

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO MARTELLO

Semigrupperi di traslazioni nello spazio $L^1([-r, 0], X)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 72 (1984), p. 307-317

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__307_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Semigruppj di traslazioni nello spazio $L^1([-r, 0], X)$.

FRANCESCO MARTELLO (*)

SUMMARY - In this paper we characterize the sets D_A such that the operator $A: D_A \subseteq W^{1,1}([-r, 0], X) \rightarrow L^1([-r, 0], X)$, $Au = -u'$ is accretive then we use this characterization in order to prove that, if A is m -accretive in $L^1([-r, 0], X)$, it generates a semigroup of translations in $L^1([-r, 0], X)$.

Introduzione.

Lo studio delle equazioni funzionali mediante il metodo dei semigruppj di operatori fa rientrare la teoria di tali equazioni nell'ambito della teoria generale delle equazioni differenziali astratte in spazi di Banach. Qui il legame con l'equazione funzionale si traduce in condizioni sul dominio D_A dell'operatore $A: D_A \subset Y \rightarrow Y$, $Au = -u'$, con Y spazio dei dati iniziali. In tale studio si incontra il problema di provare che l'operatore A , supposto m -accretivo, generi un semigruppj di traslazioni. Così i semigruppj di traslazioni vengono ad avere un ruolo essenziale in questo tipo di questioni.

A. T. Plant ha dimostrato che in $C([-r, 0], X)$ l'operatore derivata, supposto m -accretivo, genera sempre un semigruppj di traslazioni [4]. Lo scopo di questo lavoro è dimostrare che lo stesso operatore, supposto m -accretivo in $L^1([-r, 0], X)$, è generatore di un semigruppj di traslazioni in $L^1([-r, 0], X)$.

Questo risultato era già stato provato da R. Vilella Bressan in un caso particolare, ottenuto a partire da una equazione funzionale con dato iniziale in $L^1([-r, 0], X)$ [6]. Il metodo seguito consisteva nel

(*) Indirizzo dell'A.: Via Piave 29, 35043 Monselice (Padova).

mettere in relazione il semigruppato generato da A in $L^1([-r, 0], X)$ e quello generato in $C([-r, 0], X)$ dall'operatore \tilde{A} , $D_{\tilde{A}} = D_A \cap C^1([-r, 0], X)$; qui si dimostrerà che tale metodo può essere esteso al caso generale. Una tale estensione è stata possibile dopo aver trovato una caratterizzazione per l'accretività in $L^1([-r, 0], X)$ dell'operatore derivata, valendoci a tale scopo di alcuni risultati in [1] e [5].

Preliminari.

In questo lavoro si suppone $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, $L^1 = L^1([-r, 0], X)$ lo spazio delle funzioni da $[-r, 0]$ in X integrabili secondo Lebesgue munito della norma

$$\|u\|_1 = \int_{-r}^0 |u(t)| dt \quad \text{e} \quad W^{1,1} = W^{1,1}([-r, 0], X) = \\ = \{u \in L^1: u \text{ assolutamente continua, } u' \text{ esiste q.o. e } u' \in L^1\}.$$

Si considera l'operatore $A: D_A \subset L^1 \rightarrow L^1$ così definito:

$$(1) \quad A\varphi = -\varphi' \quad D_A \subseteq W^{1,1}.$$

Diamo ora sinteticamente definizioni e risultati di cui ci serviremo più avanti (vedere [1], [7]).

DEFINIZIONE. Se B è un'operatore (in generale a più valori non lineare) su X allora $B + \alpha I$, $\alpha \in R$, è *accretivo* se per ogni coppia $x_1, x_2 \in D_B$, $y_1 \in Bx_1$, $y_2 \in Bx_2$ si ha:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{1 - \lambda\alpha} \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \quad \text{con } 0 < \lambda < \frac{1}{\max\{0, \alpha\}}.$$

Si dice che è *m-accretivo* se in più vale:

$$R(I + \lambda B) = X \quad \text{per ogni } \lambda: 0 < \lambda < \lambda_0, \lambda_0 \text{ suff. piccolo}.$$

Si ha anche quest'altra definizione equivalente di operatore accretivo:

PROPOSIZIONE. Un operatore B su X è accretivo se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in D_B, y_1 \in Bx_1, y_2 \in Bx_2$ si ha:

$$D_+ \|x_1 - x_2\| (y_1 - y_2) \geq 0.$$

DEFINIZIONE. Sia D un sottoinsieme chiuso di X . Una famiglia di applicazioni $T(t): D \rightarrow D, t \geq 0$, è un semigruppj di tipo $\omega, \omega \in \mathbb{R}$, se:

- i) $T(0)x = x$ per ogni $x \in D$
- ii) $T(t+s)x = T(t)T(s)x$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}^+$ e $x \in D$
- iii) $T(\cdot)x: \mathbb{R}^+ \rightarrow D$ è continua per ogni $x \in D$
- iv) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \exp[\omega t] \|x - y\|, \omega \in \mathbb{R}$, per ogni $t \in \mathbb{R}^+, x, y \in D$.

TEOREMA (Crandall-Liggett). Se B è operatore m -accrctivo, allora per ogni $x \in \bar{D}_B$ esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I + (t/n)B)^{-n}x$ e posto $T(t)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I + (t/n)B)^{-n}x$ $T(t)$ è un semigruppj non lineare continuo in \bar{D}_B .

DEFINIZIONE. Sia D un sottoinsieme chiuso di L^1 e $\{T(t): D \rightarrow D, t \geq 0\}$ sia un semigruppj di operatori non lineare continuo. Se per ogni $\varphi \in D$ esiste una funzione

$$x: [-r, +\infty[\rightarrow X \quad \text{tale che: } T(t)\varphi = x_t \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

si dice che $\{T(t): t \geq 0\}$ è un semigruppj di traslazioni in L^1 .

Ricordiamo che $x_t \in L^1$ denota la storia di $x(s)$ al tempo t cioè: $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ q.o. $-r \leq \theta \leq 0$, (si veda [3]).

1. Accretività in L^1 .

In questo paragrafo diamo una caratterizzazione degli insiemi D_A che rendono l'operatore (1) accretivo. Precisamente proviamo che:

PROPOSIZIONE. L'operatore $A + \alpha I, \alpha \in \mathbb{R}$, è accretivo se e solo se per ogni $u_1, u_2 \in D_A$ si ha:

$$\|u_1(0) - u_2(0)\| - \|u_1(-r) - u_2(-r)\| \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_1.$$

La dimostrazione è una conseguenza dei Lemmi e della Proposizione che seguono.

LEMMA 1.1. Se $u \in W^{1,1}$ allora

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\| \in L^1 \quad \text{e} \quad \int_{-r}^0 \frac{d}{dt} \|u(t)\| dt = \|u(0)\| - \|u(-r)\|.$$

DIM. Poichè $u \in W^{1,1}$, u e $\|u\|$ sono assolutamente continue, pertanto $(d/dt)\|u(t)\|$ esiste q.o. e

$$\int_{-r}^0 \frac{d}{dt} \|u(t)\| dt = \|u(0)\| - \|u(-r)\|.$$

LEMMA 1.2. Se $u \in W^{1,1}$ allora è:

$$D\|u(t)\|u'(t) = \frac{d}{dt} \|u(t)\| \text{ q.o. in } [-r, 0].$$

DIM. Supponiamo che in t_0 esistano sia la derivata di $u(t)$ che quella di $\|u(t)\|$. Allora è:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\|u(t_0 + h)\| - \|u(t_0)\|}{h} - \frac{\|u(t_0) + hu'(t_0)\| - \|u(t_0)\|}{h} \right| = \\ & = \left| \frac{\|u(t_0 + h)\| - \|u(t_0) + hu'(t_0)\|}{|h|} \right| \leq \frac{\|u(t_0 + h) - u(t_0) - hu'(t_0)\|}{|h|} = \\ & = \left\| \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} - u'(t_0) \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Pertanto in t_0 esiste $D\|u(t)\|u'(t_0)$ e si ha:

$$D\|u(t_0)\|u'(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \|u(t)\| \right)_{t=t_0}.$$

PROPOSIZIONE 1.1. Se $u \in W^{1,1}$ si ha:

$$D\|u\|_1(-u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\|.$$

DIM.

$$D_+ \|u\|_1(-u') = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|u - hu'\|_1 - \|u\|_1}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-r}^0 \frac{\|u(t) - hu'(t)\| - \|u(t)\|}{h} dt.$$

Ora osserviamo che:

$$\left| \frac{\|u(t) - hu'(t)\| - \|u(t)\|}{h} \right| \leq \|u'(t)\| \in L^1$$

applico quindi il teorema della convergenza dominata e si ottiene:

$$D_+ \|u\|_1(-u') = \int_{-r}^0 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|u(t) - hu'(t)\| - \|u(t)\|}{h} dt = \\ = \int_{-r}^0 D_+ \|u(t)\|(-u'(t)) dt = - \int_{-r}^0 D \|u(t)\|(u'(t)) dt = \\ = - \int_{-r}^0 \frac{d}{dt} \|u(t)\| dt = \|u(-r)\| - \|u(0)\|.$$

In modo analogo si trova che: $D_- \|u\|_1(-u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\|$.

Quindi si conclude che: $D \|u\|_1(-u')$ esiste e $D \|u\|_1(-u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\|$.

COROLLARIO 1.1. Se $u \in W^{1,1}$, per ogni $\alpha \in R$ è:

$$D \|u\|_1(\alpha u - u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\| + \alpha \|u\|_1.$$

DIM. :

$$D_+ \|u\|_1(\alpha u - u') \leq D_+ \|u\|_1(\alpha u) + D_+ \|u\|_1(-u') = \\ = \alpha \|u\|_1 + (\|u(-r)\| - \|u(0)\|),$$

$$D_- \|u\|_1(\alpha u - u') \leq D_- \|u\|_1(\alpha u) + D_- \|u\|_1(-u') = \\ = \alpha \|u\|_1 + (\|u(-r)\| - \|u(0)\|),$$

ed infine risulta: $D\|u\|_1(\alpha u - u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\| + \alpha\|u\|_1$. Come conseguenza dei risultati precedenti infine si ha:

PROPOSIZIONE 1.2. L'operatore $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è accretivo se e solo se per ogni $u_1, u_2 \in D_A$ si ha:

$$\|u_1(0) - u_2(0)\| - \|u_1(-r) - u_2(-r)\| \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_1.$$

2. Semigruppò di traslazioni in L^1 .

Lo scopo di questo paragrafo è dimostrare che se l'operatore $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m -accrètivo in L^1 allora il semigruppò da esso generato nel senso del teorema di Crandall-Liggett è un semigruppò di traslazioni in L^1 .

Indichiamo con $C = C([-r, 0], X)$ lo spazio delle funzioni continue da $[-r, 0]$ in X munito della sup-norma:

$$\|\varphi\|_C = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|, \quad \text{con } C_\omega = (C([-r, 0], X), \|\cdot\|_\omega)$$

dove: $\|\varphi\|_\omega = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \exp[-\omega\theta] |\varphi(\theta)|$ e con \tilde{A} il seguente operatore in C :

$$\tilde{A}: D_{\tilde{A}} \rightarrow C \quad \tilde{A}\varphi = -\varphi' \quad D_{\tilde{A}} = D_A \cap C^1([-r, 0], X).$$

PROPOSIZIONE 2.1. Se $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m -accrètivo in L^1 allora $\tilde{A} + \omega I$ è m -accrètivo in C_ω per $\omega \geq \max\{0, \alpha\}$.

DM.: Sia $v \in C$, per ipotesi esiste un $u \in D_A$ tale che $u = (I + \lambda A)^{-1}v$ da cui: $v = u - u'$ quindi $u' \in C$, $u \in D_A \subseteq C^1$ e $u = (I + \lambda A)^{-1}v$. Pertanto $R(I + \lambda \tilde{A}) = C$, per λ sufficientemente piccolo. Siano ora $u_1, u_2 \in D_{\tilde{A}} = D_A \cap C^1$ e $v_i = (I + \lambda \tilde{A})u_i = u_i - \lambda u'_i$, $i = 1, 2$. Poniamo $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ e quindi $v = u - \lambda u'$. Si ha:

$$\begin{aligned} \|u(0)\| &\leq \|u(-r)\| + \alpha\|u\|_1 \leq \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|u(0)\| + \\ &+ \int_{-r}^0 \frac{\exp[(-r-s)/\lambda]}{\lambda} \|v(s)\| ds + \alpha\|u\|_1 \leq \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|u(0)\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|v\|_\omega \frac{\exp[-r\omega] - \exp[-r/\lambda]}{1 - \lambda\omega} + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \|v\|_1 \leq \\
& \leq \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|u(0)\| + \|v\|_\omega \frac{\exp[-r\omega] - \exp[-r/\lambda]}{1 - \lambda\omega} + \\
& \quad + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \|v\|_\omega \left(\frac{1 - \exp[-r\omega]}{\omega}\right).
\end{aligned}$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right) \|u(0)\| \leq \|v\|_\omega \cdot \\
& \quad \cdot \left[\frac{\exp[-r\omega] - \exp[-r/\lambda]}{1 - \lambda\omega} + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \frac{1 - \exp[-r\omega]}{\omega}\right].
\end{aligned}$$

Ora se $\alpha \leq 0$ si ha:

$$(1 - \exp[-r/\lambda]) \|u(0)\| \leq \|v\|_\omega \left(\frac{1 - \exp[-r/\lambda]}{1 - \lambda\omega} + \frac{\exp[-r\omega] - 1}{1 - \lambda\omega}\right)$$

da cui:

$$\|u(0)\| \leq \|v\|_\omega \left(\frac{1}{1 - \lambda\omega} + \frac{1}{1 - \lambda\omega} \frac{\exp[-r\omega] - 1}{1 - \exp[-r/\lambda]}\right).$$

Poniamo

$$\frac{1}{1 - \lambda\omega} \frac{\exp[-r\omega] - 1}{1 - \exp[-r/\lambda]} < 0$$

da cui segue $\omega > 0$ e $\lambda\omega < 1$. Quindi se $\alpha < 0$, $\omega > 0$, $\lambda\omega < 1$, l'operatore $\hat{A} + \omega I$ è accretivo in $C_\omega[5]$.

Sia ora $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
& (1 - \exp[-r/\lambda]) \|u(0)\| \leq \|v\|_\omega \cdot \\
& \quad \cdot \left[\frac{\exp[-r\omega] - \exp[-r/\lambda]}{1 - \lambda\omega} + \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha} \frac{1 - \exp[-r\omega]}{\omega}\right] = \\
& = \|v\|_\omega \left[\frac{\omega(1 - \lambda\alpha)(1 - \exp[-r/\lambda]) + (\alpha - \omega)(1 - \exp[-r\omega])}{\omega(1 - \lambda\omega)(1 - \lambda\alpha)}\right] = \\
& = \|v\|_\omega \left[\frac{1 - \exp[-r/\lambda]}{1 - \lambda\omega} + \frac{(\alpha - \omega)(1 - \exp[-r\omega])}{\omega(1 - \lambda\omega)(1 - \lambda\alpha)}\right].
\end{aligned}$$

Quindi infine si ha:

$$\|u(0)\| \leq \|v\|_{\omega} \left[\frac{1}{1 - \lambda\omega} + \frac{\alpha - \omega}{\omega(1 - \lambda\omega)(1 - \lambda\alpha)} \frac{1 - \exp[-r\omega]}{1 - \exp[-r/\lambda]} \right].$$

Poniamo:

$$\frac{\alpha - \omega}{\omega(1 - \lambda\omega)(1 - \lambda\alpha)} \frac{1 - \exp[-r\omega]}{1 - \exp[-r/\lambda]} \leq 0$$

che equivale a:

$$(*) \quad \frac{\alpha - \omega}{\omega(1 - \lambda\omega)} (1 - \exp[-r\omega]) \leq 0.$$

La (*) è verificata per $\omega \geq \alpha$, con $0 < \lambda\omega < 1$.

Pertanto se $\alpha > 0$, $\omega \geq \alpha$, $0 < \lambda\omega < 1$ l'operatore $\tilde{A} + \omega I$ è accretivo in C_{ω} [5]. Si conclude allora che per $\alpha \in R$, $\omega \geq \max\{0, \alpha\}$, $0 < \lambda\omega < 1$, l'operatore $\tilde{A} + \omega I$ è accretivo in C_{ω} .

PROPOSIZIONE 2.2. Sia $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, m -accretivo in L^1 , allora per ogni $\psi \in C$ è: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\psi - (I + \lambda A)^{-1} \psi\|_1 = 0$

DIM.: Sia $\psi \in C$ e $\psi_1 \in D_A$ si ha:

$\|\psi - (I + \lambda A)^{-1} \psi\|_1 \leq \|\psi - \psi_1 - (I + \lambda A)^{-1} \psi + (I + \lambda A)^{-1} \psi_1\|_1 + \|\psi_1 - (I + \lambda A)^{-1} \psi_1\|_1$ poichè $\|\psi_1 - (I + \lambda A)^{-1} \psi_1\|_1 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ si tratta quindi di dimostrare che:

$$\|\psi - \psi_1 - (I + \lambda A)^{-1} \psi + (I + \lambda A)^{-1} \psi_1\|_1 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Siano $\varphi, \varphi_1 \in D_A$ tali che: $\varphi = (I + \lambda A)^{-1} \psi$ e $\varphi_1 = (I + \lambda A)^{-1} \psi_1$ e poniamo: $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_1$, $\tilde{\psi} = \psi - \psi_1$. Consideriamo poi l'operatore A_0 così definito: $A_0 \varphi = -\varphi'$, $DA_0 = \{\varphi \in W^{1,1}: \varphi(0) = 0\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}\|_1 &= \left\| \tilde{\psi}(\theta) - \exp\left[\frac{\theta}{\lambda}\right] \tilde{\varphi}(0) - \int_0^{\theta} \frac{\exp[(\theta-s)/\lambda]}{\lambda} \tilde{\psi}(s) ds \right\|_1 \leq \\ &\leq \left\| \exp\left[\frac{\theta}{\lambda}\right] \tilde{\varphi}(0) \right\|_1 + \|\tilde{\psi} - (I + \lambda A_0)^{-1} \tilde{\psi}\|_1 \leq \\ &\leq \lambda \left(1 - \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \right) \left(\|\tilde{\varphi}(-r)\| + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \|\tilde{\psi}\|_1 \right) + \|\psi - (I + \lambda A_0)^{-1} \psi\|_1. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che:

$$\|\bar{\varphi}(-r)\| \leq \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|\bar{\varphi}(-r)\| + \\ + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|\bar{\psi}\|_1 + \|\bar{\psi}\|_c \left(1 - \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right)$$

da cui:

$$\|\bar{\varphi}(-r)\| \leq \|\bar{\psi}\|_c + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \frac{\exp[-r/\lambda]}{1 - \exp[-r/\lambda]} \|\bar{\psi}\|_1.$$

Perciò tornando alla disuguaglianza iniziale si ha:

$$\|\bar{\psi} - \bar{\varphi}\|_1 \leq \lambda \left(1 - \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right) \|\bar{\psi}\|_c + \\ + \frac{\lambda \max\{\alpha, 0\}}{1 - \lambda\alpha} \|\bar{\psi}\|_1 + \|\bar{\psi} - (I + \lambda A_0)^{-1} \bar{\psi}\|_1.$$

Poichè $\|\psi\|_c < +\infty$ e $\|\psi\|_1 < +\infty$ quando faccio tendere λ a zero il membro di destra va a zero e si conclude.

COROLLARIO 2.1. Se $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m -accretivo in L^1 allora D_A è denso in L^1 .

DIM.: Per la proposizione precedente $C \subseteq \bar{D}_A$ e poichè C è denso in L^1 si conclude che $\bar{D}_A = L^1$.

OSSERVAZIONE. Come conseguenza della proposizione 2.2 si ha anche la densità in L^1 di $D_{\bar{A}}$ cioè: $\bar{D}_{\bar{A}} = L^1$. Infatti per ogni $\psi \in C$, $(I + \lambda A)^{-1} \psi = (I + \lambda \bar{A})^{-1} \psi \in D_{\bar{A}}$, quindi per la proposizione 2.2, $C \subseteq \bar{D}_{\bar{A}}$ e si conclude come nel corollario precedente.

TEOREMA 2.1 Se $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m -accretivo in L^1 allora il semigruppı $\{T(t): t \geq 0\}$ generato da A è un semigruppı di traslazioni.

DIM. Per la proposizione 2.1, $A + \alpha I$ m -accretivo in L^1 comporta $\bar{A} + \omega I$ m -accretivo in C_ω per $\omega \geq \max\{0, \alpha\}$.

Il semigruppı $\{\bar{T}(t): t \geq 0\}$ generato da \bar{A} è un semigruppı di traslazioni [4], quindi per ogni $\varphi \in \bar{D}$: si ha:

$$\bar{T}(t)\varphi = \bar{x}_t \quad t \geq 0 \quad \text{ove } \bar{x}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & -r \leq s \leq 0 \\ \bar{T}(s)\varphi(0) & s > 0. \end{cases}$$

Per ogni $\varphi \in D_A$ si ha: $(I + \lambda A)^{-1}\varphi = (I + \lambda \tilde{A})^{-1}\varphi$ e quindi:

$$\tilde{T}(t)\varphi = (C) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} \varphi = (L^1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} \tilde{A} \right)^{-n} \varphi = T(t)\varphi.$$

Poichè $\varphi_n \xrightarrow{C} \psi$ implica $\varphi_n \xrightarrow{L^1} \psi$.

Quindi per ogni $\varphi \in D_A$ è: $\tilde{T}(t)\varphi = T(t)\varphi$.

Sia ora $\varphi \in L^1$, per l'osservazione precedente D_A è denso in L^1 e quindi esiste una successione $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varphi_n \in D_A$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{L^1} \varphi$ e quindi:

$$(1) \quad T(t)\varphi_n \xrightarrow{L^1} T(t)\varphi \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Poichè $T(t)\varphi_n = \tilde{T}(t)\varphi_n$ la funzione

$$x^{(n)}(s) = \begin{cases} \varphi_n(s) & -r \leq s \leq 0 \\ \tilde{T}(s)\varphi_n(0) & s > 0 \end{cases}$$

è tale che $T(t)\varphi_n = x_t^{(n)}$ per ogni $t \geq 0$ [4].

Definiamo adesso la funzione seguente:

$$x: [-r, +\infty[\rightarrow X, \quad x(s) = \begin{cases} \varphi(s) & -r \leq s \leq 0 \text{ q.o.} \\ T(kr)\varphi(s - kr) & (k-1)r < s < kr \text{ q.o.} \end{cases}$$

per cui risulta: $T(kr)\varphi = x_{kr}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si tratta di dimostrare che $T(t)\varphi = x_t$ per ogni $t \geq 0$.

Sia $(k-1)r < t < kr$, $k \in \mathbb{N}$.

Risulta:

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi - x_t\|_1 &\leq \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \|x_t^{(n)} - x_t\|_1 = \\ &= \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \int_{-r}^0 \|x^{(n)}(t + \theta) - x(t + \theta)\| d\theta = \\ &= (\text{per } t + \theta = s) \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \int_{t-r}^t \|x^{(n)}(s) - x(s)\| ds < \\ &\leq \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \int_{(k-2)r}^{kr} \|x^{(n)}(s) - x(s)\| ds = \\ &= \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \|T((k-1)r)\varphi_n - T((k-1)r)\varphi\|_1 + \\ &\quad + \|T(kr)\varphi_n - T(kr)\varphi\|_1. \end{aligned}$$

Da (1) segue subito che $\|T(t)\varphi - x_t\|_1 = 0$ come si voleva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DA PRATO, *Application croissantes et équations d'évolutions dans les espaces de Banach*, Istituciones Mathematicae, 2 Academic Press (1976).
- [2] J. DYSON - R. VILLELLA-BRESSAN, *Semigroups of translations associated with functional and functional differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **82A** (1978).
- [3] J. HALE, *Theory of functional differential equations*, Springer, Berlin (1977).
- [4] A. T. PLANT, *Non linear semigroups of translations in Banach space generated by functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **60** (1977), pp. 67-74.
- [5] R. VILLELLA-BRESSAN, *An abstract functional equations in spaces of continuous functions*, Proceedings of the Second International Conference of Functional Differential Systems and Related Topics II, Zelona Gora (1981), pp. 328-333.
- [6] R. VILLELLA-BRESSAN, *Functional equations of delay type in L^1 spaces*, da apparire.
- [7] R. VILLELLA-BRESSAN, *Appunti di Lezione di Teoria delle funzioni*, Anno Accademico 1981-92, Università di Padova.

Pervenuto in Redazione il 21 settembre 1983.