei R *-prim, char $R = 2$, $S_8(R) \neq 0$ oder ($Z_S \neq Z$ und $S_4(R) \neq 0$). Dann gilt $S^\delta \subset S$.

BEWEIS. Wie im Beweis von 4.3 ist $W_{S^\delta} \subset \tilde{Y}$ und $\tilde{Y} \circ X \subset \tilde{Y}$. Nun verfolgt man den Beweis von 3.5. □

Nach 3.6 gilt

4.5 LEMMA. Sei ($1 \in R$ oder $\bar{K} = R$) und R 2-torsionsfrei. Dann gilt $S^\delta \subset S$.

Wegen $2R \subset K + S$ gilt.

4.6 SATZ. Unter den Voraussetzungen 4.3 und 4.5 gilt (*).

B. Definitionen, Notationen und Lemmata.

Unsere Überlegungen stützen sich wahlweise auf folgende Voraussetzungen, Notationen und Bemerkungen, die unter (A)-(D) zusammengestellt sind.

(A) Es gibt $e_i \in R \setminus \{0, 1\}$ mit $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Wir setzen formal $e_3 := 1 - e_1 - e_2$ und notieren $R_{ij} := e_i R e_j$, $R_i := R_{ii}$ und ${}_kR := \Big(\underset{1\leqslant i \neq j \leqslant 3}{+} R_{ij}\Big) + \Big(\underset{1\leqslant i \neq k \leqslant 3}{+} R_i\Big)$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$.

(B) Sei (A), R mit $*$ und $e_i \in S(R)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$. Wir notieren

$$K_i := K(R_i)\,, \quad V_{ij} := V_{R_{ij}}\,, \quad V_i := V_{ii}\,,$$

$$S_i := S(R_i) \quad W_{ij} := W_{R_{ij}}\,, \quad W_i := W_{ii}\,, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3\,.$$

Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ sei L_{ijk} bzw. J_{ijk} der von $V_{ij} \cup V_{ik}$ bzw. $W_{ij} \cup W_{jk}$ erzeugte Lie-bzw. Jordanunterring von R. Für additive Untergruppen A_i von R_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ sei R_A der von A_i, R_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ erzeugte Unterring, L_A der von A_i, V_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ erzeugte Lieunterring und J_A der von A_i, W_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ erzeugte Jordanunterring von R.

Bezogen auf die jeweils betrachtete Abbildung' notieren wir die Voraussetzungen $\operatorname{ann}_T L'_{ijk} = 0$, $\operatorname{ann}_T J'_{ijk} = 0$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ bzw. $\operatorname{ann}_R ({}_kR) = 0$ für $1 \leqslant k \leqslant 3$ mit (L), (J) bzw. (R).

(C) Sei (A) und $R_{ij} R_{ji} = R_i$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$.

(D) Sei T prim, $\hat{Z}$ das erweiterte Zentroid und $\hat{T} := \hat{Z} + T\hat{Z}$ die zentrale Hülle von T. Dann ist $\hat{Z} = Z(\hat{T})$ Körper, $\hat{T}_l \hat{T}_r \simeq \hat{T}^{op} \otimes_{\hat{Z}} \hat{T}$ und $Z(\hat{R}_i) = \hat{Z}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant 2$, falls (A) [9; Theorem 5, Lemma 10, pp. 443, 446].

Für einen Lieunterring L von R sei ${}_1L := L$ und ${}_{i+1}L := [{}_iL, L]$, $0 < i \in \mathbb{Z}$.

B.1 LEMMA. Sei (D), L_i Lieunterringe von T mit ${}_4L_i \neq 0$, $[L_i, L_j] = 0$ und $\Big[\big[[T, L_1], L_2\big], L_3\Big] = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$. Dann gilt ${}_5L_i \cdot {}_5L_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$.

BEWEIS. Seien $a_i \in L_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Dann gilt

$$(*)\quad 1 \otimes a_1a_2a_3 - a_3 \otimes a_1a_2 - a_2 \otimes a_1a_3 - a_1 \otimes a_2a_3 + a_1a_2 \otimes a_3 + \\ + a_1a_3 \otimes a_2 + a_2a_3 \otimes a_1 - a_1a_2a_3 \otimes 1 = 0\,.$$

Also ist $X := \{1, a_i, a_ja_k, a_1a_2a_3 | 1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j < k \leqslant 3\}$ $\hat{Z}$-abhängig. Wir führen zunächst die Annahme $\prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} [a_i, L_i] \neq 0$ zum Widerspruch. Wegen $\Big[\big[[r, L_1], L_2\big], L_3\Big] = 0$ für alle $r \in X_1 := X \setminus \{a_1a_2a_3\}$ und $\Big[\big[[a_1a_2a_3, L_1], L_2\big], L_3\Big] = \prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} [a_i, L_i] \neq 0$ ist X_1 $\hat{Z}$-abhängig. Wegen $\big[[r, L_2], L_3\big] = 0$ für alle $r \in X_2 := X_1 \setminus \{a_2a_3\}$ und $\big[[a_2a_3, L_2], L_3\big] = \prod_{2 \leqslant i \leqslant 3} [a_i, L_i] \neq 0$ ist X_2 $\hat{Z}$-abhängig. Schließlich erhält man den Widerspruch, daß $\{1\}$ $\hat{Z}$-abhängig ist. Insgesamt ist $\prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} {}_2L_i = 0$. Angenommen es gibt $b_i \in {}_2L_i$ und $u_i, v_i \in L_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, so daß für $c_i := [b_i, u_i]$ und $d_i := [c_i, v_i]$ gilt: $[d_1, L_1][d_2, L_2] \neq 0$. Wähle $b_3 \in {}_2L_3$ und $u_3, v_3 \in L_3$, so daß für $c_3 := [b_3, u_3]$ und $d_3 := [c_3, v_3]$ gilt: $d_3 \neq 0$. Wegen (*) ist $\{b_i, b_jb_k | 1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j < k \leqslant 3\}$ $\hat{Z}$-abhängig. Wie oben erhält man mit einem Widerspruchsbeweis, daß $[b_1, L_1][b_2, L_2] = 0$ oder

$$(\square)\quad [b_1, L_1][b_3, L_3] = 0 \text{ oder } [b_2, L_2][b_3, L_3] = 0,$$

also $(\square)$. Im 1. Fall ist wegen (*) $\{c_1, c_3, c_1c_2, c_2c_3\}$ $\hat{Z}$-abhängig, also wie oben $d_2d_3 = 0$. Im 2. Fall verfährt man analog. Insgesamt ist $d_1d_3 = 0 = d_2d_3$, also wegen (*) $\{d_3, d_1d_2\}$ $\hat{Z}$-abhängig. Wie oben erhält man einen Widerspruch. Insgesamt ist ${}_5L_1 \cdot {}_5L_2 = 0$. Aus Gründen der Symmetrie gilt die Behauptung. $\square$

B.2 LEMMA. Sei R einfacher PI-Ring und $a \in R \setminus Z$. Dann gilt $[R, R] + [R, R]a = R$.

BEWEIS. Sei $\bar{Z}$ die algebraische Hülle von Z. Nach Übergang zu $R \otimes_Z \bar{Z}$ sei o.E. $R = M_n(Z)$. Für $b \in R \setminus [R, R]$ gilt $R = [R, R] + bZ$. Es reicht deshalb die Annahme $[R, R]a \subset [R, R]$ zum Widerspruch zu führen. Mit $e_{ij}a$, $(e_{ii} - e_{jj})a \in [R, R]$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ ist $a \in Z$, Widerspruch. $\square$

B.3 Lemma. Sei (D), $a_i \in T$, $[a_i, a_j] = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, $X := := \left\{a \in \hat{T} \mid \left[\left[[a, a_1], a_2\right], a_3\right] = 0\right\}$ und (a) oder (b). Dann gilt $\hat{T} \subset X$.

(a) Sei ($\hat{T}$ nicht streng primitiv [14; p. 281] oder T PI-Ring) und $[I, I] \subset X$ für ein Ideal $I \neq 0$ von T.

(b) Sei ($\hat{T}$ nicht streng primitiv oder (T PI-Ring und $Z_S \neq Z$)) und $[V_I, V_I] \subset X$ für ein *-Ideal $I \neq 0$ von T.

Beweis. Nach [14; Theorem 7.6.15, p. 285] und [10; Theorem 3.9, p. 510] sei o.E. R PI-Ring.

(a) Wegen $[\hat{T}, \hat{T}] \subset X$ und $[\hat{T}, \hat{T}]a_1 \subset X$ gilt nach B.2 die Behauptung.

(b) Für $z \in Z \setminus Z_S$ und $a \in I$ gilt

$$(z - z^*)a = za - (za)^* + z^*(a^* - a) \in V_I + z^* V_I .$$

Also ist $[\mathrm{I}, \mathrm{I}] \subset X$. Nun folgt man (a). □

B.4 Lemma. Sei T prim, L Lieideal von T mit $[L, L] \neq 0$, $a, b, c \in T$ und $aLb = 0 = cL$. Dann gilt ($a = 0$ oder $b = 0$) und $c = 0$.

Beweis. Nach der IUG-Theorie ist $I := I(\bar{L}) \neq 0$. Es gilt $a\bar{L}aLb = 0$ und mit $a\bar{L}aL^i b = 0$ ist

$$a\bar{L}aL^{i+1}b \subset a\bar{L}aL^i b + a[\bar{L}aL^i, L]b = 0 , \quad 0 < i \in \mathbb{Z} .$$

Also gilt $aIaIb = 0$, somit $a = 0$ oder $b = 0$. Mit $cL = 0$ ist $cI = 0$, also $c = 0$. □

Die folgenden Aussagen gelten auch bei analoger Indexwahl. Nur zur Entlastung der Darstellung sind die Indizes speziell gewählt.

B.5 Lemma. Sei (A) und $A \subset R_1$ mit $e_1 \in \bar{A}$. Dann gilt $R_{12} = [A, R_{12}]$.

Beweis. Beachte, daß für $a \in R_1$ und $b \in R_{12}$ gilt: $ab = [a, b]$. □

B.6 Lemma. Sei (C). Dann gilt $R_{13}R_{32} = R_{12}$.

Beweis. Es ist $R_{12} \subset R_1 R_{12} = R_{13}R_{31}R_{12} \subset R_{13}R_{32} \subset R_{12}$. □

B.7 Lemma. Sei (C) Dann gilt

$$[R, R] = \underset{1 \leqslant i \neq j \leqslant 3}{+} R_{ij} + [R_{ij}, R_{ji}] =: X\,.$$

Beweis. Nach $B.5$ ist $R_{12} = [R_1, R_{12}] \subset [R, R]$. Also gilt « $\supset$ ». Wir zeigen « $\subset$ »: Für $a_{ij} \in R_{ij}$ gilt

$$[a_{12} a_{21}, a_{11}] = [a_{12}, a_{21} a_{11}] - [a_{11} a_{12}, a_{21}] \in X\,. \qquad \square$$

B.8 Lemma. Sei (A) und R einfach. Dann gilt (C).

Beweis. $0 \neq \underset{1 \leqslant i, j \leqslant 3}{+} R_{i2} R_{2j}$ ist Ideal von R, also $R_{12} R_{21} = R_{11}$. $\square$

B.9 Lemma. Sei (B). Dann ist $[L_{123}, V_R] \subset L_{123}$ und $J_{123} \circ W_R \subset J_{123}$.

Beweis. Man geht vor wie im Beweis von [13; Lemma 2.4, pp. 937, 938]. $\square$

B.10 Lemma Sei (B) und $A \subset K_1$ *bzw.* $A \subset S_1$ mit $e_1 \in \bar{A}$. Dann gilt $V_{12} = [A, V_{12}]$ bzw. $W_{12} = A \circ W_{12}$.

Beweis. Für $a \in K_1$ und $b \in R_{12}$ ist $ab - (ab)^* = [a, b - b^*]$. Für $a \in S_1$ und $b \in R_{12}$ ist $ab + (ab)^* = a \circ (b + b^*)$. $\square$

Nach B.10 gilt

B.11 Lemma. Sei (B) und $e_i \in \bar{V}_i, 1 \leqslant i \leqslant 2$. Dann gilt $L_{123} \subset [V_R, V_R]$.

B.12 Lemma. Sei (B) und R einfach. Dann gilt $L_{123} = [V_R, V_R]$.

Beweis. Man geht vor wie in den Beweisen von [12; Lemmas 1, 2, pp. 410, 411]. $\square$

V. Sei (C) und $' : [R, R] \to T$ injektiver Liemorphismus. Wegen (A) ist $\operatorname{ann}_R R = 0$.

5.1. Lemma. Sei $A_i \subset R_i \cap [R, R]$ mit $e_i \in \bar{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ und $A_1' A_2' = 0$. Dann gilt $R_{12}' R_{13}' = 0 = R_{12}' R_{12}'$.

Beweis. Beachte B.7. Wegen $[R_{12}', R_{13}'] = [R_{13}', A_2'] = [R_{12}', R_{32}'] = 0$, B.5 und B.6 ist $R_{13}' A_2' = [A_1', R_{13}'] A_2' = 0$, also $R_{12}' R_{13}' = [R_{12}', A_2'] R_{13}' = 0$, somit $R_{12}' R_{12}' = R_{12}' (R_{13} R_{32})' = R_{12}' [R_{13}', R_{32}'] = 0$.

5.2 Satz. Sei (D) und $\hat{T}$ nicht streng primitiv oder T PI-Ring, $L_i := R_i \cap [R, R]$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $e_i \in {}_5\bar{L}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, ${}_4L_3 \neq 0$, $[R, R]'$ Lieideal von T und $[[R, R], [R, R]] \neq 0$. Dann gilt:

(*) Es gibt $\alpha: R \to T$, so daß α injektiv, α Ringmorphismus oder $-\alpha$ Ringantimorphismus und $\alpha|[R, R] = {}'$.

Beweis. Wegen $\left[\left[[[R, R]', L_1'], L_2'\right], L_3'\right] = 0$ und $B.$ $3(a)$ ist $\left[\left[[T, L_1'], L_2'\right], L_3'\right] = 0$. Nach B.1 gilt ${}_5L_i' \cdot {}_5L_j' = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$. Verfolgt man mit B.4, B.6, B.7 und 5.1 den Beweis von [3; pp. 388-395], so bleibt zu zeigen, daß α injektiv ist. Wir verwenden B.7. Seien $a_{ij} \in R_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant 3$ und $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^\alpha = 0$. Dann ist $a_{kl}^\alpha = \sum\limits_{i,j} e_k^\alpha a_{ij}^\alpha e_l^\alpha = 0$ für $1 \leqslant k, l \leqslant 3$, also $a_{kl} = 0$ und $(a_{kk} R_{kl})^\alpha = a_{kk}^\alpha R_{kl}^\alpha = 0$ für $1 \leqslant k \neq l \leqslant 3$, somit $r_{kk} = 0$ für $1 \leqslant k \leqslant 3$. Ist $-\alpha$ Ringantimorphismus, so schließt man analog. □

Bemerkung zu 5.2. Für $[R, R]' = [T, T]$ ist $[R, R]'$ Lieideal von T. Ist R halbprim mit $[R, R] \neq 0$, so gilt $[[R, R], [R, R]] \neq 0$. Ist R_i einfach, $1 \leqslant i \leqslant 2$, R_3 halbprim, $S_4(R_i) \neq 0$ oder $\big(\text{char } R_i \neq 2$ und $S_2(R_i) \neq 0\big)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, so ist

(*) $e_i \in R_i = {}_5\bar{L}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ und ${}_4L_3 \neq 0$.

Ist R primitiv mit minimalem Rechtsideal und zugeordnetem Schiefkörper D, $R \not\simeq M_n(D)$ für alle $0 < n \in \mathbb{Z}$ oder $\big(R \simeq M_n(D)$ mit $n \geqslant 3$ und $(\dim_Z R \geqslant 12^2$ oder $(\text{char } R \neq 2$ und $\dim_Z R \geqslant 6^2))\big)$, so kann man e_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$ so wählen, daß (*) gilt.

5.3 Satz. Sei R primitiv mit minimalem Rechtsideal, zugehörigem Schiefkörper D, char $R = p \neq 0$, $n := \max\{8, 2p\}$, $\dim_D R > n^2$, T prim und ${}': [R, R] \to [T, T]$ Lieisomorphismus. Dann gilt (*) aus 5.2.

Beweis. R besitzt einen Unterring $U \simeq M_n(D)$. Sei $m := \max\{4, p\}$, $e_1 := \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} e_{ii}$, $e_2 := \sum\limits_{m < i \leqslant 2m} e_{ii} \in [U, U]$ und formal $e_3 := 1 - e_1 - e_2$. Sei weiterhin $A_i := [R_i, R_i]$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Nach B.5 ist $B := \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 3} R_{ij} \subset [R, R]$ wegen $e_i \in R_i = \bar{A}_i$ $1 \leqslant i \leqslant 2$. Zunächst ist $A_1' A_2' = [A_1' A_2', A_i'] \subset [T, T]$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ und genauer $A_1' A_2' \subset B'$. Wegen $[A_1' A_2', e_i'] = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ ist $A_1' A_2' = 0$. Nun verfolgt man den Beweis von 5.2.

VI. Sei (B).

6.1 LEMMA. Seien A_i additive Untergruppen von K_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $e_i \in \bar{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $' : L_A \to T$ Liemorphismus, $A'_i A'_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ und (L). Dann gilt

(*) Es gibt einen Ringmorphismus $\alpha : R_A \to T$, sodaß $\alpha | L_A = {}'$. Mit $'$ ist α injectiv, falls (R) und $L'_A \subset K(T)$.

Die Aussage bleibt gültig, wenn man « K, L, Lie- » durch « S, J, Jordan- » ersetzt.

BEWEIS. Mit B. 10 verfolgt man den Beweis in [13; pp. 969-976].

6.2 SATZ. Sei (D), $\hat{T}$ nicht streng primitiv oder (T PI-Ring und $Z_S(T) \neq Z(T)$), $' : [V_R, V_R] \to T$ Liemorphismus, $0 \neq I$ *-Ideal von T mit $[V_I, V_I] \subset [V_R, V_R]'$, $L_i := R_i \cap [V_R, V_R]$, $A_i := {}_5L_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $e_i \in {}_5\bar{L}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, ${}_4L'_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ und (L). Dann gilt (*).

BEWEIS. Wegen $\left[[[[V_R, V_R]', L'_1], L'_2], L'_3\right] = 0$ und $B.3(b)$ ist $\left[[[T, L'_1], L'_2], L'_3\right] = 0$. Nach B.1 ist ${}_5L'_i \cdot {}_5L'_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$. Nach 6.1 gilt die Behauptung.

BEMERKUNG ZU 6.2. Wende die IUG-Theorie an! Sei $S_4(T) \neq 0$, $[V_T, V_T] \subset [V_R, V_R]' \subset K(T)$ und $L'_{ijk} \neq 0$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Dann gibt es ein *-Ideal $I \neq 0$ von T, so daß $[V_I, V_I] \subset [V_R, V_R]'$ und gilt (L). Ist R_i einfach mit $S_4(R_i) \neq 0$ und $'$ injektiv, so gilt $e_i \in R_i = {}_5\bar{L}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ und ${}_4L'_3 \neq 0$. Ist R *-prim, so gilt (R).

6.3. SATZ. Sei R streng primitiv, der zugehörige Schiefkörper F ein algebraisch abgeschlossener Körper, $R = \hat{R}$, char $R = 2$, $Z_S(R) = Z(R)$, $\dim_Z R \geqslant 20^2$ und $' : W_R \circ W_R \to W_T \circ W_T$ surjektiver Liemorphismus. Dann gilt (B) mit $e_i \in W_R \circ W_R$ und rang $(e_i) = 8$, $1 \leqslant i \leqslant 2$. Sei $A_i := W_i \circ W_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $B_3 := W_3 \circ W_3$, $A_3 := B_3 \circ B_3$ und (L). Dann gilt (*). Ist $\dim_F R < \infty$, T *-prim und $S_4(T) \neq 0$, so gilt $L_{ijk} = W_R \circ W_R$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, also $R_A = R$ und $L_A = W_R \circ W_R$ und (L).

BEWEIS. R besitzt einen *-Unterring $(U, *) \simeq (M_{20}(F), i)$ mit $i \in \{s, t\}$. Für $0 < u < v \in \mathbf{Z}$ sei $d_{u,v} := \sum\limits_{u \leqslant i \neq j \leqslant v} e_{ij}$. Man wählt $e_1 := d_{1,9}$

und $e_2 := d_{11,19}$ bzw. $e_1 := d_{1,5} + d_{11,15}$ und $e_2 := d_{6,10} + d_{16,20}$: (Zu s vgl. [14; p. 140]).

Zunächst ist $A_i \circ A_i = A_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$. Also gilt $A_1' A_2' = A_1' A_2' \circ A_i' \subset (W_R \circ W_R)'$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, genauer $A_1' A_2' \subset \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant 3} A_{jk}'$. Wegen $e_i \in W_R \circ W_R$ und $A_1' A_2' \circ e_i' = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ ist $A_1' A_2' = 0$. Weiterhin ist $A_1' A_3' = A_1' A_3' \circ A_1' \subset (W_R \circ W_R)'$, genauer $A_1' A_3' \subset A_1' + \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant 3} A_{jk}'$.

Wegen $e_i \in W_R \circ W_R$ und $A_1' A_3' \circ e_i' = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ ist $A_1' A_3' \subset A_1'$, also $A_1'(A_3 \circ A_3)' = 0$ und analog $A_2'(A_3 \circ A_3)' = 0$. Mit 6.1 und der IUG-Theorie erhält man die Behauptung. □

6.4 Satz. Sei $1 \in R$, $'\colon S(R) \to T$ Jordanmorphismus [2; Definition, p. 165] und (J). Dann gibt es einen Ringmorphismus $\alpha\colon \overline{S(R)} \to T$ mit $\alpha | S(R) = {}'$. Mit $'$ ist α injektiv, falls $S(R)' \subset S(T)$ und (R).

Beweis. Nach [2; Lemma 4.2.2, p. 166] ist $S_i' S_j' = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$. Mit 6.1 erhält man die Behauptung. □

IUG-theoretisch kann man zu 6.4 entsprechendes bemerken wie zu 6.2.

6.5 Korollar. Sei $1 \in R$, $\delta\colon S(R) \to R$ Jordanderivation [2; Definition, p. 157] und $\mathrm{ann}_R J_{ijk} = 0$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Dann gibt es eine Derivation $\varepsilon\colon \overline{S(R)} \to R$ mit $\varepsilon | S(R) = \delta$.

Beweis. Man verwendet 6.4 and verfährt analog zum Beweis von [2; Corollary 2, pp. 175, 176].

VII. Sei (D) bezogen auf R, char $R = 2$, $S_4(R) \neq 0$, $'\colon R \to R$ mit $[a, b]' = [a, b'] + [a', b]$ für alle $a, b \in R$, $e_1 = e \in R \setminus \{0, 1\}$ mit $e^2 = e$ und formal $e_2 := 1 - e$. Wir notieren analog (A).

7.1 Lemma. Es ist $e' + e \circ e' \in Z$.

Beweis. Für $a \in R$ gilt $(a \circ e) \circ e = a \circ e$, also $(a \circ e) \circ e' + (a \circ e') \circ e + (a' \circ e) \circ e = a \circ e' + a' \circ e$, somit die Behauptung. □

Von 7.2-7.4 sei nun $e' \in Z$. Analog zu [6; Lemma 7, p. 185] gilt

7.2 Lemma. Es ist $R_i' \subset \hat{R}_i + \hat{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

7.3 Lemma. Es gilt $R_{ij}' \subset R_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$.

Beweis. Für $a \in R_{12}$ sei $a' = \sum a_{ij}$ mit $a_{ij} \in R_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Wegen $a' = (a \circ e)' = a \circ e' + a' \circ e = a_{12} + a_{21}$ und 7.2 gibt es $\alpha: R_1 \to \hat{R}_1$ $\beta: R_{12} \to R_{12}$ und $\gamma: R_{12} \to R_{21}$, so daß für $b_{ij} \in R_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ gilt: $b'_{11} + b^{\alpha}_{11} \in \hat{Z}$ und $b'_{12} = b^{\beta}_{12} + b^{\gamma}_{12}$. Wir führen die Annahme $\gamma \neq 0$ zum Widerspruch. Wegen

$$(b_{11}b_{12})^{\beta} + (b_{11}b_{12})^{\gamma} = (b_{11}b_{12})' = (b_{11} \circ b_{12})' = b_{11} \circ b'_{12} + b'_{11} \circ b_{12} =$$
$$= b_{11}b^{\beta}_{12} + b^{\gamma}_{12}b_{11} + b^{\alpha}_{11}b_{12}$$

ist $(b_{11}b_{12})^{\gamma} = b^{\gamma}_{12}b_{11}$, also $R^{\gamma}_{12}R_1(R_1 \circ R_1) = 0$, somit R_1 und analog R kommutativ, demnach $\hat{R}_i = \hat{Z}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, schließlich $S_4(\hat{R}) = 0$, Widespruch. □

Für $b_{ij} \in R_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, seien δ und ε definiert wie folgt: $b^{\delta}_{ij} := b'_{ij}$ und $b^{\varepsilon}_{ij} := 0$ für $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$ und $b^{\varepsilon}_{ii} = b'_{ii} - b^{\delta}_{ii} \in \hat{Z}$ für $1 \leqslant i \leqslant 2$. Zunächst sind δ und ε additiv [6; Lemma 8, Corollary, pp. 185-186].

7.4 Lemma. Für alle $a, b \in R$ gilt $(ab)^{\delta} = ab^{\delta} + a^{\delta}b$.

Beweis. Für alle $u, v \in R$ ist

(*) $u^{\delta} \circ v + u \circ v^{\delta} + (u \circ v)^{\delta} = (u \circ v)^{\varepsilon} \in \hat{Z}$

[6; Proof of Theorem 1, p. 186]. Seien $a, c \in R_{12}$ und $b, d \in R_{21}$. Wir führen zunächst die Annahme $(a \circ b)^{\varepsilon} \neq 0$ zum Widerspruch. Wegen (*) und [6; Lemma 10, p. 186] ist $(a \circ b)^{\varepsilon}c = a^{\delta}bc + ab^{\delta}c + abc^{\delta} + (abc)^{\delta} = a(b \circ c)^{\varepsilon}$ und analog $d(a \circ b)^{\varepsilon} = (d \circ a)^{\varepsilon}b$. Also ist $R_{12} \subset \hat{Z}a$ und $R_{21} \subset \hat{Z}b$. Es ist $I := R_{12} + R_{21} + R_{12}R_{21} + R_{21}R_{12} \neq 0$ Ideal von R mit $I \subset \hat{Z}a + \hat{Z}b + \hat{Z}ab + \hat{Z}ba$, also $\hat{R}$ einfacher PI-Ring, somit $S_4(\hat{R}) = 0$, Widerspruch. Mit (*) und [6; Lemma 10, 11, p. 186] erhält man die Behauptung. □

Analog zu [6; p. 187] folgert man

7.5 Satz. Es gibt eine Derivation $\delta: R \to \hat{R}$ und $\varepsilon: R \to \hat{Z}$, so daß $' = \delta + \varepsilon$ und $(R \circ R)^{\varepsilon} = 0$.

VIII. Sei (D), R und T prim mit 1, char $R = 2$, $S_4(R) \neq 0$, $': R \to T$ Lieisomorphismus, $e_1 = e \in R \setminus \{0, 1\}$ mit $e^2 = e$ und $e_2 := = 1 + e$. Wir notieren analog (A), $Z := Z(R)$, $Z' := Z(T)$ und

$\hat{Z} := Z(\hat{T})$. Mit $S_4(R) \neq 0$ ist $((R \circ R) \circ (R \circ R)) \circ R \neq 0$, also $((T \circ T) \circ \circ (T \circ T)) \neq 0$, somit $S_4(T) \neq 0$.

Wegen $S_4(R) \neq 0$ gilt

8.1 Lemma. Es ist $R_1 \circ R_1 \neq 0$ oder $R_2 \circ R_2 \neq 0$.

8.2 Lemma. Es gibt einen Körper K mit $\hat{Z} \subset K$ und $[K: \hat{Z}] \leqslant 2$, so daß $e' = f + z$ mit $f^2 = f \in \hat{T} \otimes_{\hat{Z}} K =: \check{T}$ und $z \in K$, $\check{T}$ prim und $K = Z(T) =: \check{Z}$.

Beweis. Für alle $a \in R$ ist $(a \circ e) \circ e = a \circ e$, also $a' \circ (e')^2 = (a' \circ e') \circ e' = a' \circ e'$, somit $1 \otimes ((e')^2 + e') + ((e')^2 + e') \otimes 1 = 0$, demnach $(e')^2 + + e' = x \in \hat{Z}$. Durch Adjunktion von z mit $z^2 + z = x$ erhält man K und $f := e' + z$. Nach [13; Theorem 1.6(a), p. 932] ist $\check{T}$ prim und $K = \check{Z}$. $\square$

Für $f_1 := f$ und $f_2 := 1 + f$ ist nun $e_i' = f_i + z_i$ mit $f_i \in \check{R}$ und $z_i \in \check{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ und $f_1 f_2 = 0$. Sei nun $\check{T} = T$. Vermutlich erhält man nach geeigneter Ergänzung der Überlegungen an dieser Stelle den allgemeinen Fall.

Wir notieren (A) bezogen auf T und f_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

8.3 Lemma. Es ist $(R_1' \subset T_1 + Z_2'$ oder $R_1' \subset T_2 + Z_1')$ und $(R_2' \subset \subset T_1 + Z_2'$ oder $R_2' \subset T_2 + Z_1')$.

Beweis. Analog zu [8; Lemma 4, p. 216] ist $(R_1 + R_2)' = T_1 + T_2$. Wir führen die Annahme $R_1' \not\subset T_1 + Z_2'$ und $R_1' \not\subset T_2 + Z_1'$ zum Widerspruch. Sei $a_1 \in R_1$, $u_1 \in T_1$ und $u_2 \in T_2 \setminus Z_2'$, so daß $a_1' = u_1 + u_2$. Dann gibt es $v_2, w_2 \in T_2$, so daß $(u_2 \circ v_2) \circ w_2 \neq 0$. Seien $b_i, c_i \in R_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, so daß $(b_1 + b_2)' = v_2$ und $(c_1 + c_2)' = w_2$. Dann ist $(a_1 \circ b_1)' = = u_2 \circ v_2$ und $0 \neq ((a_1 \circ b_1) \circ c_1)' = (u_2 \circ v_2) \circ w_2 \in T_2$, also $U := \{a \in R_1 | a' \in \in T_2\} \not\subset Z_1$ und analog $V := \{a \in R_1 | a' \in T_1\} \not\subset Z_1$. U und V sind Lieideale von R_1 mit $U \cap V = 0$, Widerspruch. $\square$

8.4 Lemma. Es ist (a) $R_1' \subset T_1 + Z_2'$ und $R_2' \subset T_2 + Z_1'$, insbesondere $T_1 \subset R_1' + Z_1' + Z_2'$ und $T_2 \subset R_1' + Z_1' + Z_2'$ oder (b) $R_1' \subset T_2 + Z_1'$ und $R_2' \subset T_1 + Z_2'$, insbesondere $T_1 \subset R_2' + Z_1' + Z_2'$ und $T_2 \subset R_1' + + Z_1' + Z_2'$.

Beweis. Wir verwenden 8.3. O.E. sei $R_1' \not\subset Z_1' + Z_2' \not\supset R_2'$. Es reicht die Annahme $R_1' \cup R_2' \subset T_1 + Z_2'$ bzw. $R_1' \cup R_2' \subset T_2 + Z_1'$ zum

Widerspruch zu führen. Sei die 1. Annahme gegeben. Wegen $T_1 + T_2 = R_1' + R_2' \subset T_1 + Z_2'$ ist $T_2 = Z_2'$. Sei $a_1 \in R_1$, $u_1 \in T_1 \setminus Z_1'$ und $u_2 \in Z_2'$, so daß $a_1' = u_1 + u_2$. Dann gibt es $v_1, w_1 \in T_1$, so daß $(u_1 \circ v_1) \circ w_1 \neq 0$. Seien $b_i \in R_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, so daß $(b_1 + b_2)' = v_1$. Dann ist $(a_1 \circ b_1)' = u_1 \circ v_1 \in T_1 \setminus Z_1'$, also $U := R_1' \cap T_1 \not\subset Z_1'$ und analog $V := R_2' \cap T_1 \not\subset Z_1'$. U und V sind Lieideale von T_1 mit $U \cap V = 0$, Widerspruch. □

8.5 Lemma. Es ist (*c*) $R_{12}' = T_{12}$ und $R_{21}' = T_{21}$ oder (*d*) $R_{12}' = T_{21}$ und $R_{21}' = T_{12}$.

Beweis. Wir betrachten den Fall 8.4 (*a*). Analog zu [8; Proof of Lemma 3, p. 215] ist $(R_{12} + R_{21})' = T_{12} + T_{21}$. Seien $a_{ij}, b_{ij} \in R_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Es gibt Abbildungen $\alpha\colon R_1 \to T_1$, $\sigma\colon T_1 \to Z'$, $\beta\colon R_{12} \to T_{12}$ und $\gamma\colon R_{12} \to T_{21}$, so daß $a_{11}' = a_{11}^{\alpha} + a_{11}^{\sigma}$ und $a_{12}' = a_{12}^{\beta} + a_{12}^{\gamma}$, und es gilt

$$(a_{11}a_{12})' = (a_{11} \circ a_{12})' = a_{11}' \circ a_{12}' = a_{11}^{\alpha} a_{12}^{\beta} + a_{12}^{\gamma} a_{11}^{\alpha},$$

also $(a_{11}a_{12})^{\beta} = a_{11}^{\alpha} a_{12}^{\beta}$ und $(a_{11}a_{12})^{\gamma} = a_{12}^{\gamma} a_{11}^{\alpha}$, somit $\big((a_{11}b_{11})^{\alpha} + a_{11}^{\alpha} b_{11}^{\alpha}\big) \cdot X R_{12} = 0$ und $R_{12}^{\gamma} X \big((a_{11}b_{11})^{\alpha} + b_{11}^{\alpha} a_{11}^{\alpha}\big) = 0$ für $X = R_{11}^{\alpha}$, dann für $X = T_1$ wegen 8.4, schließlich für $X = T$. Ist $R_{11} \circ R_{11} \neq 0$, so gilt $R_{11}^{\alpha} \circ R_{11}^{\alpha} \neq 0$, also $R_{12}^{\beta} = 0$ oder $R_{12}^{\gamma} = 0$. Aus weiteren analogen Betrachtungen fließen alle Behauptungen. □

8.6 Satz. Es gibt einen injektiven Ringmorphismus bzw. Ringantimorphismus $\sigma\colon R \to T$ und $\tau\colon R \to Z'$, so daß $' = \sigma + \tau$ und $\tau([R, R]) = 0$.

Beweis. Wir bearbeiten den Fall 8.4 (*a*), 8.5 (*c*). Die anderen Fälle verifiziert man analog. Seien $a, b \in R$ und $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Sei σ so gewählt, daß $a_{ij}^{\sigma} = a_{ij}'$ und $a_{ii}^{\sigma} + a_{ii}' \in Z'$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. Zunächst ist σ und τ additiv, $(a_{ii}a_{ij})^{\sigma} = a_{ii}^{\sigma} a_{ij}^{\sigma}$, $(a_{ij}a_{jj})^{\sigma} = a_{ij}^{\sigma} a_{jj}^{\sigma}$ und $(a_{ii}a_{kk})^{\sigma} = a_{ii}^{\sigma} a_{kk}^{\sigma}$, $1 \leqslant i \neq j, k \leqslant 2$ [9; Lemmas 15, 16, 18, pp. 449, 450]. Weiterhin gilt

$$(*) \quad a^{\sigma} \circ b^{\sigma} + (a \circ b)^{\sigma} = a' \circ b' + (a \circ b)^{\sigma} = (a \circ b)' + (a \circ b)^{\sigma} = (a \circ b)^{\tau} \in Z',$$

also

$$(a_{12} \circ b_{21})^{\tau} c_{12}^{\sigma} = a_{12}^{\sigma} b_{21}^{\sigma} c_{12}^{\sigma} + (a_{12}b_{21})^{\sigma} c_{12}^{\sigma} = a_{12}^{\sigma} b_{21}^{\sigma} c_{12}^{\sigma} + a_{12}^{\sigma}(b_{21}c_{12})^{\sigma} = a_{12}^{\sigma}(b_{21} \circ c_{12})^{\tau}$$

und analog $c_{21}^{\sigma}(a_{12} \circ b_{21})^{\tau} = (c_{21} \circ a_{12})^{\tau} b_{21}^{\sigma}$. Die Annahme $(a_{12} \circ b_{21})^{\tau} \neq 0$ führt wie im Beweis von 7.4 auf einen Widerspruch. Mit (*) und analog zu [9; Lemmas 16, 18, Theorem 9, pp. 449, 450] erhält man die Behauptung. □

LITERATUR

[1] I. N. HERSTEIN, *On the Lie structure of an associative ring,* J. Algebra, **14** (1970), pp. 561-571.

[2] I. N. HERSTEIN, *Rings with Involution,* Univ. of Chicago Press, Chicago (1976).

[3] R. A. HOWLAND, *Lie isomorphismus of derived rings of simple rings,* Trans. A.M.S., **145** (1969), pp. 383-396.

[4] C. LANSKI and S. MONTGOMERY, *Lie structure of prime rings of characteristic* 2, Pacific J. Math., **42** (1972), pp. 117-136.

[5] W. S. MARTINDALE, *Lie isomorphisms of primitive rings,* Proc. Amer. Math. Soc., **14** (1963), pp. 909-916.

[6] W. S. MARTINDALE, *Lie derivations of primitive rings,* Michigan Math. J., **11** (1964), pp. 183-187.

[7] W. S. MARTINDALE, *Jordan hormomorphisms of the symmetric elements of a ring with involution,* J. Algebra, **5** (1967), pp. 232-249.

[8] W. S. MARTINDALE, *Lie isomorphisms of simple rings,* J. London Math. Soc., **44** (1969), pp. 213-221.

[9] W. S. MARTINDALE, *Lie isomorphisms of prime rings,* Trans. A.M.S., **142** (1969), pp. 437-455.

[10] W. S. MARTINDALE, *Prime rings with involution and generalized polynomial identities,* J. Algebra, **22** (1972), pp. 502-516.

[11] W. S. MARTINDALE, *A noie on Lie isomorphisms,* Can. Math. Bull., **17** (1974), pp. 243-245.

[12] W. S. MARTINDALE, *Lie isomorphisms of the skew elements of a simple ring with involution,* J. Algebra, **36** (1975), pp. 408-415.

[13] W. S. MARTINDALE, *Lie isomorphisms of the skew elements of a prime ring with involution,* Comm. Algebra, **4** (1976), pp. 929-977.

[14] L. H. ROWEN, *Polynomial identities in ring theory,* Academic Press, New York (1980).

[15] LYNNE SMALL, *Mappings on simple rings with involution,* J. Algebra, **13** (1969), pp. 119-136.

[16] W. STREB, *Lie structure in semiprime rings with involution,* J. Algebra, **70** (1981), pp. 480-492.

[17] W. STREB, *Invariant subgroups in rings with involution,* J. Algebra, **72** (1981), pp. 342-358.

[18] W. Streb, *Invariante Untergruppen in Ringen mit Involution II*, J. Algebra, **87** (1984), pp. 1-15.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 Marzo 1983.