RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. C. RONCONI

Monoidi del quarto ordine di P_k^3 a curve sottoinsieme intersezione completa

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 49-68

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__49_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 72 (1984)

Monoidi del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$ a curve sottoinsieme intersezione completa.

M. C. Ronconi (*)

Summary - In this paper we give a complete classification, within linear isomorphisms, of monoidal surfaces $\mathcal{M}$ of degree 4 in $\mathbb{P}_k^3$ (k algebraically closed field of characteristic $\neq 2, 3$) nonsingular in codimension one, whose algebraic curves are set-theoretic complete intersections of $\mathcal{M}$ itself with another surface $\mathcal{G}$ of $\mathbb{P}_k^3$. Moreover, for each of these surfaces, we determine, together with the equations, the minimum positive number μ such that every algebraic curve of $\mathcal{M}$, with multiplicity of intersection μ, is complete intersection on $\mathcal{M}$.

Introduzione.

Oggetto di questa nota è la classificazione, a meno di isomorfismi lineari, dei monoidi $\mathcal{M}$ del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$, k algebricamente chiuso e di caratteristica diversa da 2 e 3, non singolari in codimensione uno, a curve sottoinsieme intersezione completa, tali cioè che per ogni loro curva algebrica C esiste una superficie $\mathcal{G}$ di $\mathbb{P}_k^3$ per cui risulta $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathsf{C}$. Tali superficie vengono denominate anche μ-fattoriali, essendo possibile determinare per ciascuna di esse il minimo intero positivo μ per cui ogni loro curva algebrica, contata μ volte, è completa intersezione di $\mathcal{M}$ e di una opportuna superficie di $\mathbb{P}_k^3$. Gli interi associati alle superficie in esame, oltre al valore $\mu = 4$, in

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

relazione al quale erano noti alcuni esempi [4], pag. 69, possono assumere anche i valori $\mu = 8, 12, 20, 24, 28, 36$.

Assegnata una curva c su un monoide $\mathcal{M}$ a curve sottoinsieme intersezione completa, è possibile ricavare un metodo per la determinazione di una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathsf{c}$. Questo metodo viene illustrato nella nota alla fine del terzo paragrafo.

Nell'ultimo paragrafo vengono riportate alcune considerazioni sui monoidi singolari in codimensione uno nell'ipotesi che k sia di caratteristica zero e più che numerabile. Esse inducono a ritenere che nessun monoide di questo tipo sia a curve sottoinsieme intersezione completa (su corpi di caratteristica zero e più che numerabili).

Notazioni.

Le *superficie di* $\mathbf{P}_k^3$, intese sempre come superficie algebriche ridotte, saranno indicate con $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. Con la scrittura $\mathcal{A} = \{A = 0\}$, $\mathcal{B} = \{B = 0\}$, si intenderà che $A, B, \ldots$ sono generatori degli ideali principali associati ad $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$.

Le *curve* di $\mathbf{P}_k^3$ (equidimensionali), verranno indicate con $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots$.

Siano $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}_k^3$ una superficie non singolare in codimensione uno, B un polinomio omogeneo di $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_r$ le componenti irriducibili dell'intersezione di $\mathcal{A}$ e della superficie luogo degli zeri di B. Con la scrittura

$$\langle B \rangle_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mathsf{c}_1 + \ldots + \mu_r \mathsf{c}_r ,$$

interpretata in un opportuno aperto affine di $\mathbf{P}_k^3$, si intende che $\mu_i = v_{\mathfrak{p}_i}(\bar{B})$, dove $\mathfrak{p}_i$ indica l'ideale primo di $k[\mathcal{A}]$ associato a c_i, $v_{\mathfrak{p}_i}$ la valutazione del campo dei quozienti dell'anello $\mathcal{R} = k[\mathcal{A}]_{\mathfrak{p}_i}$ e $\bar{B}$ l'immagine canonica di B in $\mathcal{R}$. Vale inoltre:

$$\langle B/C \rangle_{\mathcal{A}} = \langle B \rangle_{\mathcal{A}} - \langle C \rangle_{\mathcal{A}} .$$

Qualora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} = \{B = 0\}$ siano due superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tali che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{c}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{c}_r$, c_i irriducibile, di cui una almeno, per esempio $\mathcal{A}$, sia non singolare lungo le c_i, si può usare la notazione precedente e porre

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \langle B \rangle_{\mathcal{A}} .$$

Inoltre, qualora $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \mu_1 \mathsf{c}_1 + \ldots + \mu_r \mathsf{c}_r$, l'intero μ_i verrà detto molteplicità di intersezione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ lungo c_i e verrà denotato anche con $I(\mathsf{c}_i, \mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Analoghe posizioni varranno per le curve di $\mathbf{P}_k^2$.

Sia $\mathcal{M}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ e c una sua curva.

Si dirà che c è *sottoinsieme intersezione completa* su $\mathcal{M}$ se esiste una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathsf{c}$. (Per brevità si scriverà che c è s.i.c. su $\mathcal{M}$). Se ogni curva di $\mathcal{M}$ è s.i.c. su $\mathcal{M}$ si dirà che $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c.. Qualora $\mathcal{M}$ sia non singolare in codimensione uno, si dirà che c, contata μ volte, è completa intersezione su $\mathcal{M}$ se esiste una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{G}\cdot\mathcal{M} = \mu\mathsf{c}$.

L'anello $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ verrà indicato anche con il simbolo $\mathfrak{A}$ e l'anello $k[x_1, x_2, x_3]$ con il simbolo $\mathfrak{A}'$.

1. Monoidi del quarto ordine di $\mathbf{P}_k^3$, non singolari in codimensione uno, a curve s.i.c.

In questo paragrafo k rappresenta un campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria.

I monoidi trattati, essendo non singolari in codimensione uno, hanno un solo punto triplo. A meno di isomorfismi lineari di $\mathbf{P}_k^3$, si può supporre che tale punto coincida con $O(1, 0, 0, 0)$. I monoidi possono pertanto essere rappresentati da equazioni del tipo:

$$Ax_0 + B = 0$$

con A e B forme di $k[x_1, x_2, x_3]$ del terzo e quarto ordine rispettivamente.

PROPOSIZIONE 1.1. (D. Gallarati). Sia $\mathcal{F}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno e sia $\mathcal{G}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = \mu_1 \mathsf{a}_1 + \ldots + \mu_r \mathsf{a}_r$. Se a_1 è s.i.c. su $\mathcal{F}$ allora esiste una superficie $\mathcal{H} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{H} = \mu(\mu_2 \mathsf{a}_2 + \ldots + \mu_r \mathsf{a}_r)$, con μ intero positivo opportuno.

PROPOSIZIONE 1.2. (D. Gallarati). Sia $\mathcal{M} \subset \mathbf{P}_k^3$ un monoide non singolare in codimensione uno di ordine n. Condizione necessaria e sufficiente perchè ogni curva algebrica c (riducibile o no) sia s.i.c. su $\mathcal{M}$ è che ciò avvenga per le rette r_i di $\mathcal{M}$, $i = 1, \ldots, n(n-1)$, uscenti dal punto triplo O. Più precisamente, se r_i contata ν_i volte è completa intersezione su $\mathcal{M}$, allora c contata ad esempio $\nu = \text{m.c.m.}\{\nu_1, \ldots, \nu_{n(n-1)}\}$ è completa intersezione su $\mathcal{M}$.

Per le dimostrazioni delle proposizioni 1.1 e 1.2 si veda [5] pag. 139.

Analizzando la dimostrazione della proposizione 1.1 si può dedurre il seguente

COROLLARIO 1.1. Sia $\mathcal{F}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno. Se esistono $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tali che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}_1 = \mu_1\mathsf{c}$ e $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}_2 = \mu_2\mathsf{c}$, con $\mu_2 > \mu_1$, allora esiste anche una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = (\mu_2 - \mu_1)\mathsf{c}$.

PROPOSIZIONE 1.3 (E. Stagnaro). Sia $\mathcal{M}$ un monoide di ordine $n \geqslant 2$ di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno e sia $Ax_0 + B = 0$ una sua equazione, con A, B forme di $k[x_1, x_2, x_3]$ di ordine $n-1$ e n rispettivamente. Detta r una retta di $\mathcal{M}$ per $O(1, 0, 0, 0)$, sia $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M}\cdot\mathcal{G} = \mu r$, $\mu \geqslant 1$. Allora $\bar{G}$, immagine di G nella proiezione canonica $k[x_0, x_1, x_2, x_3] \to k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(Ax_0 + B)$, è prodotto di potenze ad esponente intero delle proiezioni canoniche di fattori irriducibili di A.

Per la dimostrazione si veda [5] pag. 140.

OSSERVAZIONE 1.1. Sia $\mathcal{M} = \{A_1A_2x_0 + B = 0\}$ un monoide non singolare in codimensione uno, dove A_1 e A_2 sono forme irriducibili di $k[x_1, x_2, x_3]$ del primo e del secondo ordine rispettivamente. Posto $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$, $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$, sia r una delle rette componenti di $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{M}$. Allora:

$$I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1) > 2 \Rightarrow I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) \leqslant 2\,.$$

Infatti: sia $I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1) > 2$, cioè $\langle A_1A_2x_0 + B\rangle_{\mathcal{A}_1} = \langle B\rangle_{\mathcal{A}_1} = \mu_1\mathsf{r} + \mu_2\mathsf{s}$ con $\mu_1 > 2$. Se $I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) > 1$, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{A}_2$ hanno, lungo r, $\mathcal{A}_1$ come piano tangente e quindi $\langle A_2\rangle_{\mathcal{A}_1} = 2\mathsf{r}$. Pertanto $B = CA_2 + DA_1$, con C forma del secondo ordine che si annulla in tutti i punti di r. Poichè $\mathcal{M}$ è non singolare in codimensione uno, la forma D non deve annullarsi lungo r. Pertanto $I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) = I(\mathsf{r}, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 2$.

OSSERVAZIONE 1.2. Dalla osservazione 1.1 si ottiene come conseguenza che su $\mathcal{M} = \{A_1A_2x_0 + B = 0\}$, di rette per O ce ne sono almeno due.

OSSERVAZIONE 1.3. – Sia $\mathcal{M}$ come nell'osservazione 1.1 e sia inoltre $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathsf{r} \cup \mathsf{s}$, ($\mathsf{r}$ e s rette distinte). Allora:

$$I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1) > 1 \Rightarrow I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) = 1 .$$

Infatti, se per assurdo $I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) > 1$, allora $\mathcal{A}_1$ dovrebbe essere tangente, lungo r, anche ad $\mathcal{A}_2$ contro l'ipotesi assunta.

PROPOSIZIONE 1.4. Sia $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$ un monoide di ordine $n \geqslant 2$ di $\mathbf{P}^3_k$ non singolare in codimensione 1 e a curve s.i.c.. Se i fattori irriducibili di A sono s, cioè $A = A_1^{\nu_1} \dots A_s^{\nu_s}$, allora le rette (distinte) di $\mathcal{M}$ per il punto $(n-1)$-plo $O(1, 0, 0, 0)$ sono al più in numero di s.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\langle A_i \rangle_{\mathcal{M}} = a_{1i}\mathsf{r}_1 + \dots + a_{ki}\mathsf{r}_k$. Poichè $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c., esiste una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \mu \mathsf{r}_1$. Posto $\mathcal{G} = \{G = 0\}$, dalla proposizione 1.3 si deduce che $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_1^{m_1} \dots A_s^{m_s} \rangle_{\mathcal{M}} = \left(\sum_1^s a_{1j} m_j\right) \mathsf{r}_1 + \dots + \left(\sum_1^s a_{kj} m_j\right) \mathsf{r}_k$, con $m_1, \dots, m_s$ interi opportuni e non tutti nulli. Pertanto il rango del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{21} \cdots a_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots a_{ks} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \cdot\cdot \\ m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

deve risultare minore di s. Analoghe considerazioni valgono per le rette $\mathsf{r}_2, \dots, \mathsf{r}_k$. Pertanto tutte le sottomatrici di:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1s} \\ a_{21} \cdots a_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots a_{ks} \end{pmatrix},$$

ottenute ciascuna cancellandone una riga, devono avere rango minore di s. Se per assurdo $k > s$, una colonna, ad esempio la prima, sarebbe combinazione lineare delle altre secondo gli scalari $\alpha_2, \dots, \alpha_s$. Pertanto $\langle A_1 \rangle_{\mathcal{M}} = \alpha_2 \langle A_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \dots + \alpha_s \langle A_s \rangle_{\mathcal{M}}$ e quindi $\langle A_1 \rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_2^{\alpha_2} \dots A_s^{\alpha_s} \rangle_{\mathcal{M}}$; seguirebbe, a meno dello scambio degli indici $2, \dots, s$, $A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_r^{p_r} = \alpha A_{r+1}^{p_{r+1}} \dots A_s^{p_s}$, ma ciò è assurdo essendo $k[x_1, x_2, x_3]$ un anello a fattorizzazione unica.

PROPOSIZIONE 1.5. – Sia $\mathcal{M} \subset \mathbf{P}^3_k$ un monoide del quarto ordine non singolare in codimensione uno e sia $Ax_0 + B = 0$ una sua equazione.

a) Nell'ipotesi $A = A_0^\nu$, con A_0 irriducible e $\nu = 1$ oppure $\nu = 3$, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se:

$$\{A_0 = 0\} \cdot \mathcal{M} = \mu \mathsf{r} .$$

b) Nell'ipotesi $A = A_1 A_2$, con A_1 forma lineare e A_2 forma irriducibile del secondo ordine, posto $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

*b*₁) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 8\mathsf{s}$;

*b*₂) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 7\mathsf{s}$;

*b*₃) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 2\mathsf{r} + 6\mathsf{s}$;

*b*₄) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 8\mathsf{s}$;

*b*₅) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 7\mathsf{s}$;

*b*₆) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 2\mathsf{r} + 2\mathsf{s}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 8\mathsf{r}$.

c) Nell'ipotesi $A = A_1^2 A_2$, con A_1 e A_2 forme lineari non proporzionali, posto $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ come sopra, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

*c*₁) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$;

*c*₂) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 3\mathsf{s}$;

*c*₃) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$;

d) Nell'ipotesi $A = A_1 A_2 A_3$, con A_i forme lineari a due a due non proporzionali, posto $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$, $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$, $\mathcal{A}_3 = \{A_3 = 0\}$, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

*d*₁) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$, $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$, $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{t}$;

*d*₂) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$, $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$, $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + \mathsf{s} + 2\mathsf{t}$;

*d*₃) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$, $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$, $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{s} + 3\mathsf{t}$;

*d*₄) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$, $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 3\mathsf{s}$, $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{s} + 3\mathsf{t}$;

*d*₅) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$, $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 3\mathsf{s}$, $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 3\mathsf{t}$;

*d*₆) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$, $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mathsf{r} + 3\mathsf{t}$, $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{s} + \mathsf{t}$.

DIMOSTRAZIONE. – Per quanto concerne la necessità si osservi che:

a) nell'ipotesi $A = A_0^\nu$, detta r una retta di $\mathcal{M}$ per 0, se $\{G = 0\} \cdot \cdot \mathcal{M} = \lambda \mathsf{r}$, dalla prop. 1.3, segue $\bar{G} = \bar{A}_0^\alpha$. Pertanto $\{A_0 = 0\} \cdot \mathcal{M} = \mu \mathsf{r}$. In questo caso c'è su $\mathcal{M}$ una sola retta per il punto triplo.

b) Dalla prop. 1.4 e dalla osservazione 1.2 si deduce che le rette su $\mathcal{M}$ per O sono esattamente due. Pertanto se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$ allora $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mu_1 \mathsf{r} + \mu_2 \mathsf{s}$, con $\mu_1 \leqslant 2$ (cfr. osservazione 1.1). Sono quindi possibili i casi b_1, b_2, b_3.

Se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$, allora $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mu_1 \mathsf{r} + \mu_2 \mathsf{s}$, con $\mu_1 \leqslant 1$ (cfr. osserv. 1.1 e 1.3). Sono pertanto possibili i casi b_4 e b_5.

Se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 2\mathsf{r} + 2\mathsf{s}$, dalla osservazione 1.3 si deduce che il solo caso possibile, a meno dello scambio di r e s, è b_6.

c) Essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno, si ha che se $I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_i) > 1$, allora $I(\mathsf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_j) \leqslant 1$. Questo fatto unito alla proposizione 1.4 permette di concludere che le rette di $\mathcal{M}$ per O sono esattamente due. Inoltre se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{r}$, sono possibili i casi c_1 e c_2.

Se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$, poichè $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ non possono avere più di una retta in comune, deve risultare $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$, cioè: c_3) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3\mathsf{r} + \mathsf{s}$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4\mathsf{s}$. Altri casi non sono possibili essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno.

d) Essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno, le rette di $\mathcal{M}$ per O sono almeno tre. D'altra parte, dalla prop. 1.4 si deduce che esse sono esattamente tre. Se ciascuno degli $\mathcal{A}_i$ individua su $\mathcal{M}$ una sola retta, si rientra nel caso d_1.

Qualora solo due dei tre piani individuino una sola retta, e siano ad esempio $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, allora $\mathcal{A}_3 = \mu_1 \mathsf{r} + \mu_2 \mathsf{s} + \mu_3 \mathsf{t}$, con $\mu_1 \leqslant 1$, $\mu_2 \leqslant 1$, essendo $\mathcal{M}$ non singolare in condimensione uno. Sono allora possibili i casi d_2 e d_3.

Si consideri ora il caso in cui uno solo dei tre piani, ad esempio $\mathcal{A}_1$, individua su $\mathcal{M}$ una sola retta. Allora $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mu_1 \mathsf{r} + \mu_2 \mathsf{s} + \mu_3 \mathsf{t}$ e $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = \nu_1 \mathsf{r} + \nu_2 \mathsf{s} + \nu_3 \mathsf{t}$, $\mu_1 \leqslant 1$, $\nu_1 \leqslant 1$. Dopo aver osservato che due piani distinti non possono avere più di una retta in comune e che la molteplicità di intersezione di $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{M}$ e di $\mathcal{A}_j$ e $\mathcal{M}$ lungo la stessa retta non può essere maggiore di uno per entrambi, si deduce che gli unici casi possibili sono d_4 e d_5. Qualora nessuno dei tre piani individui una sola retta su $\mathcal{M}$, ciascuno di essi deve individuarne esattamente due, non potendo due piani distinti avere più di una retta in comune. L'unico caso allora possibile è d_6.

Per quanto concerne la sufficienza, in virtù della prop. 1.2, basta dimostrare che per ciascun monoide $\mathcal{M}$, corrispondente ai casi elencati, le rette per O sono s.i.c. su $\mathcal{M}$. Ciò risulta ovvio nei casi a, b_1, c_1, d_1. Per quanto concerne i casi $b_2, b_3, b_4, b_6, c_2, c_3, d_2, d_3, d_4, d_5$, basta osservare che una delle rette è s.i.c. su $\mathcal{M}$ e applicare la prop. 1.1 per dedurre che lo sono anche le rimanenti. Nel caso b_5 si osservi che $\langle A_2^3/A_1\rangle_{\mathcal{M}} = 20\mathsf{s}$. Considerato $\mathcal{M}$ come cono affine di $\mathbb{A}_k^4$, si indichi con $k[\mathcal{M}]$ l'anello delle coordinate di $\mathcal{M}$ e con $v_\mathfrak{p}$ la valutazione del campo dei quozienti dell'anello $k[\mathcal{M}]_\mathfrak{p}$, dove $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $k[\mathcal{M}]$ di altezza uno.

Indicate con $\bar{A}_2^3$ e $\bar{A}_1$ le propiezioni canoniche di A_2^3 e A_1 in $k[\mathcal{M}]_\mathfrak{p}$, si ha:

$$v_\mathfrak{p}(\bar{A}_2^3/\bar{A}_1) = 20 \qquad \text{se } \mathfrak{p} = I(\mathsf{s}) ,$$
$$v_\mathfrak{p}(\bar{A}_2^3/\bar{A}_1) = 0 \qquad \text{se } \mathfrak{p} \neq I(\mathsf{s}) .$$

Essendo $k[\mathcal{M}]$ integralmente chiuso, per il teorema di struttura dei domini noetheriani integralmente chiusi, si ha: $\bar{A}_2^3/\bar{A}_1 \in k[\mathcal{M}]$. Scelto come rappresentante di $\bar{A}_2^3/\bar{A}_1$ un polinomio omogeneo C e indicato con D un suo fattore irriducibile, si ottiene $\langle D\rangle_{\mathcal{M}} = \mu\mathsf{s}$, con $\mu \leqslant 20$; s risulta pertanto s.i.c. di $\mathcal{M}$ e della superficie $\{D = 0\}$. Analogamente, essendo $\langle A_1^7/A_2\rangle_{\mathcal{M}} = 20\mathsf{r}$, si deduce che r è s.i.c. su $\mathcal{M}$. Nel caso d_6, ragionando come nel caso precedente, si può dedurre che ciascuna retta su $\mathcal{M}$ è s.i.c. osservando che $\langle A_1 A_3^9/A_2^3\rangle_{\mathcal{M}} = 28\mathsf{s}$, $\langle A_2 A_1^9/A_3^3\rangle_{\mathcal{M}} = 28\mathsf{r}$, $\langle A_3 A_2^9/A_1^3\rangle_{\mathcal{M}} = 28\mathsf{t}$.

2. Sull'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ di un monoide $\mathcal{M}$ del quarto ordine non singolare in codimensione uno a curve s.i.c.

Sia $\mathcal{M}$ un monoide del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno (k corpo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria) le cui curve sono s.i.c. su $\mathcal{M}$. Si vuole determinare il minimo intero positivo μ per cui ogni curva algebrica c su $\mathcal{M}$, è, con molteplicità μ, completa intersezione. Tale intero coincide con l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ (cfr., ad esempio [7], pag. 4).

Sia $Ax_0 + B = 0$ una equazione di $\mathcal{M}$, monoide in esame. Le rette $\mathsf{r}_1, \dots, \mathsf{r}_s$ di $\mathcal{M}$ per il punto triplo sono le componenti dell'intersezione delle due superficie luogo degli zeri di A e di B rispettivamente. Per quanto visto nel paragrafo precedente, $1 \leqslant s \leqslant 3$.

PROPOSIZIONE 2.1. – Sia $\mathcal{M}$ come sopra. Indicato con μ_i il minimo intero positivo per cui esiste una superficie $\mathcal{G}_i$ di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M}\cdot\mathcal{G}_i = \mu_i \mathsf{r}_i$, allora il minimo intero positivo μ per cui ogni curva algebrica c di $\mathcal{M}$, contrata μ volte, è s.i.c. su $\mathcal{M}$, è:

$$\mu = \text{m.c.m.}\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Dalla prop. 1.2 segue che $\mu \leqslant \text{m.c.m.}\ \{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$. D'altra parte $\mu \geqslant \mu_i$ per ogni i; inoltre μ_i deve dividere μ per ogni i, perchè se fosse $\mu = \varrho\mu_i + q_i$, $0 < q_i < \mu_i$, dal corollario 1.1 seguirebbe che r_i, contata q_i volte è s.i.c. su $\mathcal{M}$ e ciò è assurdo essendo $q_i < \mu_i$. Segue allora la tesi.

OSSERVAZIONE 2.1. – Nel caso in cui A abbia un solo fattore irriducibile A_0, come risulta dalla prop. 1.3, la superficie che individua l'unica retta r di $\mathcal{M}$ con molteplicità minima è $\{A_0 = 0\}$.

OSSERVAZIONE 2.2. – Si consideri il caso in cui A si spezza nel prodotto di due fattori irriducibili A_1 e A_2; le rette di $\mathcal{M}$ per il punto triplo sono esattamente due: r e s.

a) Se $\mathcal{M}\cdot\{A_i = 0\} = \mu\mathsf{r}$, per qualche i, allora μ è il minimo intero positivo che compete a r. Indicata infatti con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie tale che $\mathcal{M}\cdot\mathcal{G} = \mu'\mathsf{r}$, dalla prop. 1.3 segue: $\langle G\rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_i^{m_i}A_j^{m_j}\rangle_{\mathcal{M}} = m_i\langle A_i\rangle_{\mathcal{M}} + m_j\langle A_j\rangle_{\mathcal{M}} = m_i\mu\mathsf{r} + m_j\mu_j\mathsf{r} + m_j\nu_j\mathsf{s}$. Pertanto $m_j\nu_j = 0$; non potendo essere $\nu_j = 0$, segue $m_j = 0$. Allora $\mu' = \mu m_i \geqslant \mu$.

b) Se r non è s.i.c. su $\mathcal{M}$ con nessuno degli A_i, posto $\langle A_i\rangle_{\mathcal{M}} = \lambda_i\mathsf{r} + \mu_i\mathsf{s}$ e $\langle A_j\rangle_{\mathcal{M}} = \lambda_j\mathsf{r} + \mu_j\mathsf{s}$, dove $\mu_i\mu_j \neq 0$, $\mu_i < \mu_j$, allora il minimo intero positivo che compete a r soddisfa:

$$\mu \geqslant |\lambda_i\mu_j - \lambda_j\mu_i|/\mu_i\,.$$

Indicata infatti con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie tale che $\mathcal{G}\cdot\mathcal{M} = \mu'\mathsf{r}$, dalla prop. 1.3 si ottiene: $\langle G\rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_i^{m_i}A_j^{m_j}\rangle_{\mathcal{M}} = (m_i\lambda_i + m_j\lambda_j)\mathsf{r} + (m_i\mu_i + m_j\mu_j)\mathsf{s}$. Allora $m_i\mu_i + m_j\mu_j = 0$ e quindi $\mu' = m_j(\lambda_j\mu_i - \lambda_i\mu_j)/\mu_i$. Da $\mu' > 0$ e $|m_j| \geqslant 1$ segue la tesi.

OSSERVAZIONE 2.3. Nel caso in cui A è prodotto di tre fattori irriducibili le rette di $\mathcal{M}$ per il punto triplo O sono tre. Indicata con r una di tali rette, se $\mathcal{M}\cdot\{A_i = 0\} = \mu\mathsf{r}$, per qualche i, con considerazioni analoghe a quelle esposte nei casi precedenti si deduce che μ è l'intero positivo che compete a r. Qualora non sia s.i.c. su $\mathcal{M}$ con alcuno dei piani $\{A_i = 0\}$, pur essendo possibile determinare una formula che comprenda tutti i casi che rientrano in questa situazione, risulta tuttavia più agevole determinare l'intero corrispondente a r caso per caso.

3. Classificazione dei monoidi non singolari in codimensione uno di $\mathbf{P}_k^3$, a curve sottoinsieme intersezione completa.

In questo paragrafo vengono determinate, a meno di isomorfismi lineari di $\mathbf{P}_k^3$ (brevemente i.l.), k campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2 e 3, le equazioni dei monoidi $\mathcal{M}$ non singolari in codimensione uno le cui curve sono s.i.c. su $\mathcal{M}$. A meno di isomorfismi lineari è sempre possibile supporre che il punto triplo di $\mathcal{M}$ coincida con $O(1, 0, 0, 0)$; pertanto le equazioni dei monoidi in esame sono del tipo: $Ax_0 + B = 0$, con A e B forme del terzo e quarto ordine di $\mathfrak{A}'$. La classificazione viene condotta prendendo in esame le varie situazioni che si possono presentare in relazione ad A.

3.1. – Sia A una forma irriducibile del terzo ordine. Essendo $\mathcal{M}$ a curve s.i.c., come precisato nella dimostrazione della proposizione 1.5, su $\mathcal{M}$ c'è una sola retta r per O ed inoltre $\{A = 0\}\cdot\mathcal{M} = 12\mathsf{r}$. Indicata con a la curva $\{A = 0\}$ del piano proiettivo π: $\{x_0 = 0\}$, con b la curva di π luogo degli zeri di B e con P l'intersezione di r con π, deve risultare

$$(o) \qquad \mathsf{b} \cap \mathsf{a} = P\,.$$

Si esaminino separatamente i casi in cui a è ellittica o nodata da quello in cui è cuspidata.

3.1.a. Sia a ellittica o nodata. P allora può essere:

a_1) un flesso di a;

a_2) un punto il cui tangenziale è un flesso;

a_3) un punto il cui tangenziale ha per tangenziale un flesso;

a_4) il nodo di a nel caso in cui a sia nodata.

Infatti: sia a una cubica ellittica, P un suo punto e B una forma del quarto ordine tale che $\langle B\rangle_{\mathsf{a}} = 12P$. Se P non è un flesso di a, indicata con $\{T = 0\}$ la tangente in P alla a, risulta: $\langle T\rangle_{\mathsf{a}} = 2P + Q$. Pertanto $\langle T^6/B\rangle_{\mathsf{a}} = 6Q$. Il teorema di struttura sui domini neotheriani integralmente chiusi assicura l'esistenza di una forma D tale che $\langle D\rangle_{\mathsf{a}} = 6Q$ (si confronti l'ultima parte della dimostrazione della proposizione 1.5). Pertanto se Q non è flesso di a, cioè se P non è un punto il cui tangenziale è un flesso, detta $\{U = 0\}$ la tangente in Q alla a, risulta: $\langle U\rangle_{\mathsf{a}} = 2Q + R$. Ragionando come sopra si deduce che esiste una forma (lineare) L tale che $\langle L\rangle_{\mathsf{a}} = 3R$. R pertanto è un flesso di a.

Nel caso in cui a sia nodata, si può applicare il procedimento sopra esposto alla parte affine c ottenuta intersecando a con l'aperto di $\mathbf{P}_k^2$ complementare di una delle due tangenti nel punto doppio e dimostrare, anche in questo caso, che tra i polinomi tali che $\langle D\rangle_{\mathsf{a}} = 6Q$ e $\langle L\rangle_{\mathsf{a}} = 3R$ ce ne sono due di grado due e uno rispettivamente.

Caso a_1). Supposto, come possibile a meno di i.l., che P sia il punto $(1, 0, 0)$ e che a sia rappresentata nella forma di Weierstrass:

$$x_1^2x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3) = 0\,, \qquad t \neq 0\,,$$

dalla (o) si deduce che $B = \lambda x_3^4 + CA$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ e C forma lineare di $\mathfrak{A}'$. I monoidi, a curve s.i.c., in questo caso sono pertanto l.i. alle superficie della famiglia:

1 $$[x_1^2x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3)]x_0 + x_3^4 = 0\,, \qquad t \neq 0\,.$$

La superficie $\mathcal{M}(1)$, ottenuta ponendo $t = 1$, non è l.i. a nessun'altra superficie della famiglia essendo questo l'unico caso in cui a risulta nodata, mentre $\mathcal{M}(t)$, $t \neq 0, 1$, è l.i. alle superficie $\mathcal{M}(t')$ dove $t' = 1/t$, $1 - t$, $1/(1 - t)$, $t/(t - 1)$, $(t - 1)/t$.

Caso a_2). Si supponga P coincidente con il punto $(0, 0, 1)$ e a rappresentata come nel caso a_1). Poichè $[x_1^2 + (t + 1)x_2^2 + tx_2x_3 = 0] \cap \cap\, a = P$, dalla (o) si deduce che $B = \lambda[x_1^2 + (t + 1)x_2^2 + tx_2x_3]^2 + CA$ con $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, C forma lineare di $\mathfrak{A}'$. I monoidi in questo caso sono pertanto l.i. alle superficie della famiglia:

2 $$[x_1^2x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3)]x_0 + [x_1^2 + (t + 1)x_2^2 + tx_2x_3]^2 = 0\,, \qquad t \neq 0\,.$$

In tale famiglia si riconoscono l.i. le superficie $\mathcal{M}(t)$ e $\mathcal{M}(1/t)$.

Caso a_3). Si supponga P coincidente con il punto $\left(i\sqrt{t}(1+\sqrt{t}),\sqrt{t},1\right)$ e a rappresentata come nel caso a_1). La tangente alla a nel punto P è allora $\{x_1+\alpha x_2=0\}$, con $\alpha=-i(1+\sqrt{t})$. Indicati con $C=x_2^2+(t+1)x_2x_3+tx_3^2$ e con

$$Q=C[(t+1-15\alpha^2)x_1^2-tC+6\alpha(t+1)x_1x_2+6t\alpha x_1x_3]-$$
$$-x_1^4-6\alpha x_1^3x_2+20\alpha^3x_1^3x_3+15\alpha^4x_1^2x_2x_3+6\alpha^5x_1x_2^2x_3+\alpha^6x_2^3x_3\,,$$

la curva $q=\{Q=0\}$ è tale che $q\cap a=P$. Dalla (o) si deduce che $B=\lambda Q+DA$, $\lambda\in k$, $\lambda\neq 0$ e D forma lineare di $\mathfrak{A}'$. I monoidi in questo caso sono l.i. alle superficie della famiglia:

3 $$[x_1^2x_3+x_2(x_2+x_3)(x_2+tx_3)]x_0+Q=0\,,\qquad t\neq 0$$

dove Q è il polinomio sopra indicato. In tale famiglia la superficie $\mathcal{M}(t)$, ottenuta in corrispondenza del valore t del parametro, non è l.i. a nessun'altra superficie della famiglia stessa.

Caso a_4). Si esamini ora il caso in cui a è nodata e P coincide con il nodo di a. A meno di i.l. è possibile supporre a rappresentata da: $x_1x_2x_3-x_1^3-x_2^3=0$. In questo caso P coincide con il punto $(0,0,1)$. Ricordando che $\mathcal{M}$ è non singolare in codimensione uno, i polinomi B tali che l'intersezione di a e della curva luogo degli zeri di B è P, a meno dello scambio di x_1 con x_2, sono quelli del tipo: $B=\lambda(2x_1^4+x_1x_2^3+$ $+x_2^2x_3^2-x_1x_3^3)+CA$, $\lambda\in k$, $\lambda\neq 0$ e C forma lineare di $\mathfrak{A}'$. Le superficie in questo caso sono l.i. alla:

4 $$(x_1x_2x_3-x_1^3-x_2^3)x_0+2x_1^4+x_1x_2^3+x_2^2x_3^2-x_1x_3^3=0\,.$$

3.1.*b*. Nel caso in cui a sia cuspidata può essere rappresentata, a meno di i.l., da $x_1x_2^2-x_3^3=0$. Dalla (o), dalla nota 5 di [6] pag. 171, e dal fatto che $\mathcal{M}$ è non singolare lungo r, si deduce che P deve coincidere con il flesso $(0,1,0)$ di a e che $B=\lambda x_1^4+CA$, $\lambda\in k$, $\lambda\neq 0$, C forma lineare di $\mathfrak{A}'$. Le superficie in questo caso sono pertanto l.i. alla:

5 $$(x_1x_2^2-x_3^3)x_0+x_1^4=0\,.$$

Come risulta dalla proposizione 2.1 e dalla osservazione 2.1, l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$, per tutte le superficie $\mathcal{M}$ di 3.1, è $\mu=12$.

3.2. Sia $A = A_1 A_2$ con A_1 forma lineare e A_2 forma irriducibile del secondo ordine. Come risulta dalla proposizione 1.5, le rette di $\mathcal{M}$ per O sono due: r e s. Indicata con a_1 la retta $\{A_1 = 0\}$ di $\pi = \{x_0 = 0\}$, con a_2 la conica $\{A_2 = 0\}$ di π e con R e S i punti intersezione di r e s con π, si esaminino i vari casi corrispondenti a quelli indicati nella proposizione 1.5, *b*).

Caso b_1). Sia $\langle B\rangle_{\mathsf{a}_1} = 4R$ e $\langle B\rangle_{\mathsf{a}_2} = 8S$. Qualora la tangente in S alla a_2 passi per R, a meno di i.l., si può supporre $A_1 = x_1$, $A_2 = ax_1x_2 + x_3(bx_2 + cx_3)$, $R(0, 0, 1)$, $S(1, 0, 0)$. Dall'ipotesi $\langle B\rangle_{\mathsf{a}_2} = 8S$, segue $B = \lambda x_2^4 + A_2 C$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, C forma di $\mathfrak{A}'$ di grado due. Deve risultare inoltre $\langle B\rangle_{\mathsf{a}_1} = 4R$; pertanto $C = Lx_1$, con L forma lineare di $\mathfrak{A}'$. Le superficie di questo caso sono pertanto l.i. alle: $x_1(ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3^2)x_0 + \lambda x_2^4 + Lx_1(ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3^2) = 0$. Tali superficie si possono ridurre, a meno di i.l., alla:

6 $$x_1(x_1x_2 + x_3^2)x_0 + x_2^4 = 0\,,$$

oppure alla:

7 $$x_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3^2)x_0 + x_2^4 = 0\,.$$

Qualora la tangente in S alla a_2 non passi per R, a meno di i.l., si può supporre $A = x_1$, $A_2 = x_1x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + ax_3)$, $a \in k$, $a \neq 0$, $R(0, 1, 0)$ e $S(1, 0, 0)$. Ragionando come sopra, si deduce che a può assumere soltanto i valori $-1, i, -i$ e che le superficie in questione sono l.i. a una tra le:

8 $$(x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1x_0 - x_2^2 - x_3^2) + x_2^4 = 0\,,$$

9 $$[x_1x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + ix_3)][x_1x_0 - (x_2 - x_3)(x_2 - ix_3)] + x_2^4 = 0\,,$$

10 $$[x_1x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 - ix_3)][x_1x_0 - (x_2 - x_3)(x_2 + ix_3)] + x_2^4 = 0\,.$$

Come risulta dalla osservazione 2.2, *a*) e dalla proposizione 2.1, per le superficie del caso b_1 l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ è $\mu = 8$.

Caso b_2). Le superficie in questo caso risultano l.i. alla:

11 $$(x_2x_3 + x_3^2 + x_1x_2)(x_1x_0 - x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2) + x_2^3x_3 = 0\,.$$

Come risulta dalla osservazione 2.2 *a*) e *b*), i minimi μ_r e μ_s che competono a r e a s soddisfano: $\mu_r = 4$ e $\mu_s \geqslant 28$. D'altra parte $\langle A_2^4/A_1\rangle_{\mathcal{M}} =$

$= 28s$. Pertanto, sfruttando la proposizione 2.1, si deduce che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ è in questo caso $\mu = 28$.

Caso b_3). Le superficie di questo caso sono tutte l.i. alla:

12 $$(x_1x_2 + x_3^2)(x_1x_0 + x_3^2) + x_1x_2^3 = 0 .$$

L'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ è in questo caso $\mu = 12$.

Caso b_4). Le superficie sono tutte l.i. alla:

13 $$(x_2x_3 + x_1^2)(x_1x_0 + x_2^2 + 3x_2x_3 + 3x_3^2) + x_3^4 = 0 .$$

A tale superficie corrisponde $\mu = 24$.

Caso b_5). In questo caso le superficie risultano l.i. alla:

14 $$(x_1^2 + x_2x_3)(x_1x_0 + x_2^2) + x_1x_3^3 = 0 .$$

A tale superficie corrisponde $\mu = 20$.

Caso b_6). Le superficie sono tutte l.i. alla:

15 $$(x_1x_3 + x_2^2)(x_1x_0 + x_3^2) + x_1^4 = 0 .$$

Tale superficie è 8-fattoriale.

3.3. Sia $A = A_1^2A_2$, con A_1 e A_2 forme lineari non proporzionali; si analizzino i vari casi corrispondenti a quelli della proposizione 1.5.

Caso c_1). Ciascuna superficie che rientri in questo caso risulta l.i. a una tra le superficie della famiglia: $x_1^2x_2x_0 + tx_3^4 + a_{22}x_1x_2^3 + a_{23}x_1x_2^2x_3 + a_{33}x_1x_2x_3^2 = 0$, con $a_{22} \neq 0$ essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno. Ciascuna di esse risulta l.i. a una tra:

16 $$x_1^2x_2x_0 + x_3^4 + x_1x_2^3 = 0;$$

17 $$x_1^2x_2x_0 + x_3^4 + x_1x_2^3 + x_1x_2x_3^2 = 0;$$

18 $$x_1^2x_2x_0 + x_3^4 + x_1x_2^3 + x_1x_2^2x_3 + tx_1x_2x_3^2 = 0 .$$

La superficie $\mathcal{M}(t)$, ottenuta in **18** in corrispondenza al valore t del parametro, non risulta l.i. nè alle superficie **16** o **17** nè ad alcuna altra superficie della famiglia stessa. A tali superficie corrisponde $\mu = 4$.

Caso c_2). Le superficie di questo caso risultano l.i. ad una tra le:

19 $$x_1^2x_2x_0 + x_2^4 + x_1x_3^3 = 0;$$

20 $$x_1^2x_2x_0 + x_2^4 + x_1x_3^3 + x_1x_2^2x_3 = 0;$$

21 $$x_1^2x_2x_0 + x_2^4 + x_1x_3^3 + x_1x_2^3 + tx_1x_2^2x_3 = 0\,.$$

Nella famiglia **21** la superficie $\mathcal{M}(t)$, è l.i. alle superficie $\mathcal{M}(\varepsilon t)$, dove $\varepsilon^3 = 1$. Inoltre l'intero che corrisponde alle superficie **19**, **20**, **21** è $\mu = 12$.

Caso c_3). Le superficie risultano l.i. ad una tra le:

22 $$x_1^2x_2x_0 + x_3^3x_2 + x_1^4 + x_1x_2^3 + tx_1x_2^2x_3 = 0\,.$$

La superficie $\mathcal{M}(t)$ risulta l.i. alle superficie $\mathcal{M}(t')$ qualora $t' = t\varepsilon'\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ con $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon'^3 = 1$. Tali superficie sono 12-fattoriali.

3.4. Sia $A = A_1A_2A_3$, con A_i forme lineari a due a due non proporzionali; si esaminino i vari casi che si presentano in conformità con la proposizione 1.5.

Caso d_1). Le superficie di questo caso risultano l.i. alla:

23 $$x_1x_2(x_1 + x_2)x_0 + x_3^4 = 0\,,$$

oppure a una tra le:

24 $$x_1x_2x_3x_0 + (x_2 + x_3)^4 + (x_1 + x_3)^4 + (x_1 + \varepsilon x_2)^4 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0\,, \qquad \varepsilon^4 = 1\,,$$

a seconda che i tre piani $\{A_1 = 0\}$, $\{A_3 = 0\}$ e $\{A_3 = 0\}$ formino o no un fascio. Le superficie **24** non sono a due a due l.i. e risultano 4-fattoriali come la 23.

Caso d_2). Si ottengono superficie l.i. alla:

25 $$x_1x_2x_3x_0 + x_3^4 + x_1x_2(x_1 + x_2)^2 = 0\,.$$

Per determinare l'intero positivo che corrisponde a tale superficie, si determini innanzi tutto il minimo intero corrispondente alla retta t. Indicata con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie tale che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \mu' \mathsf{t}$, dalla proposizione 1.3 segue $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = A_1^{m_1} A_2^{m_2} A_3^{m_3} = 4m_1 \mathsf{r} + 4m_2 \mathsf{s} + m_3(\mathsf{r} + \mathsf{s} + 2\mathsf{t}) = (4m_1 + m_3)\mathsf{r} + (4m_2 + m_3)\mathsf{s} + 2m_3 \mathsf{t}$. Pertanto $4m_1 + m_3 = 4m_2 + m_3 = 0$ e quindi $m_3 = -4m_1$. Si deduce così che $m_1 < 0$, che $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = -8m_1 \mathsf{t}$ e che $\mu' \geqslant 8$. D'altra parte $\langle A_3^4/(A_1 A_2) \rangle_{\mathcal{M}} = 8\mathsf{t}$. Si conclude così che il minimo intero μ' per cui t è, con molteplicità μ', completa intersezione su $\mathcal{M}$, è $\mu' = 8$. Dalla osservazione 2.3 e dalla proposizione 2.1 si deduce che $\mu = 8$ è l'intero che corrisponde alla superficie **25**.

Caso d_3). Si ottengono superficie l.i. alla:

26 $$x_1 x_2 x_3 x_0 + (x_2 + x_3)^4 + x_2(x_1 + x_2)^3 - x_2^4 = 0$$

che risulta 12-fattoriale.

Caso d_4). Si ottengono superficie l.i. alla:

27 $$x_1 x_2 x_3 x_0 + x_2(x_1 + x_2)^3 + x_1 x_3^3 = 0$$

che risulta 36-fattoriale.

Caso d_5). Si ottengono superficie l.i. alla:

28 $$x_1 x_2 (x_1 + x_2) x_0 + x_2 x_1^3 + x_3^3 (x_1 + x_2) = 0;$$

essa risulta 12-fattoriale.

Caso d_6). Si ottengono superficie l.i. alla:

29 $$x_1 x_2 x_3 x_0 + x_1^3 x_2 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 = 0;$$

tale superficie è 28-fattoriale.

3.5. Sia $A = A_1^3$, con A_1 forma lineare. In questo caso c'è su $\mathcal{M}$ una sola retta per O. Le superficie in questo caso sono l.i. ad una tra le:

30 $$x_1^3 x_0 + x_2^4 + x_1 x_3^3 = 0;$$

31 $$x_1^3 x_0 + x_2^4 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_3^3 = 0;$$

32 $$x_1^3x_0 + x_2^4 + x_1^2x_2^2 + tx_1^2x_2x_3 + x_1x_3^3 = 0;$$

33 $$x_1^3x_0 + x_2^4 + \alpha x_1^2x_2^2 + \beta x_1^2x_2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_3^3 = 0 .$$

Nella famiglia **32** le superficie $\mathcal{M}(t)$ e $\mathcal{M}(t')$ corrispondenti ai valori t e t' del parametro, sono l.i. se $t' = \pm \varepsilon t$ dove $\varepsilon^3 = 1$. Nella famiglia **33** $\mathcal{M}(\alpha, \beta))$ è l.i. alla $\mathcal{M}(\alpha', \beta')$ se $\alpha' = \alpha - (2/3)\beta - 2/213$, $\beta' = -\beta - 2/71$. Tutte le superficie relative a questo caso sono 4-fattoriali.

NOTA. Si vuole qui illustrare, con un esempio, come sia possibile, assegnata una curva c sopra un monoide $\mathcal{M}$ a curve s.i.c., determinare una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$.

Sia $\mathcal{M}$ la superficie **27**: $\{x_1x_2x_3x_0 + x_2(x_1 + x_2)^3 + x_1x_3^3 = 0\}$ e $\mathsf{c} \subset \mathcal{M}$ la conica: $\{x_2x_0 + x_3^2 = x_1 + x_2 = 0\}$. Indicato con Γ: $\{x_1 + x_2 = 0\}$ il cono che da $O(1, 0, 0, 0)$ proietta c, si ha: $\Gamma \cdot \mathcal{M} = \mathsf{c} + \mathsf{r} + \mathsf{t}$, dove $\mathsf{r} = \{x_1 = x_2 = 0\}$ e $t = \{x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$. La conica c, contata al più 36 volte, è su $\mathcal{M}$ completa intersezione. Poichè $\langle (x_1 + x_2)^{18}x_2^2/ /(x_1^5x_3^6)\rangle_{\mathcal{M}} = 18\mathsf{c}$, per questa curva esiste una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{M} \cdot \mathcal{G} = 18\mathsf{c}$.

Indicati con $A = x_2x_0 + x_3^2$ e $B = x_1 + x_2$, nel campo dei quozienti di $k[\mathcal{M}]$ valgono le seguenti relazioni:

$$(o) \quad \bar{x}_2\bar{B}^3 = -\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{A}$$

$$(oo) \quad \bar{B}^4 = \bar{x}_1\bar{B}^3 + \bar{x}_2\bar{B}^3 = \bar{x}_1(\bar{B}^3 - \bar{x}_3\bar{A})$$

$$(ooo) \quad \bar{A}\bar{B}^3 = \bar{x}_3(\bar{x}_3\bar{B}^3 - \bar{x}_1\bar{x}_0\bar{A})$$

Pertanto

$$\frac{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^{18}\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^5\bar{x}_3^6} = \frac{\bar{A}^2(\bar{B}^3 - \bar{x}_3\bar{A})^3}{\bar{x}_3^4} = \bar{B}^3(\bar{B}^3 - \bar{x}_3\bar{A})^2 + \bar{x}_3\bar{A}\bar{B}^6 +$$
$$+ 2\bar{B}^3(\bar{x}_0\bar{B} + \bar{x}_3^2)(\bar{A}^2 - \bar{x}_3\bar{B}^3 + \bar{x}_1\bar{x}_0\bar{A}) - 2\bar{x}_0\bar{x}_3\bar{B}\bar{A}^3 - \bar{x}_3^3\bar{A}^3 +$$
$$+ \bar{x}_0^2\bar{A}\bar{B}^5 - \bar{x}_0^2\bar{x}_3\bar{A}^2\bar{B}^2 - \bar{x}_0^3\bar{A}(\bar{x}_3\bar{B}^3 - \bar{x}_1\bar{x}_0\bar{A}) .$$

Indicato con G il polinomio: $B^3(B^3 - x_3A)^2 + \ldots - x_0^3A(x_3B^3 - x_1x_0A)$, si ha: $\{G = 0\} \cdot \mathcal{M} = 18\mathsf{c}$.

4. Monoidi di ordine quattro di $\mathbf{P}^3_{\mathrm{C}}$ singolari in codimensione uno.

Una superficie $\mathcal{M}$ irriducibile di ordine n di $\mathbf{P}^3_{\mathrm{C}}$ con un punto P_0 $(n-1)$-plo è singolare in codimensione uno se e solo se una delle rette uscenti dal punto P_0 è luogo di punti singolari.

I monoidi $\mathcal{M}$ di $\mathbf{P}^3_{\mathrm{C}}$ di ordine quattro con una retta luogo di punti tripli non sono a curve s.i.c.. Tali superficie infatti sono rigate; se per assurdo per ogni curva C di $\mathcal{M}$ e quindi per ogni retta, esistesse una superficie $\mathcal{S}$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \mathsf{C}$, una qualunque sezione piana irriducibile risulterebbe a punti s.i.c. Essendo tale curva singolare, ciò sarebbe in contrasto con la proposizione 11 di [6].

Le superficie su cui è possibile determinare due curve prive di punti comuni non sono, come si deduce da una osservazione di D. Gallarati [3] pag. 246, a curve s.i.c. È questo il caso della «generica» superficie del quarto ordine con una retta luogo di punti doppi, essendo possibile individuare su di essa due rette sghembe, cfr. [1], libro I, cap. VII. Esistono tuttavia particolari superficie di questo tipo che non contengono rette sghembe e altre che non contengono rette diverse da quella doppia: ne è un esempio la superficie $\{x_1x_0^2x_3 + x_3^4 + x_0^4 + x_0x_3x_2^2 + x_0x_3^3 = 0\}$. Per i monoidi di ordine quattro con una retta doppia a cui non è possibile applicare l'osservazione menzionata, si possono formulare altri criteri che, almeno in molti casi, permettono di escludere che si tratti di superficie a curve s.i.c.

a) *Sia $\mathcal{M}$ un monoide e C una sua curva che sia singolare e tale che per ogni suo punto P esista una curva g su $\mathcal{M}$ tale che $g \cap \mathsf{C} = P$. Allora $\mathcal{M}$ non può essere a curve s.i.c.*

Infatti se $\mathcal{M}$ fosse a curve s.i.c., la curva C risulterebbe a punti s.i.c. e ciò sarebbe in contrasto con la proposizione 11 di [6]. Come esempio si consideri la superficie $\mathcal{M}$: $\{x_1x_2x_3x_0 + x_0^4 + x_2^2x_3^2 = 0\}$. Le sole rette di $\mathcal{M}$ sono le due rette doppie: $\{x_0 = x_3 = 0\}$ e $\{x_0 = x_2 = 0\}$. Si supponga, per assurdo, che $\mathcal{M}$ sia a curve s.i.c.; allora anche la parte affine $\mathcal{M}_{\mathsf{a}}$: $\{x_2x_3x_0 + x_0^4 + x_2^2x_3^2 = 0\} = \mathcal{M} \cap \{x_1 \neq 0\}$ lo sarebbe. Indicata con C la curva $\{x_3x_0 + x_0^4 + x_3^2 = x_2 - 1 = 0\} \subset \mathcal{M}_{\mathsf{a}}$, sia Γ_t il cono del fascio $\{x_3 = tx_0^2\}$ che passa per un punto P di C. La curva $g = \{tx_2 + x_0 + t^2x_2^2x_0 = x_3 - tx_0^2 = 0\}$, che assieme alla retta $\{x_3 = x_0 = 0\}$ costituisce l'intersezione di Γ_t e $\mathcal{M}_{\mathsf{a}}$, ha in comune con C il solo punto P. C sarebbe allora a punti s.i.c. in contrasto con la proposizione 12 di [6]. Il monoide considerato non è pertanto a curve s.i.c.

b) Un monoide $\mathcal{M}$ singolare in codimensione uno che, in un opportuno aperto affine, è isomorfo a una superficie cubica $\mathcal{F}$ singolare in codimensione uno non può essere a curve s.i.c.

Infatti se $\mathcal{M}$ lo fosse lo sarebbe anche $\mathcal{F}$, in contrasto con [2], proposizione 6.1. Si consideri ad esempio la superficie $\mathcal{M}$: $\{x_1(x_0x_2x_3 - x_0^3 - x_3^3) + x_0^3x_3 = 0\}$. Le rette di $\mathcal{M}$ sono: $\{x_0 = x_3 = 0\}$, $\{x_0 = x_1 = 0\}$, $\{x_1 = x_3 = 0\}$. La parte affine $\mathcal{M}_a = \{x_0x_2x_3 - x_0^3 - x_3^3 + x_0^3x_3 = 0\} = \mathcal{M} \cap \{x_1 \neq 1\}$ risulta isomorfa, tramite $(x_0, x_2, x_3) \to (x_0, x_2 - x_0^2, x_3)$, alla superficie $\mathcal{G}_a = \{x_0x_2x_3 - x_0^3 - x_3^3 = 0\}$ che, essendo singolare in codimensione uno, non è a curve s.i.c.

L'esistenza su $\mathcal{M}$ di curve prive di punti comuni e i criteri *a*) e *b*) esposti sono sufficienti per stabilire che i monoidi con tre rette doppie uscenti dal punto triplo (superficie di Steiner) e quelli con due rette doppie non sono a curve s.i.c.

L'analisi dei monoidi con una sola retta doppia non è completa, perchè in alcuni casi non è ancora possibile stabilire se i criteri esposti sono sufficienti ad escludere che le superficie godano della proprietà in esame.

Le tecniche esposte, in particolare quelle che fanno riferimento ai teoremi 11 e 12 di [6], sono valide quando k è un corpo di caratteristica zero e più che numerabile. Nel caso in cui k sia un campo arbitrario di caratteristica diversa da zero, esistono esempi di monoidi che, pur essendo singolari in codimensione uno, sono a curve sottoinsieme intersezione completa. Tali esempi mi sono stati comunicati da P. C. Craighero.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Conforto, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939.

[2] P. C. Craighero - R. Gattazzo - M. C. Ronconi, *Superficie cubiche di* $\mathbf{A}^3_{\mathbf{C}}$ *a curve sottoinsieme intersezione completa*, Ann. di Mat. Pura e Appl., Serie IV, Tomo CXXIX (1981).

[3] D. Gallarati, *Problemi di completa interferenza in geometria algebrica*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, **46** (3-4) (1976), pp. 242-270.

[4] D. Gallarati, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Acad. Roy. de Belgique, Cl. de Sc., Mém., Tome XXXII, F. 3.

[5] E. Stagnaro, *Le superficie cubiche di* $\mathbf{P}^3$ *a curve sottoinsieme intersezione completa*, Atti Acc. Ligure Sc. Let., **31** (1974), pp. 138-148.

[6] E. Stagnaro, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale,* Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 157-179.
[7] U. Storch, *Fastfactorielle Ringe,* Schriftenreihe des Math. Inst. Münster, **36** (1967), pp. 1-42.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 marzo 1983.