Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Rodney C. Bassanezi
Gabriele H. Greco

Sull'additività dell'integrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 249-275
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__249_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 72 (1984)

Sull'additività dell'integrale.

RODNEY C. BASSANEZI - GABRIELE H. GRECO (*)

0. Introduzione.

Un *integrale* è un funzionale $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$, il cui dominio $\mathbf{B}$ è una famiglia non vuota di funzioni numeriche positive definite su uno stesso insieme X, tale che (1) le funzioni af, $f \wedge a$, $f - f\wedge a$ appartengono a $\mathbf{B}$ per ogni $f \in \mathbf{B}$ ed $a \in [0, +\infty)$; (2) $T(0) = 0$ e T è crescente; (3) $T(f) = T(f\wedge a) + T(f - f\wedge a) = \lim_{n\to+\infty} T(f\wedge n) = \lim_{n\to+\infty} T(f - f\wedge(1/n))$ per ogni $f \in \mathbf{B}$ ed ogni $a \in [0, +\infty)$.

Se $\alpha\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ è una *funzione d'insieme monotona* definita sull'insieme delle parti di X (cioè $\alpha(\emptyset) = 0$ e α è crescente), allora il funzionale $\int_X - \,d\alpha\colon [0, +\infty]^X \to [0, +\infty]$, definito da $\int_X f\,d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}\,dt$, è un integrale, detto *integrale rispetto alla funzione d'insieme monotona* α.

Viceversa è noto [8] che ogni integrale è la restrizione di un integrale rispetto ad una funzione d'insieme. Inoltre l'insieme di tutte le funzioni d'insieme che rappresentano un integrale è un intervallo, rispetto all'ordine puntuale, che ha un elemento minimo e un massimo.

Quindi nel seguito non si mancherà di generalità se ci si limiterà a studiare le proprietà degli integrali rispetto ad una funzione d'insieme.

Una proprietà che non genera nessun imbarazzo nella teoria clas-

(*) Indirizzo degli AA.: R. C. BASSANEZI: Istituto de Matematica, Universidade Estadual de Campinas, C.P. 6155, 13100 Campinas-SP, Brasil (this author's work was partially supported by the FAPESP); G. H. GRECO: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo, Italia.

sica della misura è l'additività. Additività che in generale non è vera per gli integrali, definiti sopra. Si impongono pertanto alcune domande.

1ª) Quali sono le coppie di funzioni f, g tali che la seguente uguaglianza (∗) valga per ogni funzione d'insieme monotona α?

$$(*)\qquad \int_X (f+g)\,d\alpha = \int_X f\,d\alpha + \int_X g\,d\alpha$$

2ª) Fissata una famiglia $\mathbf{H}$ di sottoinsiemi di X, quali sono quelle funzioni d'insieme α che soddisfano (∗) per ogmi coppia f, g di funzioni $\mathbf{H}$-misurabili?

3ª) Fissata una funzione d'insieme α, quali sono le funzioni f che soddisfano la (∗) per ogni funzione g?

L'oggetto di questo articolo è rispondere a **1ª**, **2ª**, **3ª**, trarne alcune conseguenze e rilevare le connessioni tra esse e altre nozioni presenti in altri articoli.

1. Preliminari.

Con $\overline{\mathbf{R}}^X$ si denota l'insieme di tutte le funzioni definite su X e a valori nella retta estesa $\overline{\mathbf{R}}$; queste funsioni sono dette, semplicemente, *funzioni numeriche*.

Sia f_n, $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$. Si dirà che la successione $\{f_n\}_n$ *subconverge uniformemente verso* f, qualora valga:

$$(1.1)\qquad \inf_{x\in A} f(x) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \inf_{x\in A} f_n(x) \qquad \textit{per ogni } A\subset X\,.$$

Teorema 1.1. *Siano f_n, g_n, f, $g \in [0, +\infty]^X$. Se le successioni $\{f_n\}_n$, $\{g_n\}_n$ subconvergono uniformemente, rispettivamente, verso f, g, allora $\{f_n + g_n\}_n$ subconverge uniformemente verso $f + g$.*

Dimostrazione. Si è visto (vedi lemma 3.2 in [8]) che (1.1) equivale a:

$$(1.2)\qquad \limsup_{n\to+\infty} \sup_X\, (f\wedge m - f_n) \leqslant 0 \qquad \textit{per ogni } m\in\mathbf{N}\,.$$

Usando questa equivalenza si può dimostrare facilmente quanto richiesto dalla proposizione. ■

Nel seguito si userà questa nozione di subconvergenza uniforme, perchè vale il seguente teorema (vedi [8]).

TEOREMA 1.2. *Siano* f_n, $f \in [0, +\infty]^X$ *tali che* $f_n \leqslant f$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$. *Allora per ogni funzione d'insieme monotona* α *su* X *si ha* $\int\limits_X f\, d\alpha = \lim\limits_n \int\limits_X f_n\, d\alpha$ *qualora* $\{f_n\}_n$ *subconverge uniformemente verso* f. ■

Sia $\mathbf{H}$ una famiglia di sottoinsiemi di X contenente l'insieme vuoto. Una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ si dice $\mathbf{H}$-*misurabile*, se per ogni coppia di numeri reali $a, b \in (0, +\infty)$ con $a > b$ esiste $H \in \mathbf{H}$ tale che $\{f > a\} \subset H \subset \{f > b\}$ [7]. L'insieme di tutte queste funzioni misurabili è indicato con il simbilo $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$. Le funzioni $\mathbf{H}$-misurabili con un numero finito di valori sono dette *funzioni semplici* $\mathbf{H}$-*misurabili.*

TEOREMA 1.3 [8]. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$. *Se* f *è* $\mathbf{H}$-*misurabile, allora esiste una successione* $\{f_n\}_n \subset [0, +\infty]^X$ *di funzioni semplici* $\mathbf{H}$-*misurabili tale che* $\{f_n\}_n$ *subconverge uniformemente verso* f *e* $f_n \leqslant f$ *per ogni* n *Inoltre queste* f_n *possono essere scelte in modo che le funzioni* $2^n f_n$ *siano a valori interi.* ■

L'insieme $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è un dominio di integrazione su X. Ricordiamo che una famiglia non vuota $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ si dice *dominio di integrazione su* X, se

$$a \in [0, +\infty), f \in \mathbf{B} \Rightarrow af, f \wedge a, f - f \wedge a \in \mathbf{B}\,. \tag{1.3}$$

TEOREMA 1.4 [7]. *Se* $\mathbf{H}$ *è un reticolo di sottoinsiemi di* X, *allora*

$$f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) \Rightarrow f + g, f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})\,. \quad ■ \tag{1.4}$$

Sia $\gamma\colon \mathbf{H} \to [0, +\infty]$ una *funzione d'insieme monotona su* X, cioè $\mathbf{H}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, $\emptyset \in \mathbf{H}$ e $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$ per ogni $A, B \in \mathbf{H}$ con $A \subset B$. Se $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, l'integrale « $\int\limits_X f\, d\gamma$ » di f rispetto a γ è definito dalla posizione $\int\limits_X f\, d\gamma = \int\limits_X f\, d\alpha$, dove $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme monotona su X che estende γ. Si verifica facilmente che questa è una buona definizione, perchè non dipende dalla estensione α di γ che si sceglie.

Sia $\mathbf{B}$ un dominio di integrazione su X. Una applicazione T: $\mathbf{B} \to [0, +\infty]$ si dice *integrale su* X, se per ogni f, $g \in \mathbf{B}$ e per ogni $a \in [0, +\infty)$ valgono:

$$(\mathrm{I}.1) \qquad T(0) = 0$$

$$(\mathrm{I}.2) \qquad f \leqslant g \Rightarrow T(f) \leqslant T(g)$$

$$(\mathrm{I}.3) \qquad T(f) = T(f \wedge a) + T(f - f \wedge a)$$

$$(\mathrm{I}.4) \qquad T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$$

$$(\mathrm{I}.5) \qquad T(f) = \lim_{n \to +\infty} T\big(f - f \wedge (1/n)\big).$$

Si dirà che una funzione d'nsieme monotona su X γ: $\mathbf{H} \to [0, +\infty]$ *rappresenta l'integrale* T, se

$$(1.5) \qquad \mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) \quad e \quad T(f) = \int_X f\, d\gamma \quad per\ ogni\ f \in \mathbf{B}\,.$$

Ad ogni integrale T sono associate le funzioni d'insieme α_T, β_T: $\mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ monotone, definite per ogni $A \subset X$ da

$$(1.6) \qquad \alpha_T(A) = \sup\{T(f): f \in \mathbf{B}, f \leqslant \varphi_A\} \quad e$$
$$\beta_T(A) = \inf\{T(f):\ f \in \mathbf{B},\ f \geqslant \varphi_B\}\,.$$

Gli insiemi A tali che $\alpha_T(A) = \beta_T(A)$ sono detti *T-regolari.* Indicata con $\mathcal{R}_T$ la famiglia di tutti gli insiemi T-regolari, la funzione d'insieme δ_T: $\mathcal{R}_T \to [0, +\infty]$ monotona è, per definizione, la restrizione di α_T (o, equivalentemente, di β_T) alla famiglia di insiemi $\mathcal{R}_T$.

Teorema 1.5 [8]. *Sia T: $\mathbf{B} \to [0, +\infty]$ un integrale su X. Allora la funzione d'insieme δ_T rappresenta T. Inoltre una funzione d'insieme monotona su X γ: $\mathbf{H} \to [0, +\infty]$ rappresenta l'integrale T se e solo se*

$$(1.7) \qquad \mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) \quad e \quad \alpha_T(H) \leqslant \gamma(H) \leqslant \beta_T(H) \quad per\ ogni\ H \in \mathbf{H}\,.$$

Infine per ogni $\mathbf{H} \subset \mathcal{T}(X)$, *se* $\mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, *allora*

$$(1.8) \qquad \alpha_T(A) = \sup\{\alpha_T(H): H \in \mathbf{H}, H \subset A\} \quad e$$
$$\beta_T(A) = \inf\{\beta_T(H): H \in \mathbf{H}, H \supset A\}\,. \qquad \blacksquare$$

Si osserva che la proprietà (1.7) è verificata qualora si ponga $\mathbf{H} = \mathcal{T}(X)$ e $\gamma = \alpha_T$ o $\gamma = \beta_T$; quindi sia α_T che β_T rappresentano l'integrale T.

Inoltre notiamo che nel caso che T sia finito, cioè $T(f) < +\infty$ per ogni $f \in \mathbf{B}$, o, più generalmente, nel caso che $T(f \wedge a) < +\infty$ per ogni $f \in \mathbf{B}$ ed ogni $a \in (0, +\infty)$, la funzione d'insieme $\delta'_T: \mathcal{R}'_T \to \to [0, +\infty]$, che per definizione è la restrizione di δ_T a $\mathcal{R}'_T = \{A \subset X: \alpha_T(A) = \beta_T(A) < +\infty\}$, rappresenta l'integrale T.

2. Sul'additività dell'integrale.

Sia $\alpha: \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme monotona e siano f, g due funzioni numeriche positive definite su X. E si consideri la seguente uguaglianza

$$\int_X (f+g)\, d\alpha = \int_X f\, d\alpha + \int_X g\, d\alpha \,. \tag{2.1}$$

Una prima domanda: «fissate le funzioni f e g, sotto quali condizioni la (2.1) vale qualunque sia la funzione d'insieme monotona α?».

Una seconda domanda: «fissata una famiglia d'insiemi $\mathbf{H} \subset \mathcal{T}(X)$ e fissata la funzione d'insiemi α, sotto quali condizioni la (2.1) vale qualunque siano le funzioni f, $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$?».

È evidente che queste domande hanno un senso, proprio perchè la (2.1) non è in generale verificata.

Questi due teoremi rispondono alla prima domanda e, parzialmente, anche alla seconda.

TEOREMA 2.1. *Siano f, g due funzioni numeriche positive definite su X. L'uguaglianza* (2.1) *vale qualunque sia α, funzione d'insieme monotona su X, se e solo se per ogni a, $b \in (0, +\infty)$ gli insiemi $\{f > a\}$, $\{g > b\}$ sono confrontabili rispetto all'inclusione insiemistica* (*cioè uno di essi è contenuto nell'altro*).

TEOREMA 2.2. *Sia $\mathbf{H} \subset \mathcal{T}(X)$ un reticolo di insiemi, contenente l'insieme vuoto e sia $\alpha: \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme monotona. Allora la* (2.1) *vale qualunque siano f, $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, se e solo se*

$$\alpha(A \cap B) + \alpha(A \cap B) = \alpha(A) + \alpha(B) \qquad \textit{per ogni } A, B \in \mathbf{H}\,. \tag{2.2}$$

Un semplice corollario di questo teorema 2.2 servirà a dimostrare il teorema 2.1 ed una proposizione del prossimo paragrafo.

COROLLARIO 2.3. *Sia* $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$ *una catena rispetto all'inclusione insiemistica e sia* α *una funzione d'insieme monotona su* X. *Allora la* (2.1) *vale qualunque siano le funzioni* f, g $\mathbf{H}$-*misurabili.* ∎

Un esempio in cui si applica questo corollario è il seguente.

ESEMPIO 2.4. Si ponga $X = (0, +\infty)$. Sia α una qualsiasi funzione d'insieme monotona su X. Allora per ogni coppia di funzioni f, g: $X \to [0, +\infty]$ decrescenti vale la (2.1). Infatti le funzioni f, g sono misurabili rispetto alla catena di sottoinsiemi di X, composta da tutti gli intervalli (limitati o no) che hanno come origine lo zero. ∎

Un'altra conseguenza del teorema 2.2, via il teor. 1.5, è il seguente teorema. Prima di enunciarlo, ricordiamo alcune ben note definizioni. Una funzione d'insieme α: $\mathbf{H} \to [0, +\infty]$, definita su un reticolo di insiemi $\mathbf{H}$, si dice *modulare*, se vale la (2.2). Invece si dirà *sotto-modulare* (risp. *sopra-modulare*) nel caso che la (2.2) valga qualora si sostituisca « $=$ » con «$\leqslant$» (risp. con «$\geqslant$»).

TEOREMA 2.5. *Sia* T: $\mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale, definito sul dominio di integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$, *tale che*

$$f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \wedge g, f \vee g \in \mathbf{B} \tag{2.3}$$

$$T(f) + T(g) = T(f \wedge g) + T(f \vee g) \quad \textit{per ogni } f, g \in \mathbf{B}\,. \tag{2.4}$$

Allora valgono le seguenti proprietà:

(*a*) $\mathcal{R}'_T$ *è un reticolo di insiemi, la funzione d'insiemi monotona* δ'_T, *definita su* $\mathcal{R}'_T$ (vedi fine del § 1), *rappresenta l'integrale* T *ed è modulare*;

(*b*) *se una funzione d'insieme* γ: $\mathbf{H} \to [0, +\infty]$, *definita su un reticolo di insiemi* $\mathbf{H}$, *rappresenta l'integrale* T, *allora*

$$\int_X (f + g)\, d\gamma = \int_X f\, d\gamma + \int_X g\, d\gamma \quad \textit{per ogni } f, g \in \mathbf{B}\,. \tag{2.5}$$

Questo teorema 2.5 continua a valere nel caso che si sostituisca (2.3) e (2.4) con le condizioni più forti:

$$f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f + g, f \wedge g, f \wedge g \in \mathbf{B} \tag{2.3'}$$

$$T(f + g) = T(f) + T(g) . \tag{2.4'}$$

Si può osservare che nelle ipotesi del teorema 2.5, le funzioni d'insieme α_T, β_T rappresentano l'integrale T; β_T è sotto-modulare e α_T è sopra-modulare ed inoltre per ogni $A \subset X$ risulta:

$$\alpha_T(A) = \sup \{\delta'_T(H) : H \in \mathfrak{R}'_T, H \subset A\} \quad e \tag{2.6}$$

$$\beta_T(A) = \inf \{\delta'_T(H) : H \in \mathfrak{R}'_T, H \supset A\} ;$$

infine se $\mathbf{B}$ è chiusa per somme finite valgono, in virtù delle proposizioni 4.4 e 4.5 di [8], le seguenti uguaglianze:

$$\int_X f \, d\alpha_T = \sup \{T(g) : g \in \mathbf{B}, g \leqslant f\} \quad \textit{per ogni } f \in [0, +\infty]^X \tag{2.7}$$

$$\int_X f \, d\beta_T = \inf \{T(g) : g \in \mathbf{B}, g \geqslant f\} \quad \textit{se } f \in [0, +\infty]^X \tag{2.8}$$

ed esiste $h \in \mathbf{B}$ *con* $h \geqslant f$.

TEOREMA 2.5'. *Sia* $T : \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale, definito sul dominio di integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$, *con le proprietà* (2.3) *e* (2.4) *del teorema* 2.5 *e tale che*

$$\{f_n\}_n \subset \mathbf{B} , \qquad f \in \mathbf{B} , \qquad f_n \uparrow f \Rightarrow T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f_n) . \tag{$*$}$$

Allora valgono le seguenti proprietà:

(*a*) δ_T *è continua per successioni crescenti*; *cioè* $\delta_T(H) = \lim_{n \to +\infty} \delta_T(H_n)$, *quando* H, $H_n \in \mathfrak{R}_T$ *e* $H_n \uparrow H$;

(*b*) *la funzione d'insieme* γ: $\mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$, *definita per ogni* $A \in \mathfrak{P}(X)$ *da*

$$\gamma(A) = \inf \left\{ \lim_n \delta_T(H_n) : H_n \in \mathfrak{R}_T, H_n \uparrow , \bigcup_n H_n \supset A \right\}$$

rappresenta l'integrale T, è sotto-modulare, continua per successioni crescenti, ed inoltre vale per ogni $g \in [0, +\infty]^X$

$$(**) \qquad \int_X g\,d\gamma = \inf\left\{\lim_n T(f_n) : f_n \in \mathbf{B}, f_n \uparrow, \lim_n f_n \geqslant g\right\}.$$

OSSERVAZIONE 2.6 (sul teorema 2.1). Uno studio dell'uguaglianza (2.1) si può riscontrare in C. Dellacherie [6]. In [6] si dimostra che la (2.1) vale nel caso che α sia continua per successioni crescenti e le funzioni f, g abbiano « même tableau da variation ». Si dice che due funzioni f, g, definite su uno stesso insieme X, hanno « même tableau de variation », qualora per ogni x, $y \in X$ valga la disuguaglianza $(f(x) - f(y)) \cdot (g(x) - g(y)) \geqslant 0$; dove si conviene che $(+\infty) - (+\infty) = 0$. Si può osservare che il teorema 2.1 estende quanto dimostrato in [6], perchè « due funzioni f, g hanno *même tableau de variation* se e solo se per ogni a, $b \in (0, +\infty)$ gli insiemi $\{f > a\}$, $\{g > b\}$ sono confrontabili ». ■

OSSERVAZIONE 2.7 (sul teorema 2.2). Connessioni tra i diversi tipi di modularità di una funzione d'insieme e i corrispondenti integrali sono state messe in luce per la prima volta da G. Choquet [5] e successivamente da altri autori (vedi [1]), nell'ambito della teoria delle capacità. Il precedente teorema 2.2 e le proposizioni 2.9, 2.10, che verranno eneunciate nel seguito di questo paragrafo, differiscono da analoghi teoremi (vedi § 54.2 in [5]) per la semplicità delle dimostrazioni e per la mancanza di ipotesi di continuità sulle funzioni di insiemi. Si ricorda che una capacità è una funzione d'insieme monotona, definita sul reticolo dei sottoinsiemi compatti di uno spazio localmente compatto, che è continua sulla destra [5]. Infine osserviamo che le proposizioni 2.9 e 2.10 non sono una conseguenza immediata del teorema 54.1 di [5], diversamente da quanto accade per i teoremi analoghi del § 54.2 di [5]; infatti nel teorema 54.1 di [5] si dimostra che ogni funzionale finito, definito su un cono convesso che sia un reticolo rispetto alla sua usuale struttura d'ordine, positivamente omogeneo e sotto-modulare (risp. sopra-modulare) è subadditivo (risp. superadditivo); dall'altra parte per un reticolo d'insiemi $\mathbf{H}$ il cono convesso $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è sì un reticolo rispetto all'ordine puntuale tra funzioni ma non è, in generale, un reticolo rispetto alla struttura d'ordine indotta dal cono convesso. Nonostante ciò la proposizione 2.9, per esempio, può essere dimostrata mediante l'uso indiretto del teorema 54.1 di Choquet, come il lettore potrà facilmente osservare. ■

Osservazione 2.7′ (sul teorema 2.2). Sia $\mathbf{H}$ una famiglia di insiemi qualsiasi contenuta in $\mathcal{T}(X)$. Sia $\alpha\colon \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insiemi monotona. Una condizione sufficiente affinchè valga la (2.1) per ogni f, $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, è la seguente

$$(2.2') \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha(H_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i) \qquad \textit{per ogni } \{H_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{H}\,,$$

dove $C_i = \bigcup \left\{ \bigcap_{k=1}^{i} H_{s_k} : 1 \leqslant s_k \leqslant n \text{ per ogni } k \text{ e } s_k \neq s_{k'}, \text{ per } k \neq k' \right\}$. Questa

(2.2′) è pure necessaria per avere

$$(2.1') \qquad \sum_{i=1}^{n} \int_X f_i \, d\alpha = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right) d\alpha \qquad \textit{per ogni } \{f_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})\,.$$

Infine notiamo che (2.2′) e (2.1′) continuano ad essere equivalenti, qualora in essa si sostituisca il simbolo « $=$ » con « $\leqslant$ » oppure con « $\geqslant$ ». ■

Osservazione 2.8 (sul teorema 2.5). Usualmente in analoghi teoremi di rappresentazione degli integrali si privilegiano tra le funzioni d'insieme che li rappresentano quelle che soddisfano qualche tipo di «regolarità»; si ricordino i teoremi classici di Riesz (vedi anche [12], [13]). Al contrario nel teorema 1.5 si considera l'intervallo $[\alpha_T, \beta_T]$ di tutte le funzioni d'insieme che rappresentano un dato iintegrale T, e si rivela l'importanza della funzione d'insieme δ_T rispetto alle altre. Ciò significa che eventuali «buone» funzioni d'insieme vanno ricercate in $[\alpha_T, \beta_T]$, e che eventuali condizioni di «regolarità» di un integrale si riflettono su δ_T. Si veda per esempio il teorema 2.5 e il 2.5′. Un altro esempio è offerto dai teoremi 2 e 3 di [9]. Più precisamente in [9] si è dimostrata la seguente estensione del teorema 1 di [2] e del teorema 20 di [11]. « Sia $\mathbf{B}$ è un dominio di integrazione su X contenente le funzioni $f \wedge g$, $f \wedge g$, $f - f \wedge g$ per ogni coppia f, $g \in \mathbf{B}$ limitate. Se l'integrale $\int_X - \, d\alpha$ è finito su $\mathbf{B}$, e per ogni coppia di funzioni

$f, g \in \mathbf{B}$ limitate vale

$$(') \qquad \int_X g\, d\alpha = \int_X (g \wedge f)\, d\alpha + \int_X (g - g\wedge f)\, d\alpha ,$$

allora esiste una funzione d'insieme monotona β tale che ogni $f \in \mathbf{B}$ è α-misurabile e $\int_X f\, d\alpha = \int_X f\, d\beta$ per ogni $f \in \mathbf{B}$. Alla luce del teorema 2.5 questo teorema di [9] si può migliorare, nel senso che esso continua a valere, qualora si sostituisca la $(')$ con

$$('') \qquad \int_X f\, d\alpha + \int_X g\, d\alpha = \int_X (f\wedge g)\, d\alpha + \int_X (f \wedge g)\, d\alpha$$

per ogni $f, g \in \mathbf{B}$ *limitate.* ∎

Ora vogliamo dimostrare i teoremi enunciati sopra. In primo luogo verificheremo il teorema 2.2 tramite le due proposizioni che seguono. In secondo luogo si dimostrerà il teorema 2.1. Ed infine si verificherà il teorema 2.5. e 2.5'.

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia* γ: $\mathbf{H} \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona definita sul reticolo di insiemi* $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(2.9) $\quad\gamma$ *è sotto-modulare*

$$(2.10) \qquad \int_X (f\wedge g)\, d\gamma + \int_X (f \vee g)\, d\gamma \leqslant \int_X f\, d\gamma + \int_X g\, d\gamma$$

per ogni $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$

$$(2.11) \qquad \int_X (f+g)\, d\gamma \leqslant \int_X f\, d\gamma + \int_X g\, d\gamma \qquad \textit{per ogni } f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) .$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni coppia di insiemi $A, B \in \mathbf{H}$ gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$ appartengono ad $\mathbf{H}$. Dalla definizione di integrale si ha quindi $\int_X (\varphi_A + \varphi_B)\, d\gamma = \gamma(A \cup B) + \gamma(A \cap B) = \int_X (\varphi_A \vee \varphi_B)\, d\gamma + \int_X (\varphi_A \wedge \varphi_B)\, d\gamma$. Perciò valgono le implicazioni $(2.11) \Rightarrow (2.9)$ e $(2.10) \Rightarrow (2.9)$.

Dimostriamo che (2.9) $\Rightarrow$ (2.10). Siano $f, g \in [0, +\infty]^X$. Sia $\bar{\gamma}$: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ la funzione d'insieme monotona definita per ogni $A \subset X$ da $\bar{\gamma}(A) = \inf\{\gamma(H): H \in \mathbf{H}, H \supset A\}$. Da (2.9) segue che $\bar{\gamma}$ è sotto-modulare; perciò dalle uguaglianze $\int_X (f \wedge g)\, d\bar{\gamma} = \int_0^{+\infty} \bar{\gamma}(\{f > t\} \cap \cap \{g > t\})\, dt$, $\int_X (f \vee g)\, d\bar{\gamma} = \int_0^{+\infty} \bar{\gamma}(\{f > t\} \cup \{g > t\})\, dt$ si ottiene

$$\int_X (f \wedge g)\, d\bar{\gamma} + \int_X (f \vee g)\, d\bar{\gamma} = \int_X f\, d\bar{\gamma} + \int_X g\, d\bar{\gamma}\,. \tag{2.12}$$

Ora se f, g sono $\mathbf{H}$-misurabili, anche le funzioni $f \wedge g$, $f \vee g$ sono $\mathbf{H}$-misurabili, in virtù del teorema 1.4. Quindi la (2.12) implica la (2.10), in virtù della definizione dell'integrale $\int_X - d\gamma$.

Dimostriamo che (2.9) $\Rightarrow$ (2.11). Anzitutto verifichiamo

$$\int_X \left(\varphi_H + \sum_{i=1}^n \varphi_{H_i}\right) d\gamma \leqslant \gamma(H) + \int_X \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{H_i}\right) d\gamma \qquad \textit{per ogni } H, H_i \in \mathbf{H}\,. \tag{2.13}$$

A tal scopo si ponga $h = \sum_{i=1}^n \varphi_{H_i}$. Per ogni numero naturale $i \geqslant 1$ gli insiemi $\{h \geqslant i\}$ appartengono ad $\mathbf{H}$, poichè, essendo $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ chiusa per somme (vedi teor. 1.4), la funzione h è $\mathbf{H}$-misurabile. Perciò dalla definizione di integrale rispetto a γ si ha:

$$\gamma(H) + \int_X h\, d\gamma = \gamma(H) + \sum_{i=1}^n \gamma(\{f \geqslant i\}) \quad \text{e} \tag{2.14}$$

$$\int_X (\varphi_H + h)\, d\gamma = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma[(H \cap \{h \geqslant i-1\}) \cup \{h \geqslant i\}]\,.$$

Ora usando ripetutamente (2.9) si ottiene

$$\gamma(H) + \int_X h\, d\gamma = \gamma(H) + \sum_{i=1}^n \gamma(\{h \geqslant i\}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=2}^n \gamma(\{h \geqslant i\}) + \gamma(H \cap \{h \geqslant 1\}) +$$

$$+ \gamma[(H \cap \{h \geqslant 0\}) \cup \{h \geqslant 1\}] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=3}^{n} \gamma(\{h \geqslant i\}) + \gamma(H \cap \{h \geqslant 2\}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \gamma[(H \cap \{h \geqslant i-1\}) \cup \{h \geqslant i\}] \geqslant$$

$$\geqslant \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \gamma(H \cap \{h \geqslant n\}) + \sum_{i=1}^{n} \gamma[(H \cap \{h \geqslant i-1\}) \cup \{h \geqslant i\}] =$$

$$= \int_X (\varphi_H + h)\, d\gamma\,.$$

Cosicchè la (2.13) è dimostrata. Ora siano f, g due funzioni **H**-misurabili. In virtù del teorema 1.3 esistono due successioni di $\{f_n\}_n$, $\{g_n\}_n$ subconvergenti uniformemente, rispettivamente, verso f, g tali che $f_n \leqslant f$, $g_n \leqslant g$ per ogni numero naturale n e tali che le funzioni $2^n f_n$, $2^n g_n$ sono semplici **H**-misurabili e a valori in $\mathbb{Z}$. Dunque per ogni coppia di queste funzioni, in virtù di (2.13), si ha $\int_X (2^n f_n + 2^n g_n)\, d\gamma \leqslant \leqslant \int_X (2^n f_n)\, d\gamma + \int_X (2^n g_n)\, d\gamma$. Da cui, poichè $\int_X - d\gamma$ è omogeneo, segue

$$\int_X (f_n + g_n)\, d\gamma \leqslant \int_X f_n\, d\gamma + \int_X g_n\, d\gamma \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}\,. \tag{2.15}$$

Perciò passando al limite per $n \to +\infty$, dai teoremi 1.1, 1.2 si ottiene la (2.11). ■

PROPOSIZIONE 2.10. *Sia* $\gamma\colon \mathbf{H} \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insiemi monotona definita sul reticolo d'insiemi* $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(2.9′) γ *è sopra-modulare*

(2.10′) $\displaystyle\int_X (f \wedge g)\, d\gamma + \int_X (f \vee g)\, d\gamma \geqslant \int_X f\, d\gamma + \int_X g\, d\gamma$

per ogni $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$

(2.11′) $\displaystyle\int_X (f + g)\, d\gamma \geqslant \int_X f\, d\gamma + \int_X g\, d\gamma$ *per ogni* $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$.

Dimostrazione. Procedendo come nella dimostrazione precedente si ottiene quanto richiesto. Notiamo solo che per la verifica dell'implicazione (2.9′) $\Rightarrow$ (2.10′) si può usare la funzione d'insieme $\overline{\overline{\gamma}}$ definita da $\overline{\overline{\gamma}}(A) = \sup\{\gamma(H): H \in \mathbf{H}, H \subset A\}$; questa $\overline{\overline{\gamma}}$ è sopra-modulare nel caso che valga (2.9′). ■

Dimostrazione del teorema 2.1. Se per ogni a, $b \in (0, +\infty)$ uno dei due insiemi $\{f > a\}$, $\{g > b\}$ è contenuto nell'altro, significa che la famiglia d'insiemi $\mathbf{H}_0 = \{\{f > a\}: a \in (0, +\infty)\} \cup \{\{g > a\}: a \in (0, +\infty)\}$ è una catena di insiemi, rispetto alla quale le funzioni f, g sono misurabili. Quindi vale la (2.1) in virtù del corollario 2.3. Per una verifica del viceversa sarà sufficiente dimostrare che esiste una funzione d'insieme α, per cui non vale la (2.1), nel caso che la famiglia d'insiemi $\mathbf{H}_0$, definita sopra non sia una catena. Si osserva che, se $\mathbf{H}_0$ non è una catena di insiemi, esistono a, $b \in (0, +\infty)$, x_0, $y_0 \in X$ tali che

$$f(x_0) > a \geqslant f(y_0) \quad e \quad g(y_0) > b \geqslant g(x_0)\,. \tag{2.16}$$

Perciò indicata con α la funzione d'insieme monotona definita per ogni $A \subset X$ da

$$\alpha(A) = \begin{cases} 1 & se\ A \supset \{x_0, y_0\} \\ 0 & altrimenti\,, \end{cases}$$

si ottiene $\int_X (f + g)\,d\alpha = [f(x_0) + g(x_0)] \wedge [f(y_0) + g(y_0)]$, $\int_X f\,d\alpha = f(y_0)$ e $\int_X g\,d\alpha = g(x_0)$. Essendo $[f(x_0) + g(x_0)] \wedge [f(y_0) + g(y_0)] \neq f(y_0) + g(x_0)$, risulta che la (2.1) non vale per la funzione d'insieme definita sopra. ■

Dimostrazione del teorema 2.5. È evidente che β_T è sotto-modulare e che α_T è sopra-modulare. Quindi, essendo $\alpha_T \leqslant \beta_T$, per ogni coppia di insiemi A, B T-regolari risulta

$$\begin{aligned} \alpha_T(A) + \alpha_T(B) &\leqslant \alpha_T(A \cup B) + \alpha_T(A \cap B) \leqslant \\ &\leqslant \beta_T(A \cup B) + \beta_T(A \cap B) \leqslant \beta_T(A) + \beta_T(B)\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Da cui si ottiene che $\mathcal{R}'_T$ è un reticolo di insiemi e che δ'_T è modulare. Infine δ'_T rappresenta l'integrale T, in virtù del teorema 1.5. Così è conclusa la dimostrazione di (a). Ora verifichiamo (b). Anzitutto si osserva che, essendo δ'_T modulare e $\mathbb{B}$ composta da funzioni che sono misurabili rispetto ad $\mathfrak{R}'_T$, dal teorema 2.2 segue che

$$(2.18) \qquad \int_X (f+g)\, d\delta'_T = \int_X f\, d\delta'_T + \int_X g\, d\delta'_T \quad \textit{per ogni } f, g \in \mathbb{B}\,.$$

Inoltre dal teorema 1.5 (vedi in particolare la (1.7)) risulta

$$(2.19) \qquad \int_X h\, d\alpha_T \leqslant \int_X h\, d\gamma \leqslant \int_X h\, d\beta_T \quad \textit{per ogni } h \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})\,.$$

poichè γ rappresenta T. Quindi tenuto conto che α_T, β_T sono estensioni di δ'_T e tenuto conto che $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$ è un cono convesso contenente $\mathbb{B}$, da (2.18) e (2.19) si ottiene la proprietà richiesta (2.5). ■

Dimostrazione del teorema 2.5'. Per ogni g si indichi con $T^*(g)$ la quantità che sta al secondo membro di (**). Il funzionale T^*, definito su $[0, +\infty]^X$, verifica le proprietà (I.1) e (I.2); inoltre soddisfa pure (I.4) e (I.5), poichè è continuo per successioni crescenti (questa continuità può essere provata mediante argomenti standard). Infine verifica (I.3), perchè da una parte la disuguaglianza $T^*(f) \geqslant T^*(f \wedge a) + T^*(f - f \wedge a)$ segue direttamente dalla definizione di T^*, mentre d'altra parte la disuguaglianza opposta segue dalla sotto-modularità di T^* in virtù del teorema 54.1 di [5] (questo teorema 54.1 di [5] afferma che un funzionale omogeneo e sotto-modulare è sub-additivo). In conclusione T^* è un integrale. Perciò dal teorema 1.5 segue che $T^*(g) = \int_X g\, d\beta$ per ogni $g \in [0, +\infty]^X$, dove β è definita per ogni $A \in \mathfrak{P}(X)$ da $\beta(A) = T^*(\varphi_A)$. Inoltre, poichè T^* estende T, la funzione d'insieme β rappresenta T. Quindi dal teorema 1.5 segue che la funzione d'insieme β estende δ_T. Dunque δ_T è continua per successioni crescenti, perchè β lo è. Così si è dimostrata la (a). D'altra parte la funzione γ, definita in (b) estende δ_T; quindi γ rappresenta T. Infine si può verificare facilmente che $\gamma = \beta$. Da cui si deduce ciò che resta da dimostrare. ■

3. Un dominio di σ-addività per l'integrale.

Sia $f \in [0, +\infty]^X$ e $\alpha\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ una qualsiasi funzione di insieme monotona. Si indichi con $\mathbb{A}_f$ l'insieme di tutte le funzioni del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (f \wedge b_i - f \wedge c_i)$$

dove n è un numero naturale, e a_i, b_i, c_i sono numeri reali tali che $0 \leqslant a_i < +\infty$, $0 \leqslant c_i < b_i \leqslant +\infty$ per ogni i.

Si dimostra facilmente che $\mathbf{A}_f$ contiene f, che è un dominio di integrazione, un reticolo di funzioni ed un cono convesso; cioè

$$f \in \mathbf{A}_f \tag{3.1}$$

$$a \in [0, +\infty) \quad e \quad g \in \mathbf{A}_f \Rightarrow ag, g \wedge a, g - g \wedge a \in \mathbf{A}_f \tag{3.2}$$

$$g, h \in \mathbf{A}_f \Rightarrow g + h, g \wedge h, g \vee h \in \mathbf{A}_f\,. \tag{3.3}$$

Teorema 3.1. *Sia* $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione monotona ed* $f \in [0, +\infty]^X$. *Se una successione* $\{g_n\}_n \subset \mathbf{A}_f$ *è tale che* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \in \mathbf{A}_f \cup \cup [0, +\infty)^X$, *allora*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n \, d\alpha\,. \tag{3.4}$$

Si osserva che senza l'ipotesi restrittiva « $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \in \mathbf{A}_f \cup [0, +\infty)^X$ », la (3.4) non è in generale vera. Infatti si può considerare il seguente esempio. Sia $X = (0, +\infty)$; f la funzione definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in (0, +\infty)$; e sia α la funzione d'insieme tale che $\alpha(X) = 1$ e $\alpha(B) = 0$ per ogni $B \neq X$. Si ponga $g_n(x) = (nx) \wedge 1$ per ogni $x \in X$. Allora per queste funzioni $g_n \in \mathbf{A}_f$ la (3.4) non vale.

Si nota pure che in generale non vale l'implicazione

$$\{g_n\}_n \subset \mathbf{A}_f\,, \qquad g \in \mathbf{A}_f\,, \qquad g_n \uparrow g \Rightarrow \int_X g \, d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n \, d\alpha\,. \tag{3.5}$$

Infatti si può verificare facilmente che, per una fissata funzione d'insieme α, la continuità per successioni crescenti di α è necessaria, affinchè la (3.5) valga qualunque sia $f \in [0, +\infty]^X$.

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo il seguente lemma.

LEMMA 3.2. *Siano a_i, b_i, c_i numeri reali tali che $0 \leqslant a_i < +\infty$, $0 \leqslant c_i < b_i \leqslant +\infty$ per ogni $i \in \mathrm{N}$. Si ponga per ogni $t \in [0, +\infty]$ $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t \wedge b_i - t \wedge c_i)$. Se A è un sottoinsieme non vuoto di $[0, +\infty]$ tale che $\inf_A g < +\infty$, allora $g(t_0) = \inf_A g$, dove t_0 è l'estremo inferiore di A.*

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. Sia $\{t_n\}_n \subset A$ una successione decrescente verso t_0, tale che $g(t_n) < +\infty$ per ogni n; l'esistenza di questa successione è assicurata dal fatto che $\inf_A g < +\infty$, essendo g crescente. Dimostriamo che

$$g(t_0) = \inf_n g(t_n) ; \tag{3.6}$$

ciò sarà sufficiente per avere quanto richiesto dal lemma, perchè la funzione g è crescente. A tal scopo si osserva che le funzioni $h_i\colon \mathrm{N} \to [0, +\infty]$, definite da $h_i(n) = a_i(t_n \wedge b_i - t_n \wedge c_i) - a_i(t_0 \wedge b_i - t_0 \wedge c_i)$, sono $\geqslant 0$ e sono decrescenti al crescere di n; qui si suppone che $t_0 \neq +\infty$, in caso contrazio il lemma è ovvio. Quindi per ogni $i \in \mathrm{N}$ esistono dei numeri reali non negativi $\{s_k^i\}_k$ tali che

$$a_i(t_n \wedge b_i - t_n \wedge c_i) = a_i(t_0 \wedge b_i - t_0 \wedge c_i) + \sum_{k=1}^{\infty} s_k^i \varphi_k(n) \tag{3.7}$$

per ogni n; qui con φ_k indichiamo la funzione caratteristiva dell'insieme dei primi k numeri naturali. Ora da (3.7) segue che

$$g(t_n) = g(t_0) + \sum_{i,k=1}^{\infty} s_k^i \varphi_k(n) . \tag{3.8}$$

Da cui si ottiene che

$$\inf_n g(t_n) = g(t_0) + \inf_n \sum_{i,k=1}^{\infty} s_k^i \varphi_k(n) . \tag{3.9}$$

Ma essendo $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_k^i\right) = g(t_1) - g(t_0) < +\infty$, ed essendo $\sum_{i,k=1}^{\infty} s_k^i \varphi_k(n) = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_k^i\right)$, si ottiene da (3.9) la richiesta proprietà (3.6). ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.1. Sia $\{g_n\}_n \subset \mathrm{A}_f$. Poichè ogni funzione g_n è misurabile rispetto alla catena d'insiemi $\mathrm{H} = \{\{f > a\}:$

$a \in (0, +\infty]\}$, dal corollario 2.3 segue che

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} g_n\right) d\alpha = \sum_{n=1}^{k} \int_X g_n \, d\alpha \qquad \textit{per ogni } k . \tag{3.10}$$

In particolare se A è un sottoinsieme non vuoto di X ed α_A è la funzione d'insieme definita per ogni $B \subset X$ da « $\alpha_A(B) = 1$, se $B \supset A$, altrimenti $\alpha_A(B) = 0$ », sostituendo in (3.10) la funzione α con α_A, si ottiene

$$\inf_A \left(\sum_{n=1}^{k} g_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \left(\inf_A g_n\right) \qquad \textit{per ogni } k . \tag{3.11}$$

Ora si supponga che $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \in \mathbf{A}_f$ oppure $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \in [0, +\infty)^X$. Allora dal lemma precedente segue che

$$\inf_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\inf_A g_n\right) \qquad \textit{per ogni } A \subset X . \tag{3.12}$$

Quindi la successione $\left\{\sum_{n=1}^{k} g_n\right\}_k$ subconverge uniformemente verso $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$, in virtù di (3.11) e (3.12). Perciò dal teorema 1.2 si ha

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) d\alpha = \lim_{k \to +\infty} \int_X \left(\sum_{n=1}^{k} g_n\right) d\alpha . \tag{3.13}$$

In conclusione da (3.13) e da (3.10) segue quanto richiesto dal teorema. ■

4. L'addività e la modularità dell'integrale verso la misurabilità secondo Carathéodory.

In tutto il seguito α indicherà una funzione d'insieme monotona su X. Un sottoinsieme A di X è detto *misurabile secondo Carathéodory rispetto ad* α (in breve, *α-misurabile*), se per ogni insieme $B \subset X$ vale l'uguaglianza $\alpha(B) = \alpha(B \cap A) + \alpha(B - A)$. È noto che la famiglia $\mathcal{A}_\alpha$ dei sottoinsiemi di X che sono α-misurabili è un'algebra d'insiemi. Le funzioni misurabili rispetto ad $\mathcal{A}_\alpha$ sono dette α-misurabili.

TEOREMA 4.1. *Se $f \in [0, +\infty]^X$ è una funzione α-misurabile, allora*

$$\int_X (g + f)\, d\alpha = \int_X g\, d\alpha + \int_X f\, d\alpha \quad \textit{per ogni} \ g \in [0, +\infty]^X \tag{4.1}$$

$$\int_X (g \wedge f)\, d\alpha + \int_X (g \vee f)\, d\alpha = \int_X g\, d\alpha + \int_X f\, d\alpha \quad \textit{per ogni} \ g \in [0, +\infty]^X . \tag{4.2}$$

Si indichi con $\mathbf{B}_f$ la famiglia di tutte le funzioni del tipo $a(f\wedge b - f\wedge c)$, dove $a, b, c \in (0, +\infty)$ e $b > c$.

TEOREMA 4.2. *Sia $f \in [0, +\infty]^X$ tale che $\int_X h\, d\alpha < +\infty$ per ogni $h \in \mathbf{B}_f$. Allora ognuna delle seguenti condizioni:*

$$\int_X (g + h)\, d\alpha = \int_X g\, d\alpha + \int_X h\, d\alpha, \ \forall g \in [0, +\infty]^X \quad e \quad \forall h \in \mathbf{B}_f \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &\int_X (g \wedge h)\, d\alpha + \int_X (g \vee h)\, d\alpha = \\ &\qquad = \int_X g\, d\alpha + \int_X h\, d\alpha, \ \forall g \in [0, +\infty]^X \quad e \quad \forall h \in \mathbf{B}_f \end{aligned} \tag{4.4}$$

implica la α-misurabilità di f.

Si osserva che la condizione « $\int_X h\, d\alpha < +\infty$ per ogni $h \in \mathbf{B}_f$ » è equivalente alla seguente « $\alpha\{f > t\} < +\infty$ per ogni $t \in (0, +\infty)$ ». Essa è evidentemente soddisfatta in ognuno di questi casi: « $\alpha(X) < +\infty$ », « $\int_X f\, d\alpha < +\infty$ », « $\int_X (f\wedge 1)\, d\alpha < +\infty$ » e « $\int_X (f - f\wedge b)\, d\alpha < +\infty$ per ogni $b \in (0, +\infty)$ ». In questi ultimi due casi si hanno i seguenti due corollari.

COROLLARIO 4.3. *Sia $f \in [0, +\infty]^X$ tale che $\int_X (f\wedge 1)\, d\alpha < +\infty$. Allora la funzione f è α-misurabile se e solo se*

$$\begin{aligned} &\int_X (g + f\wedge b)\, d\alpha = \\ &\qquad = \int_X g\, d\alpha + \int_X (f\wedge b)\, d\alpha, \ \forall g \in [0, +\infty]^X \quad e \quad \forall b \in (0, +\infty) . \end{aligned} \tag{4.5}$$

COROLLARIO 4.4. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $\int_X (f - f \wedge b)\, d\alpha < +\infty$ *per ogni* $b \in (0, +\infty)$. *Allora la funzione* f *è* α*-misurabile se e solo se*

$$(4.5') \qquad \int_X (g + f - f \wedge b)\, d\alpha = \int_X g\, d\alpha + \int_X (f - f \wedge b)\, d\alpha, \quad g \in [0, +\infty]^X \quad e \quad b \in (0, +\infty).$$

Inoltre vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4.5. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$ *con* $\int_X f\, d\alpha < +\infty$. *Sia* α *sotto-modulare o super-modulare. Allora* f *è* α*-misurabile se e solo se vale la* (4.1).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.1. Verifichiamo la (4.1). Anzitutto dimostriamo che

$$(4.6) \qquad \int_X (\varphi_A + g)\, d\alpha = \alpha(A) + \int_A g\, d\alpha, \quad \forall A \in \mathcal{A}_\alpha \quad e \quad \forall g \in [0, +\infty]^X.$$

È facile notare che vale

$$(4.7) \qquad \int_X g\, d\alpha = \int_{X-A} g\, d\alpha + \int_A g\, d\alpha, \quad \forall A \in \mathcal{A}_\alpha \quad e \quad \forall g \in [0, +\infty]^X.$$

Quindi se A è α-misurabile, si ottiene

$$\int_X (\varphi_A + g)\, d\alpha = \int_A (\varphi_A + g)\, d\alpha + \int_{X-A} g\, d\alpha = \alpha(A) + \int_A g\, d\alpha + \int_{X-A} g\, d\alpha = \alpha(A) + \int_X g\, d\alpha.$$

Cosicchè la (4.6) è verificata. Ora in virtù del teorema 1.3, si sceglie una successione in funzioni semplici α-misurabili $\{f_n\}_n$ subconvergente uniformemente verso la funzione α-misurabile f, tale che $f_n \leqslant f$ per ogni n. Dalla (4.6) segue che per ogni $g \in [0, +\infty]^X$ vale

$$(4.8) \qquad \int_X (f_n + g)\, d\alpha = \int_X f_n\, d\alpha + \int_X g\, d\alpha \qquad \textit{per ogni } n\,.$$

Quindi passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene la richiesta (4.1), in virtù dei teoremi 1.1 e 1.2. La restante proprietà da verificare segue direttamente dalla definizione di integrale e dal fatto che per ogni insieme α-misurabile A vale l'uguaglianza $\alpha(A) + \alpha(B) = \alpha(A \cap B) + \alpha(A \cup B)$, qualunque sia l'insieme B. ■

Dimostrazione del teorema 4.2. Verifichiamo che ognuna delle condizioni (4.3) e (4.4) comporta le seguenti due disuguaglianze per ogni $t \in (0, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, t)$ e $B \subset X$

$$(4.9) \qquad \alpha\{f \geqslant t + \varepsilon\} + \alpha(B) \leqslant \alpha(\{f \geqslant t\} \cap B) + \alpha(\{f \geqslant t\} \cup B)$$

$$(4.10) \qquad \alpha\{f \geqslant t - \varepsilon\} + \alpha(B) \geqslant \alpha(\{f \geqslant t\} \cap B) + \alpha(\{f \geqslant t\} \cup B)\,.$$

Si ponga $h_{b,c} = (b - c)^{-1}(f \wedge b - f \wedge c)$ per ogni coppia di numeri reali c, b tali che $0 < c < b < +\infty$. È chiaro che ogni funzione $h_{b,c}$ appartiene a $\mathbf{B}_f$ ed è tale che

$$(4.11) \qquad \varphi_{\{f \geqslant b\}} \leqslant h_{b,c} \leqslant \varphi_{\{f \geqslant c\}}\,.$$

Perciò da (4.3) segue che

$$\alpha\{f \geqslant t + \varepsilon\} + \alpha(B) \leqslant \int_X h_{t+\varepsilon,t}\, d\alpha + \int_X \varphi_B\, d\alpha =$$

$$= \int_X (h_{t+\varepsilon,t} + \varphi_B)\, d\alpha \leqslant \int_X (\varphi_{\{f \geqslant t\}} + \varphi_B)\, d\alpha = \alpha(\{f \geqslant t\} \cap B) + \alpha(\{f \geqslant t\} \cup B);$$

mentre da (4.4) segue che

$$\alpha\{f \geqslant t + \varepsilon\} + \alpha(B) \leqslant \int_X h_{t+\varepsilon,t}\, d\alpha + \int_X \varphi_B\, d\alpha =$$

$$= \int_X (h_{t+\varepsilon,t} \wedge \varphi_B)\, d + \int_X (h_{t+\varepsilon,t} \vee \varphi_B)\, d\alpha \leqslant \alpha(\{f \geqslant t\} \cap B) + \alpha(\{f \geqslant t\} \cup B)\,.$$

Così si è verificata la (4.9) nel caso che valga (4.3) oppure (4.4). Analogamente si può dimostrare che ognuna delle condizioni (4.3), (4.4) comporta (4.10).

Sia ψ_f la funzione definita su $(0, +\infty)$ dalla posizione $\psi_f(t) = \alpha\{f \geqslant t\}$. Tenuto conto che $\int_X h\,d\alpha < +\infty$ per ogni $h \in \mathbf{B}_f$, da (4.11) segue che ψ_f è finita. Ora indicato con K l'insieme dei punti di continuità di ψ_f, da (4.9) e (4.10) si ha per $t \in K$

$$\alpha\{f \geqslant t\} + \alpha(B) = \alpha(\{f \geqslant t\} \cap B) + \alpha(\{f \geqslant t\} \cup B)\,. \tag{4.12}$$

Poichè un insieme A con $\alpha(A) < +\infty$ è α-misurabile, qualora per ogni $B \subset X$ valga $\alpha(A) + \alpha(B) = \alpha(A \cap B) + \alpha(A \cup B)$, da (4.12) e dal fatto che ψ_f è finita segue che l'insieme $\{f \geqslant t\}$ è α-misurabile per ogni $t \in K$. Quindi essendo $(0, +\infty) - K$ numerabile, si deduce che f è $\mathcal{A}_\alpha$-misurabile; cioè α-misurabile, come volevasi dimostrare. ■

Dimostrazione del corollario 4.3. Se una funzione f è α-misurabile, anche $f \wedge b$ è α-misurabile. Quindi da (4.1) segue che vale pure (4.5). Viceversa supponiamo che valga (4.5). Allora per ogni b, $c \in (0, +\infty)$ con $b > c$ si deduce da (4.5) che

$$\int_X g\,d\alpha + \int_X (f\wedge b)\,d\alpha = \int_X [g + (f\wedge b - f\wedge c)]\,d\alpha + \int_X (f\wedge c)\,d\alpha\,.$$

D'altra parte essendo

$$\int_X (f\wedge b - f\wedge c)\,d\alpha = \int_X (f\wedge b\,d\alpha - \int_X (f\wedge c)\,d\alpha\,,$$

poichè $\int_X (f\wedge b)\,d\alpha < +\infty$, si ottiene

$$\int_X [g + (f\wedge b - f\wedge c)]\,d\alpha = \int_X g\,d\alpha + \int_X (f\wedge b - f\wedge c)\,d\alpha\,. \tag{4.13}$$

Da ciò si ottiene, usando l'omogeneità dell'integrale, che vale (4.3). Quindi in virtù del teorema 4.2 la funzione f risulta α-misurabile. ■

Dimostrazione del corollario 4.4. È analoga a quella del precedente corollario. ■

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 4.5. Supponiamo che α sia sotto-modulare. Allora in virtù della proposizione 2.9 si hanno le seguenti due disuguaglianze

$$(4.14)\qquad \int_X (g + f\wedge b)\, d\alpha \leqslant \int_X g\, d\alpha + \int_X (f\wedge b)\, d\alpha$$

$$(4.15)\qquad \int_X (g + f\wedge b)\, d\alpha \geqslant \int_X (g + f)\, d\alpha - \int_X (f - f\wedge b)\, d\alpha$$

perchè α è sotto-modulare e perchè, per ipotesi, $\int_X f\, d\alpha < +\infty$. Ora se vale la (4.1) si ha pure che

$$\int_X (g + f)\, d\alpha - \int_X (f - f\wedge b)\, d\alpha = \int_X g\, d\alpha + \int_X (f\wedge b)\, d\alpha .$$

Quindi, tenuto conto di (4.14) e (4.15), si ottiene la (4.5). In conclusione se vale la (4.1), allora dal corollario 4.3 segue che f è α-misurabile. Il viceversa, cioè la α-misurabilità di f implica la validità di (4.1), è dato dal teorema 4.1. Infine osserviamo che, nel caso che α sia sopra modulare, la tesi della proposizione in questione continua a valere perchè valgono le disuguaglianze opposte di (4.14) e (4.15). ■

I teoremi precedenti danno una caratterizzazione diretta della α-misurabilità di una funzione tramite l'integrale. In [3], [4], [14] è presente un diverso modo di ritrovare le funzioni misurabili a partire da un funzionale che svolge il ruolo dell'usuale integrale superiore o inferiore. Perciò seguendo [3], [4], [14] si possono considerare le funzioni $f \in [0, +\infty]^X$ tali che

$$(4.16)\qquad \int_X g\, d\alpha = \int_X (g\wedge f)\, d\alpha + \int_X (g\diagdown f)\, d\alpha \qquad \textit{per ogni } g \in [0, +\infty]^X$$

dove $g\diagdown f$ è la funzione $= 0$ su $\{f = +\infty\}$ ed $= g - g\wedge f$ altrove. Le funzioni f che verificano (4.16) saranno dette *α_c-misurabili*.

Si può verificare facilmente che un insieme è α-misurabile se e solo se è α_c-misurabile. Più in generale una funzione con un numero finito di valori è α-misurabile se e solo se è α_c-misurabile.

TEOREMA 4.6. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$ *con* $\int_X f\,d\alpha < +\infty$. *Se* f *è* α*-misurabile, allora è pure* α_c*-misurabile.*

TEOREMA 4.7. *Sia* f *una funzione tale che* $\int_X h\,d\alpha < +\infty$ *per ogni* $h \in \mathbf{B}_f$. *Allora* f *è* α*-misurabile se e solo se ogni* $h \in \mathbf{B}_f$ *è* α_c*-misurabile.*

TEOREMA 4.8. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $\int_X (f \wedge 1)\,d\alpha < +\infty$. *Allora* f *è* α*-misurabile se e solo se le funzioni* $f \wedge b$ *sono* α_c*-misurabili per ogni* $b \in (0, +\infty)$.

TEOREMA 4.9. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$ *con* $\int_X (f - f \wedge b)\,d\alpha < +\infty$ *per ogni* $b \in (0, +\infty)$. *Allora* f *è* α*-misurabile se e solo se le funzioni* $f - f \wedge b$ *sono* α_c*-misurabili per ogni* $b \in (0, +\infty)$.

TEOREMA 4.10. *Sia* f *una funzione tale che* $\int_X f\,d\alpha < +\infty$. *Sia* α *sotto-modulare o sopra-modulare. Allora una funzione* f *è* α_c*-misurabile se è* α*-misurabile.*

A proposito del teorema 4.6, si può osservare pure che

PROPOSIZIONE 4.11. *Se* α *è sotto-modulare, allora ogni funzione* α*-misurabile è* α_c*-misurabile.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.6. Poichè $g \setminus f + f = g \vee f$, dal teorema 4.1 segue che

$$\int_X (g \vee f)\,d\alpha = \int_X (g \setminus f)\,d\alpha + \int_X f\,d\alpha . \tag{4.17}$$

D'altra parte dalla (4.2) del teorema 4.1 si ha pure che

$$\int_X g\,d\alpha = \int_X (g \wedge f)\,d\alpha + \int_X (g \vee f)\,d\alpha - \int_X f\,d\alpha \tag{4.18}$$

perchè $\int_X f\,d\alpha < +\infty$. Perciò da (4.17) e (4.18) segue la validità di (4.16), cioè la funzione f è α_c-misurabile. ∎

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.7. Se f è α-misurabile, ogni funzione $h \in \mathbf{B}_f$ è una funzione limitata e α-misurabile. Quindi essendo per ipotesi $\int\limits_X h\,d\alpha$ finito, dal teorema 4.6 segue la validità di (4.16). Viceversa se la (4.16) vale per ogni $h \in \mathbf{B}_f$, si ha per ogni $g \in [0, +\infty]^X$ che $\int\limits_X (g+h)\,d\alpha = \int\limits_X [g+h)\wedge h]\,d\alpha + \int\limits_X [(g+h)\setminus h]\,d\alpha = \int\limits_X h\,d\alpha + \int\limits_X g\,d\alpha$. Da cui, in virtù del teorema 4.2., segue che f è α-misurabile. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.8. Si proceda come nella dimostrazione precedente e si usi il corollario 4.3. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.9. Si proceda come nella dimostrazione del teorema 4.7, tenendo conto del corollario 4.4 e del fatto che per ogni funzione f α-misurabile con $\int\limits_X f\,d\alpha < +\infty$ l'insieme $\{f = +\infty\}$ è α-misurabile ed $\alpha\{f = +\infty\} = 0$. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.10. Sia $g \in [0, +\infty]^X$. Valgono queste uguaglianze per ogni $b \in (0, +\infty)$:

$$\int\limits_X g\,d\alpha = \int\limits_X (g\wedge b)\,d\alpha + \int\limits_X (g - g\wedge b)\,d\alpha \tag{4.19}$$

$$\int\limits_X (g\wedge b)\,d\alpha = \int\limits_X (g\wedge f\wedge b)\,d\alpha + \int\limits_X (g\wedge b - g\wedge f\wedge b)\,d\alpha; \tag{4.20}$$

la (4.20) è ottenuta da (4.16), ponendo $g\wedge b$ al posto di g. Quindi si ha

$$\int\limits_X g\,d\alpha = \int\limits_X (g\wedge f\wedge b)\,d\alpha + \int\limits_X (g - g\wedge b)\,d\alpha + \int\limits_X (g\wedge b - g\wedge f\wedge b)\,d\alpha. \tag{4.21}$$

Ma se α è sotto-modulare (risp. sopra-modulare) si ha la disuguaglianza

$$\int\limits_X (g - g\wedge b)\,d\alpha + \int\limits_X (g\wedge b - g\wedge f\wedge b)\,d\alpha \geqslant \int\limits_X (g - g\wedge f\wedge b)\,d\alpha \tag{4.22}$$

(risp. la disuguaglianza opposta), in virtù della prop. 2.9 (risp. 2.10). Perciò se α è sotto-modulare (risp. sopra-modulare) si ottiene

$$\int\limits_X g\,d\alpha \geqslant \int\limits_X (g\wedge f\wedge b)\,d\alpha + \int\limits_X (g - g\wedge f\wedge b)\,d\alpha \tag{4.23}$$

(risp. la disuguaglianza opposta). Per α sottomodulare (risp. sopra-modulare), si ha pure

$$(4.24)\qquad \int_X g\,d\alpha \leqslant \int_X (g\wedge f\wedge b)\,d\alpha + \int_X (g - g\wedge f\wedge b)\,d\alpha$$

(risp. la disuguaglianza opposta). In conclusione se α è sotto-modulare o sopra-modulare vale la (4.16) qualora si sostituisca f con le funzioni $f\wedge b$. Dunque dal teorema 4.5 segue la tesi: f è α-misurabile. ∎

Dimostrazione della proposizione 4.11. Poichè α è sotto-modulare, dalla proposizione 2.9 e dall'uguaglianza $g = g\wedge f + g\diagdown f$ segue che $\int_X g\,d\alpha \leqslant \int_X (g\wedge f)\,d\alpha + \int_X (g\diagdown f)\,d\alpha$. Quindi allo scopo di dimostrare che la α-misurabilità di f comporta la validità di (4.16), sarà sufficiente verificare che

$$(4.25)\qquad \int_X g\,d\alpha \geqslant \int_X (g\wedge f)\,d\alpha + \int_X (g\diagdown f)\,d\alpha \qquad \textit{per ogni } g\in[0, +\infty]^X .$$

Perciò sia $\{h_n\}_n$ una successione di funzioni semplici α-misurabili subconvergente uniformemente verso f e tale che $h_n \leqslant f$ per ogni n. Ora vale la (4.16) con h_n al posto di f; quindi essendo $g\diagdown h_n \geqslant g\diagdown f$ per ogni n, si ha

$$(4.26)\qquad \int_X g\,d\alpha \geqslant \int_X (g\wedge h_n)\,d\alpha + \int_X (g\diagdown f)\,d\alpha .$$

Dunque tenuto conto che $\{g\wedge h_n\}_n$ subconverge uniformemente verso $g\wedge f$, passando al limite per $n \to +\infty$ in (4.26), si ottiene la (4.25) in virtù del teorema 1.2. ∎

Osservazione 4.12 (*sulla definizione di funzione misurabile*). Usualmente una funzione f è detta misurabile rispetto ad una determinata proprietà, qualora tutti gli insiemi di livello $\{f \geqslant a\}$ la verificano. Benchè questa definizione sia soddisfacente nell'ambito delle misure σ-additive, non lo è più in quello delle misure finitamente additive e meno ancora in quello delle funzioni d'insieme monotone. Per esempio si può ricordare quanto accade per l'integrale di Riemann: « una funzione f limitata, definita in $\mathbb{R}$, con supporto limitato è integrabile secondo Riemann se e solo se tutti gli insiemi di livello di f, ad eccezione di una quantità numerabile, sono misurabili secondo Jordan-Peano ». Proprio in questo senso viene proposto da L. H. Loomis una modifica dell'usuale definizione di misurabilità, quando la misura in questione non è σ-additiva. A tal proposito (vedi [9] oppure la dimostrazione del precedente teorema 4.2)) si può notare che, nel caso che la funzione f sia α-misurabile e tale che $\int_X f\,d\alpha < +\infty$, gli insiemi di livello di f sono tutti α-misurabili ad eccezione al più di una quantità numerabile. ■

OSSERVAZIONE 4.13 (*sulla differenza di due funzioni α-misurabili*). Diciamo che una funzione (finita) $f \in \mathbb{R}^X$ è α-misurabile, qualora per ogni coppia $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > b$ esiste un insieme A α-misurabile tale che $\{f > a\} \subset A \subset \{f > b\}$; ciò equivale a dire che $f^+(= f \vee 0)$ e $f^-(= -(f \wedge 0))$ sono entrambe α-misurabili. Si osserva che in generale non è vero che la differenza di due funzioni finite, positive e α-misurabili sia una funzione α-misurabile, contrariamente a quanto accade per la misurabilità rispetto ad una misura esterna. Però nel caso che le due funzioni abbiano integrale finito, la loro differenza è α-misurabile. Più precisamente, posto $\mathfrak{L}^1(\alpha) = \{f - g : f, g \in [0, +\infty)^X$ α-misurabili, $\int_X f\,d\alpha < +\infty, \int_X g\,d\alpha < +\infty\}$, si può dimostrare che $\mathfrak{L}^1(\alpha) = \{f \in \mathbb{R}^X : \int_X |f|\,d\alpha < +\infty$ ed f è α-misurabile$\}$. Ciò comporta che $\mathfrak{L}^1(\alpha)$ è un sottospazio di Riesz di $\mathbb{R}^X$ ed un'algebra di funzioni. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] B. ANGER, *Representation of capacities*, Math. Ann., **229** (1977), pp. 245-258.

[2] S. BOCHNER, *Additive set functions on groups*, Ann. Math., **40** (1941), pp. 316-324.

[3] R. CAIROLI, *Fonctions d'ensemble et intégration*, Comm. Mat. Helv., **39** (1964-65), pp. 1-20.

[4] J. P. CECCONI, *Sulla teoria del prolungamento degli integrali*, Rend. Sem. Mat. Padova, **42** (1969), pp. 167-188.

[5] G. CHOQUET, *Teory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, **5** (1953), pp. 131-295.

[6] C. DELLACHERIE, *Quelques commentaires sur les prolongements de capacités*, Seminaire de probabilités V, ed. M. KAROUBI - P. A. MEYER, Lect. Notes in Math., **191** (1971), pp. 77-81.

[7] G. H. GRECO, *Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles*, Rend. Sem. Mat. Padova, **65** (1981), pp. 163-176.
[8] G. H. GRECO: *Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali*, Rend. Sem. Mat. Padova, **66** (1982), pp. 21-42.
[9] G. H. GRECO, *Integrale monotono*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 149-166.
[10] L. H. LOOMIS, *Linear functionals and content*, Am. J. Math., **76** (1954), pp. 168-182.
[11] A. MARKOFF, *On mean values and exterior densities*, Mat. Sbornik, **46** (1938), pp. 165-191.
[12] D. POLLARD - F. TOPSØE, *A unified approach to Riesz type representation theorems*, Studia Math., **54** (1975), pp. 173-190.
[13] F. TOPSØE, *Further results on integral representations*, Studia Math., **55** (1976), pp. 239-245.
[14] F. TOPSØE, *Topology and Measure*, Lect. Notes in Math., **133** (1970).

Pervenuto in Redazione il 9 settembre 1983.