RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZAMPIERI

Operatori differenziali a coefficienti costanti di tipo iperbolico-(ipo)ellittico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 27-44

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__27_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 72 (1984)

Operatori differenziali a coefficienti costanti di tipo iperbolico-(ipo)ellittico.

GIUSEPPE ZAMPIERI (*)

Introduzione

Dato un operatore differenziale a coefficienti costanti $P = P(D)$ in $\mathbf{R}^n$ si vuole individuare la condizione algebrica sul polinomio associato $P = P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{C}^n$, che caratterizza l'esistenza di soluzione elementare ultradistribuzione con supporto singolare contenuto in un cono proprio. L'analogo problema per soluzioni distribuzioni, risolto da Fehrman in [1], porta ad individuare una classe di operatori instabile rispetto alle perturbazioni con termini di grado inferiore. Trattando invece il problema sulla classe delle ultradistribuzioni si proverà che la caratterizzazione algebrica verte soltanto sulla parte principale P_m di P.

D'altra parte localizzando la nostra ipotesi algebrica attorno alle caratteristiche reali unitarie di P_m si ottiene una condizione di locale iperbolicità rispetto ad una direzione simultanea per le varie localizzazioni. Si sarebbe allora tentati di lasciar variare tale direzione e di passare quindi alla più vasta classe degli operatori localmente iperbolici per i quali è ancora possibile provare l'esistenza di soluzioni fondamentali microlocali con singolarità contenute in coni propri.

Tuttavia anche se questo punto di vista è più raffinato e porta tra l'altro a considerare distintamente le singolarità delle soluzioni microlocali anzichè complessivamente quella della soluzione elementare, non si è ancora completamente chiarita in tal caso la necessità delle condizioni algebriche localizzate.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Analisi dell'Università, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italia.

Tornando alla situazione precedente si proverà che

P ammette soluzione fondamentale ultradistribuzione con supporto singolare in un cono proprio (contenuto, all'eccezione del vertice, in qualche semispazio aperto $\{x\colon \langle x, \vartheta\rangle > 0\}$) se e solo se la sua parte principale P_m soddisfa per qualche costante C la condizione

$$(0.1)\qquad P_m(\xi + t\vartheta) = 0\,,\ \xi \textit{ reale} \quad \textit{implica}$$

$$\operatorname{Im} t = 0 \textit{ oppure } |\operatorname{Im} t| > C\,|\xi + \operatorname{Re} t\vartheta|\,.$$

Il risultato può essere ulteriormente precisato affermando che la singolarità della soluzione elementare è contenuta in un cono proprio e convesso Γ^* se e solo se P verifica (0.1) rispetto ad ogni (co)vettore $\eta \in \Gamma = \{\langle \eta, \eta^*\rangle > 0\ \forall \eta^* \in \Gamma^*\setminus\{0\}\}$.

Il teorema si consegue provando innanzitutto che nell'ipotesi (0.1) il numero degli zeri reali t di $P_m(\xi + t\vartheta) = 0$ è costante rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$ non parallelo a ϑ; lo si denoterà con p. Si individua poi la perturbazione determinata nella (0.1) dai termini di grado inferiore di P; si prova che p zeri t di $P(\xi + t\vartheta) = 0$ verificano $|\operatorname{Im} t| < C'|\xi + \operatorname{Re} t\vartheta|^{1/\varrho}$, $\varrho = p/(p-1)$, almeno per $|\xi + \operatorname{Re} t\vartheta|$ sufficientemente grande, mentre i rimanenti continuano a soddisfare la seconda alternativa di (0.1) pur di contrarre eventualmente C (Lemma 1.3).

Si dimostra quindi il teorema annunciato per ultradistribuzioni di classe $\gamma_0^{(\varrho)'}$ seguendo la traccia di Fehrman relativa al caso $\varrho = \infty$ e utilizzando essenzialmente il teorema fondamentale di Komatsu sulla rappresentazione locale di ultradistribuzioni come somme infinite di derivate di misure.

Si passa infine a caratterizzare gli *operatori che hanno soluzione fondamentale in $\gamma_0^{(\varrho)'}$ con $\Gamma^{(\sigma)}$*-supp sing, *($\sigma < \varrho$ generici), in un cono proprio contenuto, eccetto il vertice, nel semispazio $\langle x, \vartheta\rangle > 0$.*

La proprietà algebrica che li caratterizza, che sarà detta *(ϱ-)iperbolicità-(σ-)ipoellitticità*, consiste, per certe C' e C'' e per un intorno conico $\Gamma \ni \vartheta$, nell'implicazione

$$(0.2)\qquad \xi,\ t \textit{ reali},\ \eta \in \Gamma \cap S^{n-1}\,,\quad C'|\xi|^{1/\varrho} < t < C''|\xi|^{1/\sigma} \Rightarrow P(\xi - it\eta) \neq 0\,,$$

(ove $S^{n-1} = \{|\xi| = 1\}$).

Naturalmente per $\sigma = 1$, (0.1) e (0.2) sono equivalenti e si ritrova così la caratterizzazione precedente (che già era stata data da Kashiwara sulla classe delle iperfunzioni).

1. Condizioni algebriche per la regolarità analitica della soluzione fondamentale al di fuori di un cono proprio

Si osservi innanzitutto che nella Condizione (0.1) sugli zeri della parte principale di un polinomio, la lunghezza dei covettori ϑ è del tutto ininfluente così pure come lo è la loro orientazione.

Perciò sarà più conveniente introdurre la normalizzazione di $\mathbf{R}^n$ nella sfera $n-1$ dimensionale S^{n-1} e considerare la (0.1) come proprietà rispetto a direzioni non orientate $\pm\vartheta \in S^{n-1}$.

DEFINIZIONE 1.1. *Diremo che un polinomio omogeneo (di grado m) P_m è iperbolico-ellittico rispetto a $\pm\vartheta \in S^{n-1}$ se verifica la* (0.1).

In particolare scegliendo le coordinate in modo che $\vartheta = (0, \ldots, 1)$ e denotando con $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ la variabile in $\mathbf{C}^{n-1}$ e con $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ quella in $\mathbf{C}^n$ si richiederà che valga per qualche costante C l'implicazione:

$$(1.1) \qquad P_m(\zeta', \zeta_n) = 0 \, , \; \zeta' \in \mathbf{R}^{n-1} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Im}\zeta_n = 0 \text{ oppure } |\operatorname{Im}\zeta_n| > C(|\zeta'| + |\operatorname{Re}\zeta_n|) \, .$$

Sempre nell'ipotesi che P_m sia iperbolico-ellittico rispetto a $\pm(0, \ldots, 1)$ si ha

LEMMA 1.1. *Il numero degli zeri reali ζ_n di $P_m(\zeta', \zeta_n) = 0$ è costante rispetto a $\zeta' \in \dot{\mathbf{R}}^{n-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Si fissi $\xi' \in \dot{\mathbf{R}}^{n-1}$ e si denoti con p il numero degli zeri reali ζ_n di $P_m(\xi', \zeta_n) = 0$ e con $q = m - p$ quello dei non reali.

Per ipotesi questi ultimi devono verificare l'inuguaglianza

$$|\operatorname{Im}\zeta_n| > C(|\xi'| + |\operatorname{Re}\zeta_n|) \geqslant C|\xi'| \, .$$

Per la continuità degli zeri esiste $r \leqslant |\xi'|/2$ tale che per $|\zeta' - \xi'| < r$

p zeri ζ_n di $P_m(\zeta', \zeta_n) = 0$ verificano $|\mathrm{Im}\, \zeta_n| < C|\xi'|/2$ mentre gli altri q verificano $|\mathrm{Im}\, \zeta_n| > C|\xi'|/2$. D'altra parte, in base all'ipotesi, se $\zeta' \in \mathbf{R}^{n-1}$ allora ogni zero non reale ζ_n di $P_m(\zeta', \zeta_n) = 0$ deve verificare $|\mathrm{Im}\, \zeta_n| > C|\zeta'|$ e quindi se si suppone $|\zeta' - \xi'| < r \leqslant |\xi'|/2$, deve conseguentemente verificare $|\mathrm{Im}\, \zeta_n| > C|\xi'|/2$. Perciò il numero degli zeri reali ζ_n di $P_m(\zeta', \zeta_n) = 0$ è localmente costante quando ζ' varia nell'insieme (connesso) $\dot{\mathbf{R}}^{n-1}$ e quindi costante.

Vogliamo ora provare come con la Definizione 1.1 si generalizzino i polinomi omogenei che si decompongono nel prodotto di un fattore iperbolico e di uno ellittico il che legittima la denominazione che ne abbiamo dato.

Introducendo anche dei termini di grado inferiore in P sussiste infatti la seguente caratterizzazione.

LEMMA 1.2. *Supponiamo che la parte principale P_m di P sia iperbolico-ellittica rispetto a $\pm(0, \ldots, 1)$ e denotiamo con p il numero degli zeri reali ζ_n di $P_m(\zeta', \zeta_n) = 0$, $\zeta' \in \mathbf{R}^n$. Allora si può decomporre $P(\zeta)$ nel prodotto*

$$P(\zeta) = \boldsymbol{p}(\zeta)\boldsymbol{q}(\zeta)\,, \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n$$

ove $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ sono polinomi in ζ_n di gradi p e $m - p$ rispettivamente, con coefficienti analitici in ζ' quando ζ' vari in un intorno conico (troncato) di $\mathbf{R}^{n-1}$ in $\mathbf{C}^{n-1}$ della forma $\{|\mathrm{Im}\, \zeta'| < c|\mathrm{Re}\, \zeta'|, |\zeta'| > r\}$ e soddisfacenti alle seguenti condizioni:

(i) $\quad \boldsymbol{p}(\zeta', \zeta_n) = 0\,,\ |\zeta'| > r\,,\ \zeta' \in \mathbf{R}^{n-1} \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Im}\, \zeta_n| < C'|\zeta'|^{1-1/p}\,;$

(ii) $\quad \boldsymbol{q}(\zeta', \zeta_n) = 0\,,\ |\zeta'| > r\,,\ \zeta' \in \mathbf{R}^{n-1} \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Im}\, \zeta_n| > C''|\zeta'|\,.$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo quale perturbazione portino nella condizione (1.1) i termini di grado inferiore di P. Si mostrerà che con due nuove costanti C' e C'' vale l'implicazione:

$$P(\zeta', \zeta_n) = 0,\ \zeta' \in \dot{\mathbf{R}}^{n-1} \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Im}\, \zeta_n| > C''|\zeta'| \text{ oppure } |\mathrm{Im}\, \zeta_n| < C'|\zeta'|^{1-1/p}$$

(ove si può supporre $p \neq 0$ altrimenti P è ellittico e il teorema è trivialmente verificato).

Infatti la condizione (1.1) sulla parte principale P_m dà

$$(1.2) \qquad |P_m(\zeta', \zeta_n)| \geqslant c|\zeta'|^q |\mathrm{Im}\, \zeta_n|^p \quad \text{se } \zeta' \in \dot{\mathbf{R}}^{n-1} \text{ e } |\mathrm{Im}\, \zeta_n| \leqslant \frac{C}{2}|\zeta'|$$

ove $c = |P_m(0, \ldots, 1)|(C/2)^q$ e ove $q = m - p$.

D'altra parte

$$(1.3)\qquad |P(\zeta', \zeta_n) - P_m(\zeta', \zeta_n)| \leqslant c'|\zeta|^{m-1} \text{ per qualche } c' \; \left(\text{e per } |\zeta'|\geqslant 1\right).$$

Sia allora $P(\zeta', \zeta_n) = 0$ con $\zeta' \in \dot{\mathbf{R}}^{n-1}$ e si supponga provvisoriamente $|\zeta'|\geqslant 1$. Dato che P_m è normalizzato rispetto all'asse x_n dovrà essere quindi $|\zeta_n| < k|\zeta'|$ per qualche k; si ponga

$$C' = \left(\frac{2c'(1+k^2)^{(m-1)/2}}{c}\right)^{1/p} \quad \text{e} \quad C'' = \frac{C}{2}.$$

Se fosse $C'|\zeta'|^{1-1/p} \leqslant |\operatorname{Im}\zeta_n| \leqslant C''|\zeta'|$ seguirebbe da (1.2) e (1.3) $|P(\zeta', \zeta_n)| \geqslant |P_m(\zeta', \zeta_n)| - |P(\zeta', \zeta_n) - P_m(\zeta', \zeta_n)| \geqslant$

$$\geqslant 2c'(1+k^2)^{(m-1)/2}|\zeta'|^{m-1} - c'|(\zeta', \zeta_n)|^{m-1} \geqslant c'(1+k^2)^{(m-1)/2} \neq 0$$

il che è assurdo (ovviamente se si sceglie $C'' \leqslant C'$ allora si può tralasciare l'ipotesi $|\zeta'|\geqslant 1$ e la conclusione in piena generalità è data dal fatto che per $|\zeta'| < 1$ risulta $C''|\zeta'| < C'|\zeta'|^{1-1/p}$.)

Permettiamo ora a ζ' di assumere valori complessi e confrontiamo gli zeri $\{\mu_j(\zeta')\}_{j=1,\dots,m}$ di $P(\zeta', \zeta_n)$ come polinomio in ζ_n con ζ' come parametri con quelli $\{\lambda_j(\zeta')\}_{j=1,\dots,m}$ della sua parte principale $P_m(\zeta', \zeta_n)$.

Dalla (1.1) segue in virtù della continuità degli zeri di P_m che $\forall \varepsilon$ esiste c_ε tale che se $|\operatorname{Im}\zeta'| < c_\varepsilon|\operatorname{Re}\zeta'|$ allora:

p elementi dell'insieme $\{|\operatorname{Im}\lambda_j(\zeta')|\}$ sono $< (\varepsilon/2)|\zeta'|$ mentre gli altri q sono $> (C - \varepsilon/2)|\zeta'|$ (nell'ipotesi ovviamente che $C \geqslant \varepsilon$ senza di che non si potrebbero separare i due insiemi precedenti).

D'altra parte se $|\zeta'| > r_\varepsilon$ per qualche costante r_ε, allora ogni zero dell'insieme $\{\mu_j(\zeta')\}$ si trova a distanza $< (\varepsilon/2)|\zeta'|$ da qualche elemento dell'insieme $\{\lambda_j(\zeta')\}$. Se ne deduce che se $|\zeta'| > r_\varepsilon$ e $|\operatorname{Im}\zeta'| < c_\varepsilon|\operatorname{Re}\zeta'|$ allora, pur di riordinare gli indici j e supponendo anche $C \geqslant 2\varepsilon$,

$$(1.4)\qquad |\operatorname{Im}\mu_j(\zeta')| < \varepsilon|\zeta'|, \quad j = 1, \dots, p;$$

$$(1.5)\qquad |\operatorname{Im}\mu_j(\zeta')| > (C-\varepsilon)|\zeta'| > \varepsilon|\zeta'|, \quad j = p+1, \dots, m.$$

Siamo quindi riusciti a separare, in certe ipotesi su ζ', due insiemi di zeri ζ_n di $P(\zeta', \zeta_n) = 0$ ovvero abbiamo individuato in $\{|\zeta'| > r_\varepsilon, |\operatorname{Im}\zeta'| \lhd c_\varepsilon|\operatorname{Re}\zeta'|\} \times \mathbf{C}$ due funzioni analitiche

$$p(\zeta', \zeta_n) = \prod_{j=1}^{p}(\zeta_n - \mu_j(\zeta')), \qquad q(\zeta', \zeta_n) = \prod_{j=p+1}^{m}(\zeta_n - \mu_j(\zeta'))$$

in cui si sono raggruppati gli zeri che soddisfano rispettivamente la (1.4) e la (1.5). È inoltre ovvio che P si decompone nel prodotto di p e q (a meno di una costante moltiplicativa $P_m(0, \ldots, 1) \neq 0$).

Si osservi infine che q soddisfa evidentemente (ii) mentre a riguardo della (i) si noti che quando ζ' è reale i p zeri $\{\mu_j(\zeta')\}_{j=1,\ldots,p}$ che verificano $|\mathrm{Im}\,\mu_j(\zeta')| < \varepsilon|\zeta'|$, verificano anche $|\mathrm{Im}\,\mu_j(\zeta')| < C'|\zeta'|^{1-1/p}$ se $\varepsilon < C''$. La dimostrazione è completa.

Anche se è generalmente preferibile riferirsi alla (1.1) come ad una proprietà globale degli zeri di P_m, tuttavia per certi usi converrà considerarla come una condizione locale di iperbolicità dei germi di P_m attorno alle caratteristiche reali (unitarie). Sia allora $\xi \in S^{n-1}$ con $P_m(\xi) = 0$; si consideri la localizzazione $P_{m\xi}$ definita come il primo termine dello sviluppo di P_m in ξ come somma di polinomi omogenei. Da (1.1) segue immediatamente che $P_{m\xi}$ è iperbolico rispetto a $\pm\vartheta$, $\vartheta = (0, \ldots, 1)$, e quindi, per un risultato classico, anche rispetto alle direzioni in $\pm\Gamma_\xi \cap S^{n-1}$ ove $\pm\Gamma_\xi$ denotano le componenti connesse di $\pm\vartheta$ nell'insieme $\{\eta \in \mathbb{R}^n : P_{m\xi}(\eta) \neq 0\}$. E rispetto a tali direzioni risulta localmente iperbolico anche il germe di P_m in ξ (in base ad un risultato di Gårding [2]). Se allora si prende l'intersezione rispetto a ξ, $\pm\Gamma = \bigcap_{\{P_m(\xi)=0,\, \xi \in S^{n-1}\}} \pm\Gamma_\xi$, se ne deduce che i vari germi di P_m nelle caratteristiche ξ sono localmente iperbolici simultaneamente rispetto alle direzioni in $\pm\Gamma \cap S^{n-1}$ o equivalentemente che P_m è iperbolico-ellittico rispetto a tali direzioni. Essenziali nel seguito sono i seguenti fatti provati in [1] e [2]. (a) Γ è un intorno di ϑ. (b) la condizione di locale iperbolicità in ξ è localmente uniforme rispetto alle direzioni $\pm\eta \in \pm\Gamma_\xi \cap S^{n-1}$ (per il già citato Teorema di Gårding). Da ciò si vuol dedurre analoga uniformità della (0.1) rispetto a $\pm\eta \in \pm\Gamma \cap S^{n-1}$. Considerando anche, più in generale un polinomio con parte principale P_m verificante (1.1) e denotando con $\pm\Gamma$ i coni ottenuti come sopra abbiamo infatti

LEMMA 1.3. *Sia M un sottoinsiene compatto di $\pm\Gamma \cap S^{n-1}$. Esistono allora delle costanti C', C'' tali che:*

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad C'|\xi|^{1-1/p} \leqslant |t| \leqslant C''|\xi|, \qquad \eta \in M \tag{1.6}$$

implica

$$|P(\xi + it\eta)| \geqslant c|\xi|^{m-1},$$

(*ove p è il numero di zeri reali come nel Lemma* 1.1).

DIMOSTRAZIONE. Come già accennato P_m è localmente iperbolico in ogni $\xi \in S^{n-1}$ rispetto a ogni $\pm\eta \in M$ e quindi se $\zeta \in \mathbf{C}^n$ è piccolo abbastanza, ma indipendentemente da $\pm\eta \in M$, sussiste la fattorizzazione

$$P_m(\xi + \zeta + t\eta) = G(\zeta, t, \eta) \prod_{j=1}^{m_\xi} (t - \lambda_j(\zeta, \eta))$$

ove m_ξ è la molteplicità di P_m in ξ ed ove gli zeri piccoli $\lambda_j(\zeta, \eta)$ di $P_m(\xi + \zeta + t\eta)$ come polinomio di t, sono reali se $\zeta \in \mathbf{R}^n$. G è continua e risultando $G(0, 0, \eta) = P_{m\xi}(\eta) \neq 0$ se $\pm\eta \in M$, ne segue che vale uniformenente su $\pm\eta \in M$ l'inuguaglianza: $|P_m(\xi + \zeta + it\eta)| \geqslant c_\xi\, |t|^{m_\xi}$, purchè ζ e t siano reali e piccoli. Un ricoprimento della sfera unitaria dà allora $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$: $|P_m(\xi + it\eta)| \geqslant c'\, |\xi|^q\, |t|^p$ purchè $|t| \leqslant C''\, |\xi|$ (con $C'' \leqslant 1$). Infatti $m_\xi \leqslant p$ $\forall \xi \in S^{n-1}$ e quindi $(|t|/|\xi|)^{m_\xi} \geqslant (|t|/|\xi|)^p$ se $|t|/|\xi| \leqslant C'' \leqslant 1$. D'altra parte $|P(\xi + it\eta) - P_m(\xi + it\eta)| < c\, |\xi|^{m-1}$ per quanche c purchè $|t| \leqslant C''|\xi|$ (e purchè $|\xi| \geqslant 1$). Si conclude allora come nella prima parte del Lemma 1.2.

Da (1.6) segue $P_m(\eta) \neq 0$ $\forall \eta \in \pm\Gamma$ (cfr. le considerazioni che seguono il teorema 1.2); e inoltre segue che il numero degli zeri reali t di $P_m(\xi + t\eta) = 0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ è indipendente da η (oltre che da ξ non parallelo a η secondo il Lemma 1.1) fintantochè $\eta \in \pm\Gamma$. Se infatti si fattorizza

$$P_m(\xi + t\eta) = P_m(\eta) \prod_{j=1}^{p_\eta} (t - \lambda_j(\xi, \eta)) \prod_{j=p_\eta+1}^{m} (t - \lambda_j(\xi, \eta)), \qquad \xi \in \mathbf{R}^n,\ \xi \nparallel \eta$$

ove si sono raggruppati separatamente i p_η zeri reali e gli m-p_η complessi (e pertanto verificanti $|\mathrm{Im}\, \lambda_j(\xi, \eta)| > C''|\xi + \mathrm{Re}\, \lambda_j(\xi, \eta)\eta|$, $j = p_\eta + 1, \dots, m$, localmente uniformemente in η) allora attesa la continuità della dipendenza da η degli zeri, si deduce che p_η è localmente costante rispetto a η e quindi costante. Si osservi infine che essendo ogni $\pm\eta \in \pm\Gamma \cap S^{n-1}$ non caratteristico per P_m esiste di conseguenza una costante $k/2$ per cui vale uniformemente rispetto a $\pm\eta \in M$ l'inuguaglianza:

$$|\langle \zeta, \eta\rangle| \leqslant \frac{k}{2}\,(1 + |\pi_\eta(\zeta)|) \qquad \text{se } P(\zeta) = 0,\ \ \zeta \in \mathbf{C}^n,$$

ove π_η indica la proiezione lungo la retta $\pm\eta$ sullo spazio lineare $n-1$ dimensionale ortogonale a tale retta. Se quindi $\xi \in \mathbf{R}^n$ e $|\langle \xi, \eta\rangle| \geqslant$

$\geqslant k(1+|\pi_\eta(\xi)|)$ risulta

$$|P(\xi+it\eta)|>c'\left(1+|\pi_\eta(\xi)|\right)^m \tag{1.7}$$

per qualche c' indipendente da $\pm\eta\in M$. Se d'altra parte $|\langle\xi,\eta\rangle|<$ $<k(1+|\pi_\eta(\xi)|)$ allora se $|t|\geqslant C'(1+k^2)^{(p-1)/2p}\cdot(1+|\pi_\eta(\xi)|)^{1-1/p}$ conseguentemente si ha $|t|\geqslant C'\,|\xi|^{1-1/p}$.

Allora mettendo assieme (1.6) e (1.7) risulta:

$$\xi\in\mathbb{R}^n,\qquad t\in\mathbb{R}, \tag{1.8}$$

$$C'(1+k^2)^{(p-1)/2p}\left(1+|\pi_\eta(\xi)|\right)^{1-1/p}\leqslant|t|\leqslant C''\,|\xi|\,,\quad\pm\eta\in M$$

$$\Rightarrow |P(\xi+it\eta)|\geqslant c''\left(1+|\pi_\eta(\xi)|\right)^{m-1}.$$

Passiamo ora a provare come la condizione (1.1) sulla parte principale P_m di P caratterizzi l'esistenza di soluzione fondamentale di P con supporto singolare in $\{x_n>0\}\cup\{0\}$ ed anzi nel sottoinsieme conico e convesso Γ^* di tale semispazio definito come $\{x\in\mathbb{R}^n\colon\langle x,\eta\rangle\geqslant0\ \forall\eta\in\Gamma\}$. Si noti come la nostra ipotesi verta solo sulla parte principale di P il che avrà come contropartita la possibilità di costruire una soluzione fondamentale con singolarità in Γ^* che è soltanto una ultradistribuzione. Se pretendessimo che fosse una distribuzione dovremmo rafforzare l'ipotesi come mostrato da Fehrman in [1]. Poniamo $\vartheta=(0,\dots,1)$, e $\varrho=p/(p-1)$ ove p è il numero di zeri reali di $P_m(\zeta',\zeta_n)$, $\zeta'\in\mathbb{R}^{n-1}$, che può essere supposto $\geqslant1$.

TEOREMA 1.1. *Se la parte principale P_m di P è iperbolico-ellittica rispetto a $\pm\vartheta$ allora P ammette soluzioni fondamentali $E_\pm$ con*

$$\operatorname{supp\,sing} E_\pm\subset\pm\Gamma^*,\qquad\pm\Gamma^*\subset\subset\{\pm\langle x,\vartheta\rangle\geqslant0\}\,.$$

Tali soluzioni sono ultradistribuzioni appartenenti perlomeno al duale dello spazio delle funzioni ultradifferenziabili a supporto compatto di classe $\gamma^{(\varrho)}$.

DIMOSTRAZIONE. La costruzione mediante immagine reciproca di Fourier ricalca quella classica per operatori omogenei e per corrispondenti soluzioni distribuzioni deducibile da [1]. Per ogni fissato $\pm\eta\in\pm\Gamma\cap S^{n-1}$ vale la (1.6) ed anzi tale condizione vale localmente uniformemente su $\pm\eta$. Se allora r è grande abbastanza perchè $C'\,|\xi|^{1/\varrho}\leqslant$

$\leqslant C''|\xi|$ $\forall |\xi| > r$, si scelga una funzione $t(\xi)$ definita in $\{|\xi| \geqslant r\}$ con $C'|\xi|^{1/\varrho} \leqslant t(\xi) \leqslant C''|\xi|$ che all'inizio si supporrà coincidere con la sua limitazione sinistra. Si ponga $D_\pm = \{\xi \mp it(\xi)\eta;\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ |\xi| \geqslant r\}$ e si definiscano

$$E'_\pm(\varphi) = (2\pi)^{-n} \int_{D_\pm} \frac{\hat{\varphi}(-\zeta)}{P(\zeta)}\, d\zeta \qquad \forall \varphi \in \gamma_0^{(\varrho)}(\mathbf{R}^n)\,, \tag{1.9}$$

ove si è denotata con $\hat{\varphi}$ la trasformata di Fourier di φ. Gli integrali (1.9) convergono dato che se supp $\varphi \subset \{|x| \leqslant T\}$ allora per il Teorema di Paley-Wiener per funzioni di classe $\gamma_0^{(\varrho)}$, vale la stima $|\hat{\varphi}(-\zeta)| \leqslant$ $\leqslant C_{T,C'} \exp(TC'|\xi|^{1/\varrho} - 2TC'\,|\xi|^{1/\varrho})$ $\forall \zeta = \xi \mp iC'|\xi|^{1/\varrho}\eta$. (Il caso $\varrho = \infty$ e quindi $\gamma_0^{(\varrho)}(\mathbf{R}^n) = \mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ va invece trattato usando la stima $|\hat{\varphi}(-\zeta)| \leqslant C_N|\zeta|^{-N}$). Risulta inoltre $P\,E'_\pm(\varphi) = E'_\pm({}^tP\varphi) = (2\pi)^{-n} \int_{D_\pm} \hat{\varphi}(-\zeta)\, d\zeta$, ove ${}^tP(D) = P(-D)$.

Dato che la forma $\hat{\varphi}(-\zeta)\, d\zeta$ è chiusa in $\mathbf{C}^n$ e dato che vale una stima del tipo $|\hat{\varphi}(-\zeta)| \leqslant c \exp(-c'|\zeta|^{1/\varrho})$ almeno quando $|\mathrm{Im}\,\zeta| \leqslant C'$ $|\mathrm{Re}\,\zeta|^{1/\varrho}$, allora muovendo il cammino di integrazione con la sostituzione $\xi \mp iC'|\xi|^{1/\varrho}\eta \to \xi$ possiamo concludere in virtù del Teorema di Cauchy che gli integrali $(2\pi)^{-n} \int_{D_\pm} \hat{\varphi}(-\zeta)\, d\zeta$ differiscono da $(2\pi)^{-n}$ $\int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(-\zeta)\, d\zeta = \varphi(0)$ solo per degli integrali $(2\pi)^{-n} \int_{K_\pm} \hat{\varphi}(-\zeta)\, d\zeta$ ove $K_\pm$ sono n-catene compatte limitate da $\partial D_\pm$. Perciò $PE'_\pm$ differiscono dalla distribuzione di Dirac per delle funzioni analitiche intere $h_\pm$ che sono precisamente le trasformate inverse di Fourier dei funzionali analitici definiti dagli integrali su $K_\pm$. Si possono allora correggere $E'_\pm$ con delle soluzioni intere delle equazioni $Pf_\pm = h_\pm$ (cfr. Teorema di Malgrange di risolubilità sui convessi) in modo da ottenere delle « vere » soluzioni fondamentali $E_\pm = E'_\pm - f_\pm$.

Resta da stimare supp sing $E_\pm$ ovvero supp sing $E'_\pm$. A tal fine si prendano $\varphi_\pm \in \gamma_0^{(\varrho)}$ con supp $\varphi_\pm \subset \{\langle x, \pm\eta\rangle < 0\}$; risulterà allora $\langle x, \pm\eta\rangle < -\varepsilon$ $\forall x \in$ supp $\varphi_\pm$ e di conseguenza

$$|\hat{\varphi}_\pm(-\zeta)| \leqslant c \exp\big(-\varepsilon\, t(\xi)\big) \qquad \forall \zeta \in D_\pm, \text{ e per qualche } c.$$

Scegliamo ora $t(\xi) = C''|\xi|$; il cambiamento di cammino d'integrazione è possibile, modulo analitiche intere calcolate su $\varphi_\pm$, perchè nella zona intermedia ove $C'|\xi|^{1/\varrho} \leqslant t(\xi) \leqslant C''|\xi|$ risulta $|P| > c'$ per qualche c' e inoltre $|\hat{\varphi}_\pm(-\zeta)| \leqslant c\, \exp(-\varepsilon\, C'|\xi|^{1/\varrho})$. In definitiva per ogni multiindice α risulta

$$|D^\alpha E'_\pm(\varphi_\pm)| = |E'_\pm((-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi_\pm)| \leqslant (2\pi)^{-n}\int\limits_{D_\pm}\frac{|\zeta|^{|\alpha|}\,|\hat{\varphi}_\pm(-\zeta)|}{|P(\zeta)|}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n}\int\limits_{D_\pm}\frac{|\zeta|^{|\alpha|}c\exp\left(-\varepsilon C''|\xi|\right)}{c'}\,|d\zeta| \leqslant c''^{|\alpha|+1}|\alpha|!\,.$$

Ne segue, attesa l'arbitrarietà di $\varphi_\pm$, che $E_\pm$ hanno supporto singolare contenuto nei semispazi $\{\langle x, \pm\eta\rangle \geqslant 0\}$. Dato che possiamo deformare $\pm\eta$ negli insiemi $\pm\Gamma\cap S^{n-1}$ come assicura la (1.6) si possono conseguentemente stimare le singolarità di $E_\pm$ con l'intersezione rispetto a η di tali semispazi ovvero con i coni $\pm\Gamma^*$. La dimostrazione è conclusa.

Si potrebbe migliorare la conclusione del teorema e, assumendo $\vartheta = (0, \ldots, 1)$, mostrare che le soluzioni $E_\pm$ sono, per così dire, distribuzioni rispetto alla variabile x_n ovvero appartengono a $\gamma_0^{(\varrho)'}(\mathbb{R}^{n-1})$ $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.

Infatti tenendo conto della condizione (1.8) esse coincidono, modulo analitiche intere, con le ultradistribuzioni:

$$(1.10)\qquad E_\pm(\varphi) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{D_\pm}\frac{\hat{\varphi}(-\zeta)}{P(\zeta)}\,d\zeta \qquad \forall\varphi\in\gamma_0^{(\varrho)}(\mathbb{R}^{n-1})\,\mathfrak{D}(\mathbb{R})\,,$$

ove $D_\pm = \{\zeta = \xi \mp it(\xi)\eta;\ |\xi| \geqslant r,\ t(\xi) = C(1 + |\xi'|)^{1/\varrho}\}$ ove C è data da (1.8).

Si noti che gli integrali (1.10) convergono dato che se supp $\varphi\subset\{|x| < T\}$ allora combinando la stima della trasformata di Fourier di funzioni di classe $\gamma_0^{(\varrho)}$ nelle variabili x' e di classe $\mathfrak{D}$ nella variabile x_n risulta

$$|\hat{\varphi}(-\zeta)| \leqslant C_{T,C,N}(1 + |\xi_n|)^{-N}\exp\left(TC|\xi'|^{1/\varrho} - 2TC|\xi'|^{1/\varrho}\right)\quad \forall\zeta\in D_\pm \text{ e } \forall N\,.$$

Passiamo ora a provare l'inverso del teorema precedente. È noto che esistono partizioni dell'unità di classe $\gamma^{(\varrho)}$, $\varrho > 1$; di più si può provare che ce ne sono di « asintoticamente analitiche ».

E cioè fissato un compatto $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ e un suo intorno Ω, si può trovare $\forall N\in\mathbb{N}$ una funzione $\chi_N\in\gamma_0^{(\varrho)}(\Omega)$, $\chi_N \equiv 1$ in K, che verifica

$$|D^\alpha \chi_N| \leqslant C^{|\alpha|+1}N^{|\alpha|} \qquad \forall\ |\alpha| \leqslant N$$

(con C indipendente da N).

Il risultato è classico per funzioni di classe C^∞ e l'estensione a quelle di classe $\gamma^{(\varrho)}$ (con $\varrho > 1$) è del tutto ovvia.

TEOREMA 1.2. *Supponiamo che P abbia soluzione fondamentale E, ultradistribuzione appartenente a $\gamma_0^{(\varrho)'}$, $1 < \varrho \leqslant \infty$, con supporto singolare contenuto in un cono proprio Γ^*. Allora per ogni parte compatta $M \subset \Gamma \cap \cap S^{n-1}$ esistono costanti C' e C'' tali che*:

$$\text{(1.11)} \qquad \xi \textit{ e } t \textit{ reali}, \ \xi \textit{ grande}, \ \eta \in M, \ C'|\xi|^{1/\varrho} \leqslant t \leqslant C''|\xi| \quad \textit{implica}$$
$$P(\xi - it\eta) \neq 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si fonda sulla partizione dell'unità di classe $\gamma^{(\varrho)}$ già menzionata e sul Teorema di struttura locale di ultradistribuzioni dovuto a Komatsu [5].

Sia $\chi \in \gamma^{(\varrho)}$, $\chi \equiv 1$ in $\{|x| \leqslant R\}$, e supp $\chi \subset \{|x| < R + 1\}$. Denotata con $\delta = \delta(x)$ la distribuzione di Dirac, poniamo $F = \delta - P(\chi E)$ che è a supporto compatto e nulla in un intorno di 0.

Se allora u $(\in \gamma^{(\varrho)})$ risolve l'equazione ${}^tP\,u = 0$ si ha

$$D^\alpha u(0) = \langle \delta, D^\alpha u \rangle = \langle \delta - P(\chi E), D^\alpha u \rangle = \langle F, D^\alpha u \rangle ,$$

ove il crochet indica la dualità fra $\gamma^{(\varrho)'}$ e $\gamma^{(\varrho)}$. Denotiamo con $(\Gamma^*)_\varepsilon$ l'insieme $\{x\colon d(x, \Gamma^*) \leqslant \varepsilon\}$ e con K il compatto $\{R - \varepsilon \leqslant |x| \leqslant R + 1\} \cap \cap (\Gamma^*)_{4\varepsilon}$. Scegliamo ε piccolo abbastanza perchè risulti

$$H_K(-\eta) \leqslant -c < 0 \qquad \forall \eta \in M \cap S^{n-1} \qquad (\text{ove } H_K(-\eta) = \sup_{x \in K} \langle x, -\eta \rangle) .$$

Dato che avremo bisogno di controllare le derivate di χ, scegliamo $\chi = \chi_N \in \gamma_0^{(\varrho)}$ con le seguenti proprietà:

$$\text{(1.12)} \qquad \chi_N \equiv 1 \text{ in } \{|x| \leqslant R\} \text{ e supp } \chi_N \subset \{|x| < R + 1\}$$

$$\text{(1.13)} \qquad \chi_N = \chi_1 \text{ in } (\Gamma^*)_{2\varepsilon} \text{ (cioè è indipendente da } N)$$

$$\text{(1.14)} \qquad |D^\alpha \chi_N| \leqslant C^{|\alpha|+1} N^{|\alpha|} \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus (\Gamma^*)_{3\varepsilon} \qquad \forall |\alpha| \leqslant N .$$

Una tale successione $\{\chi_N\}_N$ può essere banalmente costruita a partire da una successione $\{\chi'_N\}_N$ con $\chi'_N \equiv 1$ in $\{|x| \leqslant R\}$ e supp $\chi'_N \subset \{|x| < < R + 1\}$ e verificante la stima (1.14) la cui esistenza è assicurata dall'osservazione precedente il Teorema. Basta sceglere allora φ di classe $\gamma^{(\varrho)}$, $\varphi \equiv 1$ in $(\Gamma^*)_{2\varepsilon}$, supp $\varphi \subset (\Gamma^*)_{3\varepsilon}$, e porre

$$\chi_N = \varphi\, \chi_1' + (1-\varphi)\, \chi_N .$$

Notiamo ora che risulta, indipendentemente da N,

$$D^\alpha u(0) = \langle \delta - P(\chi_N E),\, D^\alpha u\rangle = \langle F_N, D^\alpha u\rangle . \tag{1.15}$$

Andiamo a calcolare F_N su $D^\alpha u$ ove $u(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, è una soluzione esponenziale $e^{-i\langle x,\zeta\rangle}$, $P(\zeta) = 0$. Nel fare il conto separeremo la zona di singolarità di F_N, contenuta in $\Gamma^* \cap \{R \leqslant |x| < R+1\}$ in cui tuttavia $|u|$ si stima con un esponenziale negativo almeno quando $\operatorname{Im}\zeta \in -M$, da quella ove E è analitica e quindi F_N è conseguentemente regolare; resterà una zona intermedia in cui useremo sia la regolarità di F_N sia la stima con esponenziale negativo.

A tal fine prendiamo tre funzioni ψ_i, $i = 1, 2, 3$ di classe $\gamma^{(\varrho)}$ con $\sum_{i=1}^{3} \psi_i \equiv 1$, supp $\psi_1 \subset \overset{\circ}{\widehat{(\Gamma^*)_{2\varepsilon}}}$, supp $\psi_2 \subset \overset{\circ}{\widehat{(\Gamma^*)_{4\varepsilon}}} \setminus (\Gamma^*)_\varepsilon$, supp $\psi_3 \subset \mathbf{R}^n \setminus (\Gamma^*)_{3\varepsilon}$. Decomponiamo $\langle F_N,\, D_\alpha u\rangle$ nella somma

$$\sum_{i=1}^{3} \langle \psi_i F_N, D^\alpha u\rangle . \tag{1.16}$$

Stimiamo il primo addendo renuto conto che $\chi_N = \chi_1$ su supp ψ_1. Ricordiamo che per il Teorema di struttura locale di ultradistribuzioni [5] esiste una sequenza di misure $\{f_\beta\}_{\beta \in \mathbf{N}^n}$ a supporto in un intorno arbitrario Ω di supp $\psi_1 F_1$ che verificano, per certe costanti positive le stime

$$\|f_\beta\| \leqslant C \frac{L^{|\beta|}}{|\beta|!^\varrho}$$

ove $\|f_\beta\| = \sup\limits_{\varphi \in C^0(\Omega)} |\int f \varphi\, dx| / \max |\varphi|$, in modo che $\psi_1 F_1$ si possa rappresentare come $\sum\limits_{|\beta|=0}^{\infty} D^\beta f_\beta$. Si può allora ottenere la maggiorazione

$$|\langle \psi_1 F_N, D^\alpha u\rangle| \leqslant \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \left| \int f_\beta D^{\alpha+\beta} u\, dx \right| \leqslant \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \|f_\beta\| \sup_{K'} |D^{\alpha+\beta} u| \leqslant$$

(ove il supremum è preso su $K' = (\Gamma^*)_{2\varepsilon} \cap \{R - \varepsilon < |x| < R + 1\}$)

$$\leqslant \sum_{|\beta|=0}^{\infty} C \frac{L^{|\beta|}}{|\beta|!^{\varrho}} |\zeta^{\alpha+\beta}| \exp\left(H_{K'}(\operatorname{Im}\zeta)\right) \leqslant C_1 |\zeta|^{|\alpha|} \exp\left(H_{K'}(\operatorname{Im}\zeta)\right) \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \frac{(L|\zeta|)^{|\beta|}}{|\beta|!^{\varrho}} .$$

Si noti ora che si può stimare

$$\sum_{|\beta|=0}^{\infty} \frac{(L|\zeta|)^{|\beta|}}{|\beta|!^{\varrho}} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(L'|\zeta|)^{m}}{m!^{\varrho}} =$$

(ove L'/L dipende dalla dimensione n)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(L'^{1/\varrho}|\zeta|^{1/\varrho})^m}{m!}\right)^{\varrho} \leqslant \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(L'^{1/\varrho}|\zeta|^{1/\varrho})^m}{m!}\right)^{\varrho} = \exp\left(\varrho L'^{1/\varrho} |\zeta|^{1/\varrho}\right)$$

e quindi in definitiva

$$|\langle \psi_1 F_N, D^{\alpha} u\rangle| \leqslant C_1 |\zeta|^{|\alpha|} \exp\left(H_{K'}(\operatorname{Im}\zeta) + \varrho L'^{1/\varrho}|\zeta|^{1/\varrho}\right) . \tag{1.17}$$

Per stimare il secondo addendo di (1.16) si scelga $w \in \gamma^{(\varrho)}$, $w \equiv 0$ in $\{|x| \leqslant R - \varepsilon\}$ e $w \equiv 1$ in $\{|x| \geqslant R\}$ e quindi in supp $\psi_2 F_N$.
Allora risulta

$$\begin{aligned} |\langle \psi_2 F_N, D^{\alpha} u\rangle| &= |\langle w\psi_2 F_N, D^{\alpha} u\rangle| = |\langle E, \chi_N {}^t P(w\psi_2 D^{\alpha} u)\rangle| \leqslant \\ &\leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant m} \sup_K |D^{\beta}\psi_2| (1 + |\zeta|)^m |\zeta|^{|\alpha|} \exp(H_K(\operatorname{Im}\zeta)) , \end{aligned} \tag{1.18}$$

ove K è (la chiusura di) $\{R - \varepsilon < |x| < R + 1\} \cap (\Gamma^*)_{4\varepsilon} \setminus (\Gamma^*)_{\varepsilon}$.

La stima (1.18) si spiega immediatamente osservando che E è analitica in supp $\psi_2 \cap$ supp χ_N (anzi in K) e notando che la successione χ_N può essere scelta $\leqslant 1$.

Il terzo addendo si stima usando l'analiticità di E in $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma^*$ che implica per E la stima uniforme sui compatti di $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma^*$:

$$|D^{\alpha} E| \leqslant C^{|\alpha|+1} |\alpha|! . \tag{1.19}$$

Si scelga allora anche $\psi_3 = \psi_{3,N}$ con la stima (1.14); ciò obbligherà a prendere variabile anche $\psi_2 = \psi_{2,N}$ mentre ψ_1 resterà fisso. Dato che $\psi_{2,N} = 1 - \psi_{3,N} - \psi_1$ allora

$$|D^\alpha \psi_{2,N}| \leqslant C N^m \qquad \forall |\alpha| \leqslant m$$

il che permetterà di stimare il supremum all'ultimo membro di (1.18).

La stima (1.19) per E unita alla (1.14) per $\psi_{3,N}$ e per χ_N con N sostituito con $N+m$ dà per la formula di Leibniz:

$$|D^\alpha(\psi_{3,N} F_N)| = |D^\alpha(\psi_{3,N} P(\chi_N E))| \leqslant C^{|\alpha|+m+1}(N+m)^{|\alpha|+m}$$

se $|\alpha| \leqslant N$, e da ciò si ottiene per qualche $c \leqslant R+1$

$$|\langle \psi_{3,N} F_N, D^\alpha u\rangle| \leqslant C^{|\alpha|+m+1}(N+m)^{|\alpha|+m} \exp\big(c|\operatorname{Im}\zeta|\big) \qquad \forall |\alpha| \leqslant N . \tag{1.20}$$

Si deduce allora da (1.15) e dalle stime (1.17), (1.18), (1.20), tenendo anche conto della stima per il supremum nell'ultimo membro della (1.18):

$$\begin{aligned}|\zeta|^N \leqslant C_1 |\zeta|^N \exp\big(H_{K'}(\operatorname{Im}\zeta) + \varrho L'^{\,1/\varrho}|\zeta|^{1/\varrho}\big) + \\ + C_2 N^m (1+|\zeta|)^m |\zeta|^N \exp\big(H_K(\operatorname{Im}\zeta)\big) + \\ + C_3^{N+m+1}(N+m)^{N+m} \exp\big(c|\operatorname{Im}\zeta|\big) .\end{aligned}$$

È evidente che se non esitiamo ad aumentare C_1 e a sostituire K' con $K'' = K \cup K'$, allora il secondo termine a destra può essere assorbito dal primo almeno per $|\zeta|$ grande. Se ora si pone

$$\frac{|\zeta|}{C_3 e} - 1 \leqslant N + m \leqslant \frac{|\zeta|}{C_3 e}$$

se ne deduce, per $|\zeta|$ grande,

$$1 \leqslant C_1' \exp\big(H_{K''}(\operatorname{Im}\zeta) + \varrho L'^{\,1/\varrho}|\zeta|^{1/\varrho}\big) + C_3' \exp\big(-c'|\zeta| + c|\operatorname{Im}\zeta|\big) . \tag{1.21}$$

Se si pone allora $\zeta = \xi - it\eta$ con $\eta \in M \cap S^{n-1}$ in modo che $H_{K''}(-\eta)$ sia negativo, se ne deduce che l'inuguaglianza precedente non può sussistere (e che quindi non può essere $P(\zeta) = 0$), quando

$$C'|\xi|^{1/\varrho} \leqslant t \leqslant C''|\xi|$$

ove C' e C'' dipendono dalle costanti ad esponente della (1.21). La dimostrazione è conclusa.

Se ora consideriamo il polinomio in t $P(\zeta + t\eta)$, $\eta \in \Gamma$ allora fattorizzando lo possiamo scrivere, per qualche polinomio $Q \not\equiv 0$ e per una costante $r \leqslant m$,

$$P(\zeta + t\eta) = Q(\zeta) \prod_{j=1}^{r} \left(t - \mu_j(\zeta)\right)$$

almeno nell'insieme $Q(\zeta) \neq 0$. Se (1.11) è soddisfatta Q dev'essere costante. Altrimenti se $Q(\zeta^0) = 0$ ma $Q\,(\zeta^0 + s\zeta^1) \not\equiv 0$, $s \in \mathbf{C}$, allora almeno uno degli zeri $t = \mu_j(\zeta^0 + s\zeta^1)$ avrebbe uno sviluppo in serie convergente di Puiseux attorno a $s = 0$ del tipo $as^{-b}\left(1 + o(1)\right)$, $s \to 0$, con $b > 0$. (Infatti il caso $b \leqslant 0$ $\forall j$ che darebbe $P(\zeta^0 + t\eta) = 0$ $\forall t$ è trivialmente escluso da (1.11).) Muovendo $s \to 0$ lungo una opportuna retta del piano $\mathbf{C}$ in modo che $\operatorname{Im} \mu_j(\zeta^0 + s\zeta^1) = -(C'' - \varepsilon) \cdot |\operatorname{Re} \mu_j(\zeta^0 + s\zeta^1)|\left(1 + o(1)\right)$, $s \to 0$, troveremmo allora una contradizione alla (1.11) non appena s è piccolo (e quindi $|\mu_j|$ è conseguentemente grande).

In secondo luogo dev'essere $r = m$ perchè altrimenti posto $Q = c$ e scelto ζ^0 con $P_m(\zeta^0) \neq 0$, dall'uguaglianza $s^m P_m(\zeta^0)\left(1 + o(1)\right) = c(-1)^r \prod_{j=1}^{r} \mu_j(s\zeta_0)$, $s \to \infty$ si dedurrebbe che almeno uno degli zeri $\mu_j(s\zeta_0)$ ha sviluppo di Puiseux attorno a ∞ del tipo $as^b\left(1 + o(1)\right)$, $s \to \infty$, con $b > 1$. Si conclude quindi come sopra facendo tendere $s \to \infty$ lungo una conveniente retta. (In ciò si è seguito strettamente il Lemma 1.4 di [1].) Si noti che per ottenere le precedenti conclusioni è essenziale che (1.11) sussista non solo puntualmente in η ma anche uniformemente in un intorno di η in S^{n-1}; nel primo caso non si sarebbe sicuri che η è non caratteristico per P_m.

Comunque utilizziamo il risultato precedente e fattorizziamo

$$P(\xi + t\eta) = P_m(\eta) \prod_{j=1}^{m} \left(t - \mu_j(\xi)\right); \qquad P_m(\xi + t\eta) = P_m(\eta) \prod_{j=1}^{m} \left(t - \lambda_j(\xi)\right).$$

Osservando che $s^{-m}P(s\zeta + st\eta) \to P_m(\xi + t\eta)$, $s \to \infty$, se ne deduce che

$$\left\{\frac{\mu_j(s\zeta)}{s}\right\}_{j=1,\dots,m} \to \{\lambda_j(\zeta)\}_{j=1,\dots,m} \qquad s \to \infty.$$

Infine dato che per s grande (e per ξ reale e non parallelo a η), non può essere

$$C'|s\xi + \mathrm{Re}\,\mu_j(s\xi)\eta|^{1/\varrho} \leqslant -\mathrm{Im}\,\mu_j(s\xi) \leqslant C''|s\xi + \mathrm{Re}\,\mu_j(s\xi)\eta|$$

allora non può essere, se non esitiamo a ingrandire C'':

$$0 < -\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi) \leqslant C''|\xi + \mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi)\eta|\,.$$

Perciò $\xi \in \mathbf{R}^n$, $P_m(\xi + t\eta) = 0$ implica o $t \in \mathbf{R}$ oppure $|\mathrm{Im}\,t| > C''|\xi + \mathrm{Re}\,t\eta|$ ove C'' è funzione (localmente limitata) di $\pm\eta \in \pm \Gamma \cap S^{n-1}$.

Sommando questo risultato col Teorema 1.1 si conclude

TEOREMA 1.3. *P ammette soluzioni fondamentali (ultradistribuzioni) $E_\pm$ con supporto singolare contenuto in coni propri e convessi $\pm\Gamma^*$ se e solo se la sua parte principale è iperbolica-ellittica rispetto ad ogni direzione di $\pm\Gamma \cap S^{n-1}$.*

2. Operatori iperbolico-ipoellittici

I precedenti argomenti servono anche allo studio della singolarità di classe $\Gamma^{(\sigma)}$, $(\sigma > 1)$, di soluzioni fondamentali.

TEOREMA 2.1. *P ammette soluzione fondamentale in $\gamma^{(\varrho)'}$ con $\Gamma^{(\sigma)}$-supp sing, $(1 \leqslant \sigma < \varrho < \infty)$, contenuto in un cono proprio di $\{\langle x, \vartheta\rangle \geqslant 0\}$ se e solo se esistono un intorno conico $\Gamma \ni \vartheta$ e costanti C', C'' per cui (0.2) è soddisfatta.*

DIMOSTRAZIONE. La necessità della condizione algebrica segue da ovvia variante del Teorema 1.2. Per la sufficienza si osservi che se $A' > C'$, $A'' < C''$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ risulta

$$(2.1)\qquad |P(\xi - it\eta)| > c|\xi|^\nu,$$

$$\text{se } A'|\xi|^{1/\varrho} < t < A''|\xi|^{1/\sigma},\ \eta \in \Gamma' \cap S^{n-1},\ |\xi| > 1$$

(per qualche $c > 0$ e per qualche numero razionale ν).

Per provarlo faremo vedere innanzitutto che in tali ipotesi su ξ, t e η, il polinomio in τ, $P(\xi - it\eta + \tau\eta)$ ha gli zeri τ_i che verificano

$$(2.2)\qquad |\tau_i| > c\,|\xi|^\mu,\ \mu \geqslant 0.$$

(Con c si stanno denotando differenti costanti.) Da $P(\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i \eta - i(t - \mathrm{Im}\, \tau_i)\eta) = 0$, $A'|\xi|^{1/\varrho} < t < A''|\xi|^{1/\sigma}$, segue infatti $t - \mathrm{Im}\, \tau_i > C''|\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i \eta|^{1/\sigma}$ oppure $t - \mathrm{Im}\, \tau_i < C'|\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i \eta|^{1/\varrho}$ e quindi $\mathrm{Im}\, \tau_i < A''|\xi|^{1/\sigma} - C''|\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i\eta|^{1/\sigma}$ oppure $\mathrm{Im}\, \tau_i > A'|\xi|^{1/\varrho} - C'|\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i \eta|^{1/\varrho}$. Se quindi è $|\mathrm{Re}\, \tau_i| < c|\xi|$, con c opportuna, segue $C''|\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i\eta|^{1/\sigma} \geqslant B''|\xi|^{1/\sigma}$, $A'' < B'' < C''$; $C'|\xi + \mathrm{Re}\, \tau_i \eta|^{1/\varrho} \leqslant B'|\xi|^{1/\varrho}$, $C' < B' < A'$, e quindi $\mathrm{Im}\, \tau_i < -(B'' - A'')|\xi|^{1/\sigma}$ oppure $\mathrm{Im}\, \tau_i > (A' - B')|\xi|^{1/\varrho}$ da cui la (2.2).

Da (2.2) segue che se $|\tau| < c|\xi|^\mu$ allora

$$\left|\frac{P(\xi - it\eta + \tau\eta)}{P(\xi - it\eta)}\right| = \prod_i \left|\frac{\tau - \tau_i}{\tau_i}\right| \leqslant 2^m .$$

Applicando quindi le disuguaglianze di Cauchy alla funzione $\tau \to P\cdot(\xi - it\eta + \tau\eta)$, (e ponendo $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^{|\alpha|}P(\xi)/\partial\xi^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$), si ottiene la stima

$$(2.3) \qquad \sum_j \Big|\sum_{|\alpha|=j} P^{(\alpha)}(\xi - it\eta)\eta^\alpha j!/\alpha!\Big| \leqslant 2^m |P(\xi - it\eta)| \sum_j \frac{j!}{c^j |\xi|^{\mu j}} \leqslant c|P(\xi - it\eta)| .$$

Per mostrare come da (2.3)segua (2.1) osserviamo che un polinomio $Q(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, privo di zeri (reali) deve soddisfare per qualche razionale ν:

$$(2.4) \qquad |Q(\xi)| \geqslant c\, |\xi|^\nu, \quad |\xi| \to \infty, \quad (c > 0) .$$

Si consideri infatti la funzione $f(r) = \inf\limits_{|\xi| \leqslant r} |Q(\xi)|$ che può essere riscritta come $-f(r)^2 = \sup\limits_{|\xi|^2 - r^2 \leqslant 0} - |Q(\xi)|^2$. Usando allora il Teorema di Seidenberg [6] e gli sviluppi in serie di Puiseux nella forma del Lemma 2.1 dell'appendice di [3], segue $f(r) = c' r^\nu (1 + o(1))$, $r \to \infty$, per qualche ν razionale; se ne deduce che vale (2.4) per $c = c'/2$. Analoga conclusione si ha quando ξ appartenga ad un insieme di $\mathbf{R}^n$ che possa essere descritto mediante un numero finito di equazioni e disequazioni $f_i(\xi) \gtreqless 0$ con f_i polinomi a coefficienti reali.

Applicando infine (2.4) al polinomio $\sum\limits_j \Big|\sum\limits_{|\alpha|=j} P^{(\alpha)}(\xi - it\eta)\eta^\alpha j!/\alpha!\Big|^2$ nelle variabili reali (ξ, η, t), (che ovviamente non si annulla mai quando $\eta \in \Gamma \cap S^{n-1}$ perchè altrimenti si avrebbe, identicamente in τ, $P(\xi - it\eta + \tau\eta) = 0$), otteniamo (2.1) attraverso (2.3). (Si noti che $\forall \Gamma' \subset\subset \Gamma$ esiste Γ'' ($\Gamma' \subset \Gamma'' \subset\subset \Gamma$) con $\overline{\Gamma''} \cap S^{n-1}$ descrivibile mediante (dis)equazioni algebriche.)

Utilizzando infine (2.1) e ragionando come nel Teorema 1.1 si riconosce che P ammette una soluzione fondamentale in $\gamma_0^{(\varrho)'}$ con $\Gamma^{(\sigma)}$-supp sing contenuto nel cono proprio Γ^*.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Fehrman, *Hydribs between hyperbolic and elliptic differential operators with constant coefficients*, Ark. for Math., **13** (1975), pp. 209-235.

[2] L. Gårding, *Local hyperbolicity*, Israel J. Math., **13** (1972), pp. 65-81.

[3] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[4] M. Kashiwara, *Sugli operatori differenziali alle derivate parziali a coefficienti costanti $\mathscr{C}$-iperbolici*, Surikaiseki-Kenkyusho Kokyuroku, **145** (1972), pp. 168-171 (in Giapponese).

[5] H. Komatsu, *Ultradistributions* I, *Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I-A Math., **20** (1973), pp. 25-105.

[6] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. Math., (2), **60** (1954), pp. 365-374.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° febbraio 1983.