

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

VOLKER STINGL

## **Radikale und koradikale Regeln**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 72 (1984), p. 343-355

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1984\\_\\_72\\_\\_343\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__343_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Radikale und koradikale Regeln.

VOLKER STINGL (\*)

Jede endliche Gruppe besitzt bekanntlich einen größten auflösbaren Normalteiler und — dual dazu — einen kleinsten Normalteiler mit auflösbarer Faktorgruppe. Diese Aussage ist für beliebige Gruppen im allgemeinen nicht mehr richtig; es gibt bereits Gegenbeispiele unter den lokal endlichen Gruppen, jedoch besitzt jede lokal endliche Gruppe einen größten lokal auflösbaren Normalteiler und einen kleinsten Normalteiler mit lokal auflösbarer Faktorgruppe. Ähnliches gilt, wenn wir die Eigenschaft « auflösbar » durch « nilpotent » oder eine andere geeignete gruppentheoretische Eigenschaft ersetzen. Daß dies kein Zufall ist, wird bereits bei Kegel und Wehrfritz [1, S. 12-16] angedeutet. Wir wollen die dort gemachten Bemerkungen in dieser kurzen Note etwas erweitern. Dabei erhalten wir unter anderem das folgende Resultat, welches die eingangs gemachte Bemerkung in einen allgemeineren Rahmen stellt:

FOLGERUNG 11. (a) *Es sei  $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X}$  eine Gruppenklasse, so daß das  $\mathfrak{X}$ -Radikal jeder endlichen Gruppe wieder eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist. Dann ist das  $\mathbf{L}\mathfrak{X}$ -Radikal jeder lokal endlichen Gruppe wieder eine  $\mathbf{L}\mathfrak{X}$ -Gruppe.*

(b) *Es sei  $\mathfrak{X} = \mathbf{Q}\mathfrak{X}$  eine Gruppenklasse, so daß für jede endliche Gruppe die Faktorgruppe nach dem  $\mathfrak{X}$ -Residuum wieder eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist. Dann ist für jede lokal endliche Gruppe die Faktorgruppe nach dem  $\mathbf{L}\mathfrak{X}$ -Residuum wieder eine  $\mathbf{L}\mathfrak{X}$ -Gruppe.*

Die Bezeichnungsweise folgt im wesentlichen den Büchern von Kegel-Wehrfritz [1] und Robinson [2]; dort finden sich auch die

(\*) Indirizzo dell'A.: Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, Fachbereich Mathematik, Saarstraße 21, 6500 Mainz.

Definitionen der in dieser Arbeit nicht näher erklärten, weniger gebräuchlichen Begriffe.

Wir erläutern als erstes den Titel dieser Arbeit.

DEFINITION 1. (a) Es sei  $\mathfrak{X}$  eine Gruppenklasse. Ist jeder Gruppe  $G$  aus  $\mathfrak{X}$  eine Gruppe  $r(G)$  zugeordnet, so daß  $r(G)$  eine Untergruppe von  $G$  ist, dann heißt  $r$  eine *Regel* auf  $\mathfrak{X}$ .

(b) Eine Regel  $r$  auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X}$  heißt *radikal* (bzw. *koradikal*), falls für je zwei Gruppen  $S$  und  $T$  aus  $\mathfrak{X}$  mit  $S \subseteq T$  gilt  $S \cap r(T) \subseteq r(S)$  (bzw.  $S \cap r(T) \supseteq r(S)$ ).

(c) Eine Regel  $r$  auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X}$  heißt *funktoriell* wenn für jedes isomorphe Bild  $\alpha(G)$  einer Gruppe  $G$  aus  $\mathfrak{X}$  gilt  $r(\alpha(G)) = \alpha(r(G))$ . (In diesem Falle ist  $r(G)$  eine charakteristische Untergruppe von  $G$ .)

Das nächste Lemma liefert eine ganze Reihe von Beispielen für (ko-)radikale, funktorielle Regeln.

LEMMA 2. *Es seien  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y} = S\mathfrak{X}$  zwei Gruppenklassen.*

(a) *Ist das  $\mathfrak{Y}$ -Radikal  $r_{\mathfrak{Y}}(G)$  jeder  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  wieder eine  $\mathfrak{Y}$ -Gruppe, so ist  $r_{\mathfrak{Y}}$  eine radikale, funktorielle Regel auf  $\mathfrak{X}$ .*

(b) *Ist für jede  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  die Faktorgruppe nach dem  $\mathfrak{Y}$ -Residuum  $\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(G)$  wieder eine  $\mathfrak{Y}$ -Gruppe, so ist  $\hat{s}_{\mathfrak{Y}}$  eine koradikale, funktorielle Regel auf  $\mathfrak{X}$ .*

BEWEIS. (a) Klar ist, daß es sich bei  $r_{\mathfrak{Y}}$  um eine Regel handelt. Es seien nun  $S$  und  $T$   $\mathfrak{X}$ -Gruppen mit  $S \subseteq T$ . Dann ist  $S \cap r_{\mathfrak{Y}}(T)$  ein  $\mathfrak{Y}$ -Normalteiler von  $S$  und damit in  $r_{\mathfrak{Y}}(S)$  enthalten. Also ist  $r_{\mathfrak{Y}}$  eine radikale Regel. Ist  $\alpha(G)$  ein isomorphes Bild der  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$ , so ist  $\alpha(r_{\mathfrak{Y}}(G))$  ein  $\mathfrak{Y}$ -Normalteiler von  $\alpha(G)$ . Es folgt  $\alpha(r_{\mathfrak{Y}}(G)) \subseteq r_{\mathfrak{Y}}(\alpha(G))$ . Analog erhalten wir  $\alpha^{-1}(r_{\mathfrak{Y}}(\alpha(G))) \subseteq r_{\mathfrak{Y}}(G)$ , woraus sich nach Anwendung von  $\alpha$  die umgekehrte Inklusion ergibt. Daher muß  $r_{\mathfrak{Y}}$  auch funktoriell sein.

(b) Klar ist wieder, daß  $\hat{s}_{\mathfrak{Y}}$  eine Regel ist. Sind  $S$  und  $T$   $\mathfrak{X}$ -Gruppen mit  $S \subseteq T$ , dann haben wir  $S\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)/\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T) \subseteq T/\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)$ . Also ist  $S\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)/\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)$  eine  $\mathfrak{Y}$ -Gruppe. Wegen  $S\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)/\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T) \cong S/S \cap \hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)$  handelt es sich auch bei  $S/S \cap \hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)$  um eine  $\mathfrak{Y}$ -Gruppe. Somit liegt  $\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(S)$  in  $S \cap \hat{s}_{\mathfrak{Y}}(T)$  und  $\hat{s}_{\mathfrak{Y}}$  ist koradikal. Ist  $\alpha(G)$  eine isomorphe Bild der  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$ , so ist  $\alpha(G)/\alpha(\hat{s}_{\mathfrak{Y}}(G))$  eine  $\mathfrak{Y}$ -Gruppe. Es ergibt

sich demnach  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{Y}}(\alpha(G)) \subseteq \alpha(\mathfrak{s}_{\mathfrak{Y}}(G))$ . Analog folgt, daß  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{Y}}(G)$  in  $\alpha^{-1}(\mathfrak{s}_{\mathfrak{Y}}(\alpha(G)))$  enthalten ist. Nach Anwendung von  $\alpha$  erhalten wir  $\alpha(\mathfrak{s}_{\mathfrak{Y}}(G)) \subseteq \mathfrak{s}_{\mathfrak{Y}}(\alpha(G))$ . Damit haben wir das Lemma vollständig bewiesen.

**BEISPIEL 3.** (a) Ordnet man jeder Gruppe  $G$  das Zentrum  $\mathbf{Z}(G)$  zu, so liefert  $\mathbf{Z}$  eine radikale, funktorielle Regel auf der Klasse aller Gruppen. Eine koradikale, funktorielle Regel auf der Klasse aller Gruppen erhält man, indem jeder Gruppe  $G$  die Kommutatorgruppe  $G'$  zugeordnet wird.

(b) Es ergeben sich (ko-)radikale Regeln, wenn wir in Lemma 2 die Klassen  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  wie folgt wählen:

$\mathfrak{X}$  = Klasse der endlichen Gruppen,

$\mathfrak{Y}$  = Klasse der auflösbaren (nilpotenten) Gruppen;

$\mathfrak{X}$  = Klasse der periodischen Gruppen,

$\mathfrak{Y}$  = Klasse der  $\pi$ -Gruppen ( $\pi$  eine Primzahlmenge).

(c) Eine radikale Regel gemäß Lemma 2 erhält man auch für die folgende Wahl von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$ :

$\mathfrak{X}$  = Klasse der Gruppen, die die Minimalbedingung für Normalteiler erfüllen,

$\mathfrak{Y}$  = Klasse der Černikov-Gruppen.

(Man vergleiche hierzu [2, Theorem 5.22]).

Die Regeln unter (b) und (c) sind natürlich nach Lemma 2 sämtlich funktoriell.

Als nächstes wird untersucht, wie man (ko-)radikale Regeln miteinander « kombinieren » kann.

**SATZ 4.** (a) Es seien  $r_1$  und  $r_2$  radikale, funktorielle Regeln auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X} = \mathbf{Q}\mathfrak{X}$ . Für jede  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  und jeden Normalteiler  $N$  von  $G$  gelte

$$(*) \quad r_2(G)N/N \subseteq r_2(G/N).$$

Definiert man  $(r_2 \circ r_1)(G)$  durch

$$(r_2 \circ r_1)(G)/r_1(G) = r_2(G/r_1(G)),$$

so ist  $r_2 \circ r_1$  eine radikale, funktorielle Regel auf  $\mathfrak{X}$ .

(b) Es seien  $\mathfrak{r}_1$  und  $\mathfrak{r}_2$  koradikale Regeln auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ . Setzen wir für jede Gruppe  $G$  aus  $\mathfrak{X}$

$$(\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(G) := \mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(G)),$$

so ist  $\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1$  eine koradikale Regel auf  $\mathfrak{X}$ . Sind  $\mathfrak{r}_1$  und  $\mathfrak{r}_2$  zusätzlich funktoriell, so ist auch  $\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1$  funktoriell.

BEWEIS. (a) Es seien  $S$  und  $T$  Gruppen aus  $\mathfrak{X}$  mit  $S \subseteq T$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad & S \cap (\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(T) \\ & \subseteq (S \cap (\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(T)) \mathfrak{r}_1(T) \\ & = (S\mathfrak{r}_1(T)) \cap (\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(T). \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} (2) \quad & ((S\mathfrak{r}_1(T)) \cap (\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(T)) / \mathfrak{r}_1(T) \\ & = ((S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T)) \cap ((\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(T) / \mathfrak{r}_1(T)) \\ & = ((S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T)) \cap (\mathfrak{r}_2(T / \mathfrak{r}_1(T))). \end{aligned}$$

Wegen  $(S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T) \subseteq T / \mathfrak{r}_1(T)$  und der Tatsache, daß  $\mathfrak{r}_2$  eine radikale Regel ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} (3) \quad & ((S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T)) \cap (\mathfrak{r}_2(T / \mathfrak{r}_1(T))) \\ & \subseteq \mathfrak{r}_2((S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T)). \end{aligned}$$

Aus (1)-(3) folgt nun

$$\begin{aligned} (4) \quad & ((S \cap (\mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1)(T)) \mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T) \\ & \subseteq \mathfrak{r}_2((S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T)) \\ & \subseteq (S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T). \end{aligned}$$

Da  $\mathfrak{r}_2$  eine funktorielle Regel ist, erhalten wir unter Verwendung des natürlichen Isomorphismus von  $(S\mathfrak{r}_1(T)) / \mathfrak{r}_1(T)$  auf  $S / (S \cap \mathfrak{r}_1(T))$  aus (4)

sofort

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & (S \cap (r_2 \circ r_1)(T)) / (S_2 \cap r_1(T)) \\
 & \subseteq r_2(S / (S \cap r_1(T))) \\
 & \subseteq S / (S \cap r_1(T)).
 \end{aligned}$$

Ist  $H$  irgendeine Gruppe, die  $S \cap r_1(T)$  als Normalteiler enthält, so schreiben wir für die Faktorgruppe  $H / (S \cap r_1(T))$  kurz  $\bar{H}$ . Da  $r_1$  radikal und damit  $S \cap r_1(T)$  eine normale Untergruppe von  $r_1(S)$  ist, folgern wir aus (5) und (\*)

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \overline{((S \cap (r_2 \circ r_1)(T)) r_1(S)) / r_1(S)} \\
 & \subseteq (r_2(\bar{S}) \overline{r_1(S)}) / \overline{r_1(S)} \\
 & \subseteq r_2(\bar{S} / \overline{r_1(S)}) \\
 & \subseteq \bar{S} / \overline{r_1(S)}.
 \end{aligned}$$

Der natürliche Isomorphismus von  $\bar{S} / \overline{r_1(S)}$  auf  $S / r_1(S)$  liefert in Verbindung mit der Tatsache, daß  $r_2$  funktoriell ist, aus (6) die folgende Inklusionskette

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \overline{((S \cap (r_2 \circ r_1)(T)) r_1(S)) / r_1(S)} \\
 & \subseteq r_2(S / r_1(S)) \\
 & = (r_2 \circ r_1)(S) / r_1(S).
 \end{aligned}$$

Durch Übergang auf die vollen Urbilder erhält man aus (7) insbesondere

$$(S \cap (r_2 \circ r_1)(T)) r_1(S) \subseteq (r_2 \circ r_1)(S)$$

und damit die behauptete Inklusion

$$S \cap (r_2 \circ r_1)(T) \subseteq (r_2 \circ r_1)(S).$$

Es sei nun  $\alpha(G)$  ein isomorphes Bild von  $G$ . Mit  $\bar{\alpha}$  bezeichnen wir den durch  $gr_1(G) \mapsto \alpha(g)(r_1(G))$  definierten Isomorphismus [von  $G/r_1(G)$

auf  $\alpha(G)/\alpha(r_1(G))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (r_2 \circ r_1)(\alpha(G))/r_1(\alpha(G)) &= r_2(\alpha(G)/r_1(\alpha(G))) \\ &= r_2(\alpha(G)/\alpha(r_1(G))) = r_2(\bar{\alpha}(G/r_1(G))) \\ &= \bar{\alpha}(r_2(G/r_1(G))) = \bar{\alpha}((r_2 \circ r_1)(G)/r_1(G)) \\ &= \alpha((r_2 \circ r_1)(G))/\alpha(r_1(G)) \\ &= \alpha((r_2 \circ r_1)(G))/r_1(\alpha(G)). \end{aligned}$$

Nach Übergang auf die vollen Urbilder ergibt sich

$$(r_2 \circ r_1)(\alpha(G)) = \alpha((r_2 \circ r_1)(G))$$

und damit ist Teil (a) von Satz 4 bewiesen.

(b) Die Behauptungen in Teil (b) von Satz 4 ergeben sich durch direktes Nachrechnen.

**BEMERKUNG 5.** (a) Die übliche Komposition zweier radikaler Regeln liefert — im Gegensatz zum Falle koradikaler Regeln — im allgemeinen keine radikale Regel. Ist etwa  $G$  die symmetrische Gruppe auf vier Ziffern und  $U$  eine Sylow-2-Untergruppe von  $G$ , so hat  $\mathbf{Z}(\mathbf{F}(G)) \cap U$  die Ordnung vier, aber  $\mathbf{Z}(\mathbf{F}(U))$  hat die Ordnung zwei, so daß  $\mathbf{Z}(\mathbf{F}(G)) \cap U$  nicht in  $\mathbf{Z}(\mathbf{F}(U))$  enthalten sein kann.

(b) Daß man in Teil (a) von Satz 4 nicht auf eine Zusatzbedingung verzichten kann, damit die dort erklärte « Verknüpfung »  $r_2 \circ r_1$  zweier radikaler Regeln  $r_1$  und  $r_2$  wieder eine radikale Regel wird, zeigt das nachstehende Beispiel:

Auf der Klasse der endlichen Gruppen erklären wir zwei radikale, funktorielle Regeln  $r_1$  und  $r_2$  in der folgenden Weise:

$$r_1(G) := \langle g \in G : g^2 = 1 \rangle ,$$

falls  $G$  isomorph zu einer Quaternionengruppe der Ordnung acht oder isomorph zu einer zyklischen Gruppe der Ordnung vier oder zwei ist. In allen anderen Fällen sei

$$r_1(G) := \langle 1 \rangle .$$

$$r_2(G) := G ,$$

falls  $G$  isomorph zu einer (verallgemeinerten) Quaternionengruppe oder isomorph zu einer zyklischen 2-Gruppe ist. In allen anderen Fällen sei wieder

$$r_2(G) := \langle 1 \rangle.$$

Erklären wir  $r_2 \circ r_1$  wie un Teil (a) von Satz 4, so ist diese Regel nicht mehr radikal. Man wähle nämlich eine verallgemeinerte Quaternionengruppe  $T$  der Ordnung 16 und eine Untergruppe  $S$  von  $T$  der Ordnung 8, die zu einer Quaternionengruppe isomorph ist. Dann gilt  $r_2(S/r_1(S)) = r_1(S)/r_1(S)$ , also hat  $(r_2 \circ r_1)(S) = r_1(S)$  die Ordnung zwei; weiter haben wir  $r_2(T, r_1(T)) = r_2(T) = T$ , also hat  $(r_2 \circ r_1)(T) \cap \cap S = T \cap S = S$  die Ordnung acht und kann damit nicht in  $(r_2 \circ r_1)(S)$  enthalten sein.

(e) Die Bedingung (\*) aus Teil (a) von Satz 4 wird von allen radikalen Regeln erfüllt, die gemäß Lemma 2 (a) gebildet sind. Auch die radikale Regel, die jeder Gruppe das Zentrum zuordnet, hat die Eigenschaft (\*).

Wir untersuchen nun, wie man (ko-)radikale Regeln, die auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X}$  erklärt sind, auf solche Gruppen « liften » kann, die in geeigneter Weise von  $\mathfrak{X}$ -Gruppen « überdeckt » werden.

LEMMA 6. *Es sei  $r$  eine Regel auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X}$ , und  $G$  sei eine Gruppe mir einem lokalen System  $\Sigma$  aus  $\mathfrak{X}$ -Gruppen.*

(a) *Ist für jedes Element  $S$  aus  $\Sigma$  die Gruppe  $R_S$  durch*

$$R_S := \bigcap_{\substack{T \in \Sigma \\ S \subseteq T}} (S \cap r(T))$$

*definiert, dann ist*

$$r(G, \Sigma) := \bigcup_{S \in \Sigma} R_S$$

*eine Untergruppe von  $G$  und  $\{R_S : S \in \Sigma\}$  ist ein lokales System von  $r(G, \Sigma)$ .*

(b) *Gilt für je zwei Gruppen  $S$  und  $T$  aus  $\Sigma$  mit  $S \subseteq T$ , daß  $r(S)$  in  $r(T)$  enthalten ist, dann ist*

$$\mathfrak{z}(G, \Sigma) := \bigcup_{S \in \Sigma} r(S)$$



eine Untergruppe von  $G$  und  $\{r(S) : S \in \Sigma\}$  ist ein lokales System von  $\mathfrak{z}(G, \Sigma)$ .

BEWEIS. (a) Da  $\Sigma$  ein lokales System von  $G$  ist, finden wir zu zwei Gruppen  $S$  und  $T$  aus  $\Sigma$  eine Gruppe  $U$  aus  $\Sigma$ , die sowohl  $S$  als auch  $T$  enthält. Dann haben wir

$$\bigcap_{\substack{V \in \Sigma \\ U \subseteq V}} (U \cap r(V)) \supseteq \bigcap_{\substack{V \in \Sigma \\ U \subseteq V}} (S \cap r(V)) \supseteq \bigcap_{\substack{V \in \Sigma \\ S \subseteq V}} (S \cap r(V)),$$

also gilt  $R_S \subseteq R_U$ . Analog ergibt sich  $R_T \subseteq R_U$ . Hieraus folgen alle Aussagen in Teil (a) von Lemma 6.

(b) Die Aussagen in Teil (b) von Lemma 6 sind trivial.

Die Gruppen  $r(G, \Sigma)$  und  $\mathfrak{z}(G, \Sigma)$  aus Lemma 6 sind abhängig von der speziellen Wahl des lokalen Systems  $\Sigma$  von  $G$ . Für (ko-)radikale Regeln können wir diese Abhängigkeit wie folgt beschreiben:

LEMMA 7. Es sei  $r$  eine Regel auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X}$ . Weiter sei  $G$  eine Gruppe mit zwei lokalen Systemen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  aus- $\mathfrak{X}$ -Gruppen, so daß zu jedem  $S$  aus  $\Sigma_1$  ein  $T$  aus  $\Sigma_2$  existiert mit  $S \subseteq T$ .

(a) Ist  $r$  radikal, so gilt  $r(G, \Sigma_1) \supseteq r(G, \Sigma_2)$ .

(b) Ist  $r$  koradikal, so gilt  $\mathfrak{z}(G, \Sigma_1) \supseteq \mathfrak{z}(G, \Sigma_2)$ .

BEWEIS. (a) Es seien  $U$  aus  $\Sigma_1$  und  $V$  aus  $\Sigma_2$  gegeben. Zu jedem  $S$  aus  $\Sigma_1$  mit  $U \subseteq S$  finden wir ein  $T$  aus  $\Sigma_2$  mit  $S \subseteq T$  und  $V \subseteq T$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} U \cap r(S) &\supseteq (U \cap V) \cap r(S) \supseteq (U \cap V) \cap (S \cap r(T)) \\ &= (U \cap S) \cap (V \cap r(T)) = U \cap (V \cap r(T)) \\ &\supseteq U \cap R_V. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort  $R_U \supseteq U \cap R_V$ . Wir erhalten

$$r(G, \Sigma_1) \supseteq \bigcup_{U \in \Sigma_1} (U \cap R_V) = \left( \bigcup_{U \in \Sigma_1} U \right) \cap R_V = G \cap R_V = R_V$$

und damit die behauptete Inklusion  $r(G, \Sigma_1) \supseteq r(G, \Sigma_2)$ .

(b) Es seien  $S$  und  $T$  zwei beliebige  $\mathfrak{X}$ -Gruppen mit  $S \subseteq T$ .

Da  $r$  koradikal ist, gilt  $r(T) \supseteq S \cap r(T) \supseteq r(S)$ . Unter Verwendung von Lemma 6 (b) folgt nun die Behauptung.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Inklusionen in Lemma 7 echt sein können.

**BEISPIEL 8.** Es sei  $\mathfrak{X}$  die Klasse aller lokal endlichen Gruppen, die höchstens abzählbar sind. Wir erklären auf  $\mathfrak{X}$  zwei Regeln  $r$  und  $\mathfrak{s}$  durch

$$r(G) = G, \quad \mathfrak{s}(G) = \langle 1 \rangle, \text{ falls } G \text{ eine endliche } \mathfrak{X}\text{-Gruppe ist,}$$

$$r(G) = \langle 1 \rangle, \quad \mathfrak{s}(G) = G, \text{ falls } G \text{ eine unendliche } \mathfrak{X}\text{-Gruppe ist.}$$

Man rechnet sofort nach, daß es sich bei  $r$  um eine radikale und bei  $\mathfrak{s}$  um eine koradikale Regel handelt.

Es sei  $H$  eine überabzählbare, lokal endliche, einfache Gruppe. (Eine solche Gruppe existiert; man vergleiche etwa [1, Chapter 6].) Nun besitzt  $H$  einerseits als lokal endliche Gruppe ein lokales System  $\Sigma_1$  aus endlichen Gruppen, andererseits hat  $H$  nach [1, Theorem 4.4] ein lokales System  $\Sigma_2$  aus abzählbar unendlichen (einfachen) Gruppen. Aufgrund der Definition von  $r$  und  $\mathfrak{s}$  ist aber sofort klar, daß folgendes gilt:

$$r(H, \Sigma_1) = H, \quad r(H, \Sigma_2) = \langle 1 \rangle,$$

$$\mathfrak{s}(H, \Sigma_1) = \langle 1 \rangle, \quad \mathfrak{s}(H, \Sigma_2) = H.$$

**SATZ 9.** *Es sei  $r$  eine Regel auf einer Gruppenklasse  $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$ .*

(a) *Ist  $G$  eine lokale  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, so ist die Menge  $\Sigma_G$  aller endlich erzeugten Untergruppen von  $G$  ein lokales System von  $G$ , das aus  $\mathfrak{X}$ -Gruppen besteht.*

(b) *Ist  $\Sigma$  ein beliebiges lokales System aus  $\mathfrak{X}$ -Gruppen einer lokalen  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  und ist  $r$  radikal (koradikal), so gilt*

$$r(G, \Sigma_G) \supseteq r(G, \Sigma) \quad (\mathfrak{s}(G, \Sigma_G) \subseteq \mathfrak{s}(G, \Sigma)).$$

(c) *Ist  $r$  radikal (koradikal) und ist für jede lokale  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  die Gruppe  $\tilde{r}(G)$  definiert durch*

$$\tilde{r}(G) := r(G, \Sigma_G) \quad (\tilde{\mathfrak{s}}(G) := \mathfrak{s}(G, \Sigma_G)),$$

so ist  $\tilde{r}$  eine radikale (koradikale) Regel auf der Klasse  $L\mathfrak{X}$  aller lokalen  $\mathfrak{X}$ -Gruppen.

BEWEIS. (a) Die Aussage in Teil (a) von Satz 9 rechnet man direkt nach.

(b) Ist  $\Sigma$  ein lokales System der lokalen  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$ , das aus  $\mathfrak{X}$ -Gruppen besteht, so gibt es zu jeder Gruppe  $S$  aus  $\Sigma_G$ , eine Gruppe  $T$  aus  $\Sigma$  mit  $S \subseteq T$ . Nun folgt die Behauptung aus Lemma 7.

(c) Es seien  $H$  und  $G$  lokale  $\mathfrak{X}$ -Gruppen mit  $H \subseteq G$ . Wir setzen  $\Sigma := \{H \cap S : S \in \Sigma_G\}$ . Dann ist  $\Sigma$  ein lokales System von  $H$ , das aus  $\mathfrak{X}$ -Gruppen besteht.

Es sei zunächst  $r$  eine radikale Regel. Ist  $S$  aus  $\Sigma_G$  vorgegeben und  $T$  eine Gruppe aus  $\Sigma_G$  mit  $H \cap S \subseteq H \cap T$ , so existiert ein  $U_T$  aus  $\Sigma_G$  mit  $S \subseteq U_T$  und  $T \subseteq U_T$ . Dabei gilt

$$(H \cap T) \cap r(H \cap U_T) \subseteq r(H \cap T)$$

und damit

$$(H \cap S) \cap r(H \cap U_T) \subseteq (H \cap S) \cap r(H \cap T)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\substack{T \in \Sigma_G \\ H \cap S \subseteq H \cap T}} (H \cap S) \cap r(H \cap T) \\ & \supseteq \bigcap_{\substack{T \in \Sigma_G \\ H \cap S \subseteq H \cap T}} (H \cap S) \cap r(H \cap U_T) \\ & \supseteq \bigcap_{\substack{V \in \Sigma_G \\ S \subseteq V}} (H \cap S) \cap r(H \cap V). \end{aligned}$$

Da trivialerweise auch die umgekehrte Inklusion gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} H \cap \tilde{r}(G) &= \bigcup_{S \in \Sigma_G} \left( \bigcap_{\substack{V \in \Sigma_G \\ S \subseteq V}} (H \cap S) \cap r(V) \right) \\ &\subseteq \bigcup_{S \in \Sigma_G} \left( \bigcap_{\substack{V \in \Sigma_G \\ S \subseteq V}} (H \cap S) \cap r(H \cap V) \right) \\ &= \bigcup_{S \in \Sigma_G} \left( \bigcap_{\substack{T \in \Sigma_G \\ H \cap S \subseteq H \cap T}} (H \cap S) \cap r(H \cap T) \right) \\ &= r(H, \Sigma). \end{aligned}$$

Da nach Teil (b) dieses Satzes  $r(H, \Sigma) \subseteq r(H, \Sigma_H) = \tilde{r}(H)$  gilt, haben wir insgesamt  $H \cap \tilde{r}(G) \subseteq \tilde{r}(H)$ .

Es sei nun  $r$  eine koradikale Regel. Dann haben wir

$$\begin{aligned} H \cap \tilde{r}(G) &= \bigcup_{S \in \Sigma_G} (H \cap r(S)) \\ &\supseteq \bigcup_{S \in \Sigma_G} ((H \cap S) \cap r(S)) \\ &\supseteq \bigcup_{S \in \Sigma_G} (r(H \cap S)) \\ &= \mathfrak{s}(H, \Sigma) \supseteq \mathfrak{s}(H, \Sigma_H) = \tilde{r}(H). \end{aligned}$$

Damit ist Satz 9 vollständig bewiesen.

**BEMERKUNG 10.** Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Satz 9.

(a) Ist die radikale (koradikale) Regel  $r$  zusätzlich noch funktoriell, so rechnet man leicht nach, daß auch die radikale (koradikale) Regel  $\tilde{r}$  aus Teil (c) von Satz 9 funktoriell ist.

(b) Wählen wir als Gruppenklasse  $\mathfrak{X}$  speziell die Klasse der endlichen Gruppen, so steht in Teil (b) von Satz 9 stets das Gleichheitszeichen, d.h.: Sind  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zwei beliebige lokale Systeme aus endlichen Gruppen einer lokal endlichen Gruppe  $G$  und ist  $r$  eine radikale (koradikale) Regel auf der Klasse der endlichen Gruppen, so gilt  $r(G, \Sigma_1) = r(G, \Sigma_2)$  ( $\mathfrak{s}(G, \Sigma_1) = \mathfrak{s}(G, \Sigma_2)$ ).

Abschließend beweisen wir das am Anfang dieser Arbeit erwähnte Resultat.

**FOLGERUNG 11.** (a) Es sei  $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$  eine Gruppenklasse, so daß das  $\mathfrak{X}$ -Radikal  $r_{\mathfrak{X}}(G)$  jeder endlichen Gruppe  $G$  wieder eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist. Dann ist das  $L\mathfrak{X}$ -Radikal  $r_{L\mathfrak{X}}(H)$  jeder lokal endlichen Gruppe  $H$  wieder eine  $L\mathfrak{X}$ -Gruppe. Dabei gilt  $\tilde{r}_{\mathfrak{X}} = r_{L\mathfrak{X}}$ .

(b) Es sei  $\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X}$  eine Gruppenklasse, so daß für jede endliche Gruppe  $G$  die Faktorgruppe  $G/\mathfrak{s}_{\mathfrak{X}}(G)$  nach dem  $\mathfrak{X}$ -Residuum  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{X}}(G)$  wieder eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist. Dann ist für jede lokal endliche Gruppe  $H$  die Faktorgruppe  $H/\mathfrak{s}_{L\mathfrak{X}}(H)$  nach dem  $L\mathfrak{X}$ -Residuum  $\mathfrak{s}_{L\mathfrak{X}}(H)$  wieder eine  $L\mathfrak{X}$ -Gruppe. Dabei gilt  $\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{s}_{L\mathfrak{X}}$ .

BEWEIS. (a) Es sei  $\tilde{r}_x$  die gemäß Lemma 2 (a) und Satz 9 (c) gebildete radikale Regel auf der Klasse der lokal endlichen Gruppen. Ist  $H$  eine lokal endliche Gruppe und  $U$  eine endlich erzeugte und damit endliche Untergruppe von  $\tilde{r}_x(H)$ , so gilt

$$U = U \cap \tilde{r}_x(H) \subseteq \tilde{r}_x(U) = r_x(U).$$

Da trivialerweise  $r_x(U)$  in  $U$  enthalten ist, stimmen  $U$  und  $r_x(U)$  überein, also ist  $U$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe. Daher handelt es sich bei  $\tilde{r}_x(H)$  um eine lokale  $\mathfrak{X}$ -Gruppe.

Ist  $N$  ein lokaler  $\mathfrak{X}$ -Normalteiler von  $H$  und  $T$  ein Element aus  $\Sigma$ , wobei  $\Sigma$  ein lokales System endlicher Untergruppen von  $H$  ist, so liegt  $N \cap T$  normal in  $T$ . Da  $N \cap T$  als endliche Gruppe eine endlich erzeugte Untergruppe von  $N$  ist, handelt es sich bei  $N \cap T$  um einen  $\mathfrak{X}$ -Normalteiler von  $T$ , woraus sich sofort  $N \cap T \subseteq r_x(T)$  ergibt. Es folgt  $N \cap T \subseteq N \cap r_x(T)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} N &= N \cap H = N \cap \left( \bigcup_{S \in \Sigma} S \right) = N \cap \left( \bigcup_{S \in \Sigma} \left( \bigcap_{\substack{T \in \Sigma \\ S \subseteq T}} S \cap T \right) \right) \\ &= \bigcup_{S \in \Sigma} \left( \bigcap_{\substack{T \in \Sigma \\ S \subseteq T}} (N \cap S \cap T) \right) \subseteq \bigcup_{S \in \Sigma} \left( \bigcap_{\substack{T \in \Sigma \\ S \subseteq T}} (N \cap S \cap r_x(T)) \right) \\ &= N \cap \left( \bigcup_{S \in \Sigma} \left( \bigcap_{\substack{T \in \Sigma \\ S \subseteq T}} S \cap r_x(T) \right) \right) \\ &= N \cap \tilde{r}_x(H). \end{aligned}$$

Da trivialerweise  $N \cap \tilde{r}_x(H)$  in  $N$  enthalten ist, gilt  $N \cap \tilde{r}_x(H) = N$  und damit  $N \subseteq \tilde{r}_x(H)$ .

(b) Es sei  $\tilde{s}_x$  die gemäß Lemma 2 (b) und Satz 9 (c) gebildete koradikale Regel auf der Klasse der lokal endlichen Gruppen. Ist  $H$  eine lokal endliche Gruppe und  $\bar{U}$  eine endlich erzeugte Untergruppe von  $H/\tilde{s}_x(H)$ , so gibt es wegen der Endlichkeit von  $\bar{U}$  eine endliche Untergruppe  $U$  von  $H$  mit  $U\tilde{s}_x(H)/\tilde{s}_x(H) = \bar{U}$ . Wegen  $\bar{U} \cong U/U \cap \tilde{s}_x(H)$  und  $U \cap \tilde{s}_x(H) \supseteq \tilde{s}_x(U)$  ist  $\bar{U}$  ein epimorphes Bild von  $U/\tilde{s}_x(U)$ . Da  $U/\tilde{s}_x(U) = U/\tilde{s}_x(U)$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, muß auch  $\bar{U}$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe sein.

Ist  $N$  ein Normalteiler von  $H$ , so daß  $H/N$  eine lokale  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, und ist  $S$  ein Element eines lokalen Systems  $\Sigma$ , das aus endlichen

Untergruppen von  $H$  besteht, so ist die Gruppe  $S/S \cap N$  wegen  $S/S \cap N \cong SN/N \subseteq H/N$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe. Es folgt  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{X}}(S) \subseteq S \cap N$ . Wir erhalten schließlich

$$N = N \cap H = N \cap \left( \bigcup_{S \in \mathcal{E}} S \right) = \bigcup_{S \in \mathcal{E}} (N \cap S) \supseteq \bigcup_{S \in \mathcal{E}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{X}}(S) = \tilde{r}_{\mathfrak{X}}(H).$$

Damit ist Folgerung 11 vollständig bewiesen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] O. H. KEGEL - B. A. F. WEHRFRITZ, *Locally finite groups*, North Holland, Amsterdam (1973).
- [2] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Part 1, Springer, Berlin (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 ottobre 1983.