RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

O. STEFANI
G. C. ZIRELLO

Misure approssimanti ed insiemi ad ampiezza costante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 191-202
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__191_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 72 (1984).

Misure approssimanti ed insiemi ad ampiezza costante.

O. Stefani - G. C. Zirello (*)

In [C-Z] si è espressa la congettura che le discontinuità delle misure approssimanti una misura di Hausdorff di un sottoinsieme E di uno spazio metrico, celino non banali proprietà geometriche intrinseche di E. Ci è sembrato poi che nello studio delle discontinuità nel punto $t=\delta$ giochino un ruolo non indifferente gli insiemi δ-massimali rispetto al diametro, cioè insiemi compatti di diametro δ che non sono sottoinsiemi propri di un compatto di diametro δ, i quali nel piano euclideo sono tutti e soli gli insiemi ad ampiezza costante δ. Il presente lavoro è motivato da questa osservazione.

Per la nomenclatura e le proprietà generali delle misure di Hausdorff, degli insiemi convessi e degli insiemi ad ampiezza costante facciamo riferimento a [R], [B-F], [L] e [E]. In particolare indichiamo con $\mathbf{R}^2$ lo spazio euclideo bidimensionale, con $|x-y|$ la distanza di due punti $x, y \in \mathbf{R}^2$, con $\bar{E}$, E°, ∂E, $\overline{\operatorname{conv}} E$, $d(E)$, rispettivamente la chiusura, l'interno, la frontiera, l'inviluppo convesso chiuso ed il diametro dell'insieme E; con $\nu_\delta(E)$ la misura approssimante la misura unidimensionale di Hausdorff di E ottenuta con coperture chiuse di E formate da insiemi di diametro non superiore a δ. Motivazioni e tecniche di dimostrazione sono ispirate anche dai numerosi lavori sugli insiemi ad ampiezza costante e sulla utilizzazione delle misure di Hausdorff nello studio della frontiera degli insiemi convessi; ci limitiamo a citare espressamente [B].

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova, Via Belzoni 7 - 35131 Padova.

Ricerca effettuata con fondi erogati dal Ministero della P.I.

Indichiamo con μ la misura unidimensionale di Hausdorff in $\mathbf{R}^2$; indichiamo con ω la circonferenza unitaria di $\mathbf{R}^2$: $\omega = \{u \in \mathbf{R}^2 \colon |u| = 1\}$. Per evitare confusioni nel linguaggio, indicheremo con m la misura μ dei sottoinsiemi di ω μ-misurabili, utilizzando invece il simbolo μ nel caso generale.

Sia $E \subset \mathbf{R}^2$ un insieme chiuso di ampiezza costante δ. Elenchiamo una serie di risultati sostanzialmente noti, ma che non abbiamo trovato raggruppati o enunciati e dimostrati in tutta la loro generalità. La frontiera ∂E di E è una curva rettificabile che ammette una rappresentazione $f\colon \omega \to \mathbf{R}^2$ definita mediante le rette di appoggio dell'insieme E. Sia B un sottoinsieme di Borel di ω; l'insieme $f(B)$ è μ-misurabile; posto $l(B) = \mu(f(B))$, la misura l si può prolungare ad una σ-algebra di sottoinsiemi di ω, contenente gli insiemi m-misurabili, in modo da risultare completa. Risulta cosí:

$$(0.1) \qquad \mu(f(A)) = l(A) \qquad \forall A \ l\text{-misurabile}\,.$$

0.2. *La misura l è assolutamente continua rispetto alla misura m.*

Per dimostrare questo enunciato basta tener presente che per la rettificabilità di ∂E, ogni suo arco si può approssimare con poligonali inscritte e che le perpendicolari a due rette di appoggio si incontrano ad una distanza da ciascuno dei loro piedi compresa fra 0 e δ.

Esiste pertanto una funzione $R(u)$ definita in ω, m-misurabile, tale che per ogni sottoinsieme I m-misurabile si abbia:

$$(0.3) \qquad l(I) = \int_I R(u)\, m(du)\,.$$

Se parametrizziamo ω al solito modo mediante l'argomento φ, si ha, indicando sempre con il simbolo I il corrispondente insieme degli argomenti: $l(I) = \int_I R[u(\varphi)]\, d\varphi$, per cui, per ogni $u \in \omega$, ad eccezione dei punti di un insieme di misura m nulla, si ha:

$$(0.4) \qquad R(u) = R[u(\varphi)] = \lim \frac{l([\varphi, \varphi + \Delta\varphi])}{\Delta\varphi}\,.$$

Detto N_R il sottoinsieme di misura nulla di ω formato dagli u in cui il limite (0.4) non esiste, per il modo stesso in cui si definisce la funzione f, la funzione $R(u)$ per $u \in \omega \setminus N_R$ è il raggio di curvatura di ∂E nel punto u.

La funzione $R(u)$ verifica m-q.o. (m-quasi ovunque) in ω le seguenti relazioni:

$$0 \leqslant R(u) \leqslant \delta . \tag{0.5}$$

$$R(u) + R(-u) = \delta . \tag{0.6}$$

La prima delle diseguaglianze di (0.5) segue da (0.4), mentre la seconda si ottiene con tecniche analoghe a quelle usate a proposito dell'assoluta continuità. La (0.6), ben nota nel caso che E sia sufficientemente regolare, vale in generale perchè la dimostrazione classica utilizza solo l'esistenza del limite (0.4) in entrambi i punti u e $-u$ nonchè l'esistenza della tangente a ∂E nei punti $f(u)$ in cui il limite (0.4) non è nullo, circostanze queste che per gli insiemi ad ampiezza costante di $\mathbf{R}^2$ sono verificate m-q.o. Dalle proprietà dei sottoinsiemi di un insieme convesso segue infine:

$$\nu_\delta(E) = \nu_\delta(\partial E) = \delta . \tag{0.7}$$

Indichiamo con $s_\delta(E)$ il salto che le misure approssimanti hanno in $t = \delta$, cioè, posto $\nu_{\delta^-}(E) = \lim\limits_{t \to \delta^-} \nu_t(E)$ e $\nu_{\delta^+}(E) = \lim\limits_{t \to \delta^+} \nu_t(E)$ è $s_\delta(E) = \nu_{\delta^-}(E) - \nu_{\delta^+}(E)$. Ricordando poi che $\nu_{\delta^+}(E) = \nu_\delta(E)$ (cfr. [S-S] o [C-Z]) si ha:

$$s_\delta(E) = \nu_{\delta^-}(E) - \nu_\delta(E) . \tag{0.8}$$

Nel presente lavoro, per gli insiemi δ-massimali e le loro frontiere, daremo una maggiorazione di s_δ ed una condizione sufficiente affinchè s_δ sia nullo.

Nel seguito E sarà sempre un insieme δ-massimale, ed adotteremo relativamente ad esso il simbolismo sopra introdotto.

Sia $I \subset \omega$, indichiamo con I^s il simmetrico di I rispetto all'origine cioè:

$$I^s = \{u \in \omega : -u \in I\} .$$

Posto $K_0 = \{u \in \omega \setminus N_R : R(u) = 0\}$, indichiamo con $\mathcal{K}$ la famiglia dei sottoinsiemi K di ω m-misurabili che godono delle seguenti proprietà:

k.1) $K \supset K_0$,

k.2) $\omega \setminus K = K^s$.

Indichiamo con $\mathcal{K}^*$ la famiglia dei sottoinsiemi K di ω m-misurabili che oltre alle proprietà k.1) e k.2) godono della proprietà:

k.3) $K \cup N_R$ non contiene archi di lunghezza maggiore o uguale a π.

OSSERVAZIONE 0.A. *Le proprietà* k.1) e k.2) *non sono in contraddizione* perchè per la (0.6) se $u \in K_0$, $-u \notin K_0$.

OSSERVAZIONE 0.B. $\mathcal{K}$ *non è vuota*. Infatti, detta S una semicirconferenza semiaperta contenuta in ω, posto

$$K_1 = \{u \in \omega \setminus N_R \colon R(u) < \delta/2\}, \qquad K_2 = \{u \in S \setminus N_R \colon R(u) = \delta/2\},$$

$$K_3 = (N_R \cap N_R^s) \cap S, \qquad K_4 = K_1 \cup K_2 \cup K_3,$$

$$K_5 = \{u \in N_R \colon -u \notin K_4\},$$

non è difficile dimostrare che $K = K_4 \cup K_5$ è un'insieme di $\mathcal{K}$.

PROPOSIZIONE 1. *Se* $K \in \mathcal{K}$ *allora* $m(K) = \pi$.

DIM. Segue ovviamente da k.2) e dal fatto che $m(K^s) = m(K)$. //

PROPOSIZIONE 2. *Se* $K \in \mathcal{K}$ *e* $K \notin \mathcal{K}^*$, $\exists p \in K$:

$$K^* = (K \setminus \{p\}) \cup \{-p\} \in \mathcal{K}^*.$$

DIM. Per la prop. 1 e per la k.3) un tale K ha la proprietà che $K \cup N_R = S \cup N$ ove S è una semicirconferenza semiaperta di estremi q e $-q$ ed N un sottoinsieme di N_R. Poichè $f(S)$ è un arco che sottende una corda di lunghezza δ, si ha $\delta \leqslant l(S) = \int_S R(u)m(du) = \int_{S \setminus K_0} R(u)m(du) \leqslant \delta m(S \setminus K_0)$, da cui $m(S \setminus K_0) \geqslant 1$. Uno qualsiasi degli infiniti punti dell'insieme $S \setminus (K_0 \cup N_R \cup \{q, -q\})$ fa al caso nostro. //

Indichiamo con $\mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi aperti A di ω che godono delle seguenti proprietà:

$a.1)$ $\exists K \in \mathcal{K}^*$: $A \supset K \cup N_R$,

$a.2)$ A non contiene archi di lunghezza maggiore o uguale a π.

PROPOSIZIONE 3. *Gli insiemi $A \in \mathcal{A}$ godono anche delle proprietà*:

$a.3)$ $A \supset K_0 \cup N_R$,

$a.4)$ $\omega \setminus A \subset A^s$,

$a.5)$ *se* $u \notin A$ *allora* $-u \in A$,

$a.6)$ $m(A) > \pi$.

DIM. È tutto immediato compreso il fatto che $a.4)$ ed $a.5)$ sono tra loro equivalenti. //

Poichè A è aperto $A = \bigcup_i \Delta_i$ ove Δ_i sono archi aperti a due a due disgiunti e l'unione è al più numerabile. Poichè si ha inoltre $\sum_i m(\Delta_i) \leqslant \leqslant 2\pi$, si può supporre che gli archi siano ordinati per lunghezze decrescenti e che, per la $a.2)$, $m(\Delta_1) < \pi$.

In seguito quando scriveremo $A = \bigcup_i \Delta_i$ intenderemo sempre la scomposizione appena descritta con i Δ_i ordinati per lunghezze decrescenti. Per ogni i, poi, chiameremo p_i e q_i gli estremi dell'arco. Se necessario penseremo ω orientata, in tal caso p_i sarà il primo estremo e q_i il secondo.

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $A = \bigcup_i \Delta_i \in \mathcal{A}$. *Gli insiemi* $\overline{\text{conv}}\,(f(\overline{\Delta}_i))$ *e* $\overline{\text{conv}}\,(f(\omega \setminus A))$ *formano un ricoprimento chiuso di* E (*e quindi di* ∂E) *con massimo diametro* t'_A *minore di* δ.

DIM. In questa dimostrazione faremo uso di varie proprietà degli insiemi ad ampiezza costante e della rappresentazione f. In particolare:

4.1) *Se per* $x = f(u)$ *passano due rette di appoggio distinte,* $u \in K_0$ *o* $u \in N_R$, *che per* $a.1)$ *implica* $u \in A$.

4.2) *Se per* x *passa un'unica retta d'appoggio,* $f^{-1}(\{x\})$ *contiene un solo elemento, quindi la* f *subordina una corrispondenza biunivoca fra* $\omega \setminus A$ *ed* $f(\omega \setminus A)$; *segue subito che* $f(A) \cap f(\omega \setminus A) = \emptyset$.

4.3) *Se Δ è un arco aperto di estremi p e q, $f(\bar{\Delta})$ è un arco chiuso di estremi $f(p)$ ed $f(q)$, non è detto invece che l'arco $f(\Delta)$ sia aperto, però se $f(p)$ ed $f(q)$ sono punti con una sola retta di appoggio allora $f(\Delta)$ è aperto in ∂E.*

Ciò premesso, per ogni i, sia $x_i = f(p_i)$ ed $y_i = f(q_i)$; $p_i, q_i \in \omega \setminus \Delta$. Siano r_i ed s_i le rette di appoggio rispettivamente per x_i ed y_i, r_i ed s_i non sono parallele altrimenti $p_i = -q_i$ in contraddizione con $a.5$). Sia z_i il punto d'incontro di r_i ed s_i e sia T_i il dominio triangolare di vertici $x_i y_i z_i$, posto $F_i = T_i \cap E$, dimostriamo che:

4.4) $d(F_i) = |x_i - y_i| < \delta$,

4.5) $f(\bar{\Delta}_i) = T_i \cap \partial E$,

4.6) $\overline{\text{conv}}\,(f(\bar{\Delta}_i)) = F_i$,

4.7) $f(\Delta_i) = T_i^\circ \cap \partial E$.

Che $d(F_i) = |x_i - y_i|$ si può dimostrare sfruttando proprietà degli insiemi ad ampiezza costante, in particolare il fatto che un insieme E ad ampiezza costante δ è l'intersezione di tutti i cerchi chiusi di raggio δ e centro in E; $|x_i - y_i| < \delta$ segue dal fatto che se $|x_i - y_i| = \delta$, r_i ed s_i sarebbero parallele.

Per 4.3), $f(\bar{\Delta}_i)$ deve essere uno dei due archi chiusi in cui x_i e y_i spezzano ∂E, cioè o $f(\bar{\Delta}_i) = \partial E \cap T_i$ o $f(\bar{\Delta}_i) = \partial E \setminus T_i^\circ$, ma se $f(\bar{\Delta}_i) = \partial E \setminus T_i^\circ$ poichè $d(F_i) < \delta$ posto $u_0 = (x_i - y_i)/|x_i - y_i|$ si avrebbe $|f(u_0) - f(-u_0)| = \delta$ ed u_0 e $-u_0 \in \Delta_i$ in contraddizione con $a.2$), quindi anche 4.5 è dimostrata.

4.6 segue dal fatto che $f(\bar{\Delta}_i) \subset F_i$ ed inoltre F_i è chiuso e convesso ed i suoi punti estremi sono i punti di $f(\bar{\Delta}_i)$. 4.7 è banale conseguenza di 4.5 e di 4.3.

Dimostriamo che:

4.8) l'insieme $\{d(F_i)\}$ ha massimo.

A tal fine basterà dimostrare che la serie $\sum_i d(F_i)$ converge. Si ha, infatti:

$$\sum_i d(F_i) = \sum_i |x_i - y_i| \leqslant \sum_i l(\Delta_i) \leqslant \sum_i \int_{\Delta_i} R(u)m(du) = \int_{\Delta} R(u)m(du) \leqslant 2\pi\delta\,,$$

ove le successive relazioni sono giustificate da 4.4, dal fatto che la lunghezza dell'arco è maggiore della lunghezza della corda sottesa, dalla 0.3 e dalla 0.5.

Sia $F_0 = E \setminus \left(\bigcup_i T_i^\circ\right)$, posto $t_A = d(F_0)$, dimostriamo che:

4.9) $E = F_0 \cup \left(\bigcup_i F_i\right)$,

4.10) $\overline{\text{conv}}\,(f(\omega\setminus A)) = F_0$,

4.11) $t_A = d(F_0) < \delta$.

La dimostrazione di 4.9) è immediata.

Poichè per 4.7) $f(\Delta_i) = \partial E \cap T_i^\circ$ si ha $f(A) = \partial E \cap \left(\bigcup_i T_i^\circ\right)$ ma $\partial E = f(\omega) = f(\omega\setminus A) \cup f(A)$ con $f(\omega\setminus A) \cap f(A) = \emptyset$ (cfr.4.2)), allora $f(\omega)\setminus f(A) = f(\omega\setminus A)$ cioè $\partial E\setminus\left(\bigcup_i T_i^\circ\right) = f(\omega\setminus A)$ e quindi $f(\omega\setminus A) \subset$ $\subset E\setminus\left(\bigcup_i T_i^\circ\right) = F_0$. Dal fatto che $E\setminus\left(\bigcup_i T_i^\circ\right) = \bigcap_i (E\setminus T_i^\circ)$ e, per ogni i, $E\setminus T_i^\circ$ è chiuso e convesso, segue che F_0 è chiuso e convesso, e contiene, per quanto appena visto, $f(\omega\setminus A)$; allora $\overline{\text{conv}}\,(f(\omega\setminus A)) \subset F_0$. Non è difficile però verificare che i punti estremi di F_0 sono i punti di $f(\omega\setminus A)$ e quindi 4.10) è dimostrata.

Siano $H_i(u)$, $H_0(u)$ e $H(u)$ le funzioni di appoggio di $E\setminus T_i^\circ$, di F_0 e di E rispettivamente. Dalla costruzione di $E\setminus T_i^\circ$ risulta evidente che $H_i(u) < H(u)$ $\forall u \in \Delta_i$, poichè $F_0 \subset E\setminus T_i^\circ$ $\forall i$, $H_0(u) \leqslant H_i(u) < H(u)$ $\forall i$ e $\forall u \in \Delta_i$, questo implica che $H_0(u) < H(u)$ $\forall u \in A$; dalla a.5) segue:

$$H_0(u) + H_0(-u) < H(u) + H(-u) = \delta \qquad \forall u \in \omega\,.$$

La compattezza di ω e la continuità delle funzioni di appoggio implicano: $d(F_0) = \max\{H_0(u) + H_0(-u),\ u \in \omega\} < \delta$.

La dimostrazione della prop. 4 segue da 4.6), 4.10), 4.9), 4.8), 4.4), 4.11), e dal fatto che $t'_A = \max\{d(F_0), \max\{d(F_i)\}\}$. //

OSSERVAZIONE 4.A. *Poichè* $\partial E = f(\omega\setminus A) \cup f(A) \subset F_0 \cup f(A)$ *si ha*:

$$\nu_{t_A}(\partial E) \leqslant \nu_{t_A}(F_0) + \nu_{t_A}(f(A)) \leqslant t_A + \nu_{t_A}(f(A))\,.$$

PROPOSIZIONE 5. *$\forall \varepsilon > 0$ e $\forall A \in \mathcal{A}$, esiste un τ_A con $t_A \leqslant \tau_A < \delta$ tale che:*

$$\nu_{\tau_A}(E) \leqslant \tau_A + \nu_{t_A}(f(A)) + \varepsilon .$$

DIM. Fissato ε, esiste un ricoprimento $\{C_i\}$ di $f(A)$ tale che $\sum_i d(C_i) < \nu_{t_A}(f(A)) + \varepsilon/2$ e $\max\{d(C_i)\} \leqslant t_A$.

Si può costruire, vedi [R] teor. 28, un ricoprimento di aperti $\{G_i\}$ con $G_i \supset C_i$ $\forall i$, tale che $\theta = \max\{d(G_i)\} < \delta$, $\sum_i d(G_i) \leqslant \sum_i d(C_i) + \varepsilon/2$ e quindi $\sum_i d(G_i) < \nu_{t_A}(f(A)) + \varepsilon$.

Consideriamo $C_0 = E \setminus \left(\bigcup_i G_i\right)$. C_0 è chiuso e $d(C_0) < \delta$. Se, infatti, $d(C_0) = \delta$, $\exists x, y \in C_0$: $|x - y| = \delta$. Poichè $C_0 \subset E$, tali $x, y \in \partial E \cap C_0$ ed essendo $C_0 \cap f(A) = \emptyset$ si avrebbe $x, y \in f(\omega \setminus A)$, ma allora $d\left(\overline{\text{conv}}\,(f(\omega \setminus A))\right) = \delta$, contrariamente a quanto dimostrato nella prop. 4. Sia $\tau_A = \max\{\theta, d(C_0), t_A\}$, poichè $C_0 \cup \left(\bigcup_i \bar{G}_i\right) \supset E$ e $d(C_0) + \sum_i d(\bar{G}_i) < d(C_0) + \nu_{t_A}(f(A)) + \varepsilon$ si ha:

$$\nu_{\tau_A}(E) \leqslant \tau_A + \nu_{t_A}(f(A)) + \varepsilon . \quad //$$

PROPOSIZIONE 6. *$\forall \eta > 0$, se $A \in \mathcal{A}$ e $m(A) < \pi + (\eta/2)$ allora $\exists p$, $q \in \omega \setminus A$ tali che $|(-p) - q| < \eta$.*

DIM. Se $m(A) < \pi + (\eta/2)$ allora $m(A \cap A^s) < \eta$. Infatti $m(\omega \setminus A) = m(\omega) - m(A) > \pi - (\eta/2)$; ora, tenendo conto di $a.4$), $(A^s \cap A) = A^s \setminus (\omega \setminus A)$ e, poichè $m(A^s) = m(A)$, si ha:

$$m(A \cap A^s) = m[A^s \setminus (\omega \setminus A)] = m(A^s) - m(\omega \setminus A) < \eta .$$

Pensiamo che ω sia orientata ed $A = \bigcup_i \Delta_i$ con le solite notazioni. $p_1 \notin A$ quindi per $a.5$) $-p_1 \in A$, esiste pertanto un $j > 1$ (altrimenti $m(\Delta_1) \geqslant \pi$) tale che $-p_1 \in \Delta_j$; sia Γ l'arco di ω che ha come primo estremo $-p_1$ e come secondo estremo q_j, si ha: $\Gamma \subset \Delta_j$, $m(\Gamma) < m(\Delta_j) \leqslant m(\Delta_1)$ e perciò $\Gamma \subset \Delta_1^s$. Da cui si deduce $\Gamma = \Gamma \cap \Delta_1^s \subset A \cap A^s$ e di conseguenza: $m(\Gamma) < m(A \cap A^s) < \eta$. Pertanto poichè $|(-p_1) - q_j| < m(\Gamma)$ i punti p_1 e q_j sono i punti p e q di cui si afferma l'esistenza nell'enunciato. //

PROPOSIZIONE 7. *$\forall K \in \mathcal{K}^*$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $m(A \setminus K) < \varepsilon$ e t'_A e t_A verificano la relazione: $\delta - \varepsilon < t_A \leqslant t'_A < \delta$.*

DIM. Che $t_A \leqslant t'_A < \delta$ è stato già dimostrato nella prop. 4. Fissati K ed ε, consideriamo la funzione $g\colon \omega \times \omega \to \mathbf{R}$ così definita: $g(u, v) = |f(u) - f(v)|$, essa risulta evidentemente uniformemente continua, pertanto in corrispondenza ad ε esiste un η tale che per $|u_1 - u_2| < \eta$ e $|v_1 - v_2| < \eta$ si abbia $\big||f(u_1) - f(v_1)| - |f(u_2) - f(v_2)|\big| < \varepsilon$. Sia $\eta_1 = \min\{\eta, 2\varepsilon\}$, poichè $m(K \cup N_R) = \pi$, $\exists A$ aperto tale che $A \supset K \cup N_R$ e $m(A) < \pi + (\eta_1/2)$ che implica $m(A \setminus K) < \eta_1/2$, non solo ma poichè $K \cup N_R$ non contiene archi di lunghezza maggiore o uguale a π, anche A si può prendere con la stessa proprietà e quindi appartenente ad $\mathcal{A}$. Ora per la prop. 6, $\exists p, q \in \omega \setminus A$ tali che $|(-p) - q| < \eta_1$, prendendo $u_1 = p$, $v_1 = -p$, $u_2 = p$, $v_2 = q$, si ha:

$$\big||f(p) - f(-p)| - |f(p) - f(q)|\big| < \varepsilon$$

cioè $\delta - |f(p) - f(q)| < \varepsilon$ ed ancora $|f(p) - f(q)| > \delta - \varepsilon$; ma poichè $p, q \in \omega \setminus A$ ed $f(\omega \setminus A) \subset F_0$ si ha $t_A = d(F_0) > \delta - \varepsilon$. //

COROLLARIO 7.A. $\forall K \in \mathcal{K}^*$, *esiste una successione di insiemi* $A_n \in \mathcal{A}$ *tali che* $A_n \supset K \cup N_R$, $m(A_n \setminus K) < 1/n$ *e* $t_{A_n} \to \delta$.

$(A_n)_n$ *si può prendere decrescente e* $(t_{A_n})_n$ *crescente.*

DIM. È immediata conseguenza della prop. 6. //

Nel seguito per brevità indicheremo t_{A_n} con t_n.

PROPOSIZIONE 8. *Sia* $K \in \mathcal{K}^*$ *ed* $(A_n)_n$ *una successione che gode delle proprietà di cui al precedente corollario, allora* $\nu_{t_n}(f(A_n \setminus K)) \to 0$.

DIM. $m(A_n \setminus K) \to 0$, per 0.2, implica $l(A_n \setminus K) \to 0$; ma per la 0.1 anche $\mu(f(A_n \setminus K)) \to 0$. Dal fatto poi che $\forall n$ $\nu_{t_n}(f(A_n \setminus K)) \leqslant \mu(f(A_n \setminus K))$ segue la tesi. //

PROPOSIZIONE 9. *Sia* N *un sottoinsieme di* ω *l-misurabile, sono equivalenti le seguenti proprietà:*

9.1) $l(N) = 0$,

9.2) $\forall t > 0$ $\nu_t(f(N)) = 0$,

9.3) $\exists t > 0$: $\nu_t(f(N)) = 0$,

9.4) $\forall D \subset \omega$ *e* $\forall t > 0$, $\nu_t(f(D)) = \nu_t(f(D \setminus N)) = \nu_t(f(D \cup N))$.

DIM. Immediata. //

COROLLARIO 9.*A*. $\forall D \subset \omega$, *e* $\forall t > 0$ $\nu_t(f(D)) = \nu_t(f(D \setminus K_0)) = = \nu_t(f(D \cup K_0))$.

DIM. Segue da 9.4) e da $l(K_0) = \int_{K_0} R(u)m(du) = 0$. //

COROLLARIO 9.*B*. $\forall K \in \mathcal{K}$, $\exists K_* \in \mathcal{K}^*$ *tale che*:

$$\forall t, \ \nu_t(f(K_*)) = \nu_t(f(K)) \ e \ \nu_t(f(K_*^s)) = \nu_t(f(K^s)) .$$

DIM. Se $K \notin \mathcal{K}^*$ segue dalla prop. 2, dalla 9.4) e dal fatto che se $K_* = (K \setminus \{p\}) \cup \{-p\}$, $K_*^s = (K^s \setminus \{-p\}) \cup \{p\}$. //

PROPOSIZIONE 10. *Se* $K \in \mathcal{K}$ *allora* $\nu_\delta(f(K)) = \nu_{\delta^-}(f(K)) \leqslant \delta$.

DIM. Per il corollario 9.*B* è lecito supporre $K \in \mathcal{K}^*$. Dimostriamo dapprima che $\nu_{\delta^-}(f(K^s)) \leqslant \delta$. Poichè $K \in \mathcal{K}^*$ prendiamo una successione $(A_n)_n$ di insiemi di $\mathcal{A}$ come nel Corollario 7.*A*, si ha:

$$\nu_{t_n}(f(K^s)) = \nu_{t_n}(f(\omega \setminus K)) \leqslant \nu_{t_n}(f(\omega \setminus A_n)) + \nu_{t_n}(f(A_n \setminus K)) \leqslant \\ \leqslant t_n + \nu_{t_n}(f(A_n \setminus K)) ,$$

ove le successive relazioni sono giustificate da *k*.2) dalla subadditività delle ν_t e da 4.10) e 4.11). Passando al limite, tenendo conto del corollario 7.*A* e della prop. 8 segue:

$$\nu_{\delta^-}(f(K^s)) \leqslant \delta . \tag{10.1}$$

Sia $K_1 = (K \setminus K_0)^s \cup K_0$; si ha: $K_1^s = (K \setminus K_0) \cup K_0^s$ e $K_1 \in \mathcal{K}$. Per il corollario 9.*B* non è restrittivo supporre $K_1 \in \mathcal{K}^*$; poichè $K \setminus K_0 \subset K_1^s$, tenuto conto del corollario 9.*A* e di (10.1) si ha:

$$\nu_{\delta^-}(f(K)) = \nu_{\delta^-}(f(K \setminus K_0)) \leqslant \nu_{\delta^-}(f(K_1^s)) \leqslant \delta . \tag{10.2}$$

Ora se fosse $\nu_{\delta^-}(f(K)) > \nu_\delta(f(K))$ seguirebbe, per [C-Z] corollario 5, $\nu_{\delta^-}(f(K)) > \delta$, in contrasto con (10.2). //

PROPOSIZIONE 11. $s_\delta(\partial E) \leqslant s_\delta(E) \leqslant \inf\{\nu_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\}$.

DIM. La prima disuguaglianza è ovvia, per la seconda dimostriamo che se $K \in \mathcal{K}$ allora $s_\delta(E) \leqslant \nu_\delta(f(K))$. Per il corollario 9.$B$ e per la prop. 10 basterà dimostrare che $s_\delta(E) \leqslant \nu_{\delta^-}(f(K))$ con $K \in \mathcal{K}^*$. Al solito fissato $K \in \mathcal{K}^*$ prendiamo una successione $(A_n)_n$ come nel corollario 7.A. Per ogni $\varepsilon > 0$, indicando per semplicità di scrittura τ_{A_n} con τ_n, per la prop. 5 si ha:

$$\nu_{\tau_n}(E) \leqslant \tau_n + \nu_{t_n}(f(A_n)) + \varepsilon ,$$

e quindi

$$\nu_{\tau_n}(E) \leqslant \tau_n + \nu_{t_n}(f(A_n \setminus K)) + \nu_{t_n}(f(K)) + \varepsilon .$$

Passando al limite, per la prop. 8 ed il fatto che $t_n \leqslant \tau_n < \delta$ si ottiene: $\nu_{\delta^-}(E) \leqslant \delta + \nu_{\delta^-}(f(K)) + \varepsilon$, da cui, per 0.7 e l'arbitrarietà di ε si ha:

$$s_\delta(E) \leqslant \nu_{\delta^-}(f(K)) . \quad //$$

COROLLARIO 11.A. $s_\delta(\partial E) \leqslant s_\delta(E) \leqslant \delta$.

DIM. Segue subito da prop. 11 e 10. //

COROLLARIO 11.B. *Se* $m(K_0) = \pi$ *allora* $s_\delta(\partial E) = s_\delta(E) = 0$.

DIM. $\forall K \in \mathcal{K}$ si ha $m(K \setminus K_0) = 0$ cioè, per 0.2, $l(K \setminus K_0) = 0$, da cui per la prop. 9 ed il corollario 9.A $\nu_\delta(f(K)) = 0$. //

COROLLARIO 11.C. *Se P_R è un poligono di Reuleaux allora* $s_\delta(\partial P_R) = = s_\delta(P_R) = 0$.

DIM. È noto che per un poligono di Reuleaux è $m(K_0) = \pi$. //

BIBLIOGRAFIA

[B] A. S. BESICOVITCH, *A problem on a circle*, Journal London Math. Soc., **36** (1961), pp. 241-244.

[B-F] T. BONNENSEN - W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin (1934).

[C-Z] A. CHIFFI - G. C. ZIRELLO, *Misura di Hausdorff e misure approssimanti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **69** (1983), pp. 233-241.
[E] H. G. EGGLESTON, *Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. of Math., **3** (1965), pp. 163-172.
[L] K. LEICHTWEISS, *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin (1980).
[R] C. A. ROGERS *Hausdorff measures*, Cambridge University Press (1970).
[S-S] M. SION - D. SJERVE, *Approximation properties of measures generated by set function*, Mathematika, **9** (1962), pp. 145-156.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 Luglio 1983.