

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARTA CARDIN

## **Su una classe di gruppi con molti sottogruppi quasinormali**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 72 (1984), p. 157-161

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1984\\_\\_72\\_\\_157\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__157_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Su una classe di gruppi con molti sottogruppi quasinormali.

MARTA CARDIN (\*)

1. In [2] si considera la classe dei gruppi  $G$  con una famiglia di sottogruppi  $\{H_i\}_{i \in I}$  tali che  $G = \langle H_i : i \in I \rangle$  e se  $i, j \in I$  ogni sottogruppo contenuto in  $H_i \vee H_j$  è quasinormale in  $G$ , provando che un gruppo periodico con tali proprietà è metabeliano.

In questa nota si utilizza il teorema citato per determinare la struttura dei gruppi appartenenti alla classe considerata.

Dai risultati trovati si deduce che se  $\sigma$  è una proiezione del gruppo  $G$  nel gruppo  $\bar{G}$ ,  $N \triangleleft G$  allora  $(N^\sigma[N^\sigma, 2\bar{G}])^{\sigma^{-1}}/N$  è un gruppo modulare migliorando così un risultato di [2].

2. Un gruppo  $G$  del tipo considerato è generato da sottogruppi ciclici quasinormali quindi ascendenti ed è dunque un gruppo di Gruenberg.

Per il teorema 2.31 di [3]  $G$  è localmente nilpotente quindi i suoi sottogruppi di Sylow sono normali.

Allora per studiare i gruppi periodici della classe considerata è sufficiente esaminare i  $p$ -gruppi appartenenti a tale classe.

Nel seguito se  $\{H_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di sottogruppi del gruppo  $G$  con le proprietà citate supporremo sempre che  $H_i = \langle x_i \rangle$  per un certo  $i \in I$ , e che se  $G$  è finito  $\{x_i\}_{i \in I}$  sia un sistema minimale di generatori di  $G$ .

**LEMMA 1.** Sia  $G = \langle x_i : i \in I \rangle$  un  $p$ -gruppo tale che ogni sottogruppo di  $\langle x_i, x_j \rangle$  sia quasinormale in  $G$ . Se non esistono due sotto-

(\*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento Matematica Applicata dell'Università, Dorsoduro 3861, 30123 Venezia.

gruppi distinti  $\langle x_i, x_j \rangle$  e  $\langle x_k, x_l \rangle$  ( $i, j, k, l \in I$ ) isomorfi a  $Q_8$ , allora  $G$  è modulare.

**DIM.** È sufficiente considerare il caso in cui  $G$  è un  $p$ -gruppo finito.

Possiamo supporre quindi che  $I = \{1, \dots, n\}$  con  $n > 2$  perchè la tesi è banale se  $n < 2$ .

Dimostriamo dapprima il lemma nel caso in cui  $p = 2$  e  $G$  ha esponente non maggiore di 4. Sd  $\langle x_i, x_j \rangle$  non è isomorfo a  $Q_8$  per ogni  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , allora  $G$  è abeliano

Supponiamo dunque che  $\langle x_1, x_2 \rangle$  sia il gruppo dei quaternioni e quindi che  $\langle x_1, x_i \rangle$  e  $\langle x_2, x_i \rangle$  siano abeliani per ogni  $i$ ,  $3 \leq i \leq n$ . Se  $|x_i| = 4$  per un certo  $i$ ,  $3 \leq i \leq n$ , allora  $\langle x_i \rangle \cap \langle x_1, x_2 \rangle > 1$  perchè  $\langle x_1 x_i \rangle$  e  $\langle x_2 x_i \rangle$  devono essere permutabili; si ha dunque  $|x_2 x_i| = 2$  e quindi  $\langle x_1, x_2 x_i \rangle$  è un gruppo diedrale e ciò è assurdo perchè  $\langle x_1, x_2 x_i \rangle$  è modulare per la proposizione 1.4 di [2]. Allora per ogni  $i$ ,  $3 \leq i \leq n$ ,  $|x_i| = 2$  e quindi  $G$  è hamiltoniano.

Considerando quindi il caso generale sia  $G$  un controesempio di cardinalità minima; se  $p = 2$   $G$  ha esponente maggiore di 4 e quindi, per la dimostrazione della proposizione 1.6 di [2] che se  $p > 2$  è valida anche se  $G$  ha esponente minore o uguale a  $p^2$ ,  $Z(G)$  non è ciclico.

Sia  $A$  un sottogruppo di  $Z(G)$  di esponente  $p$  con  $|A| = p^2$ . Proviamo che se  $x$  è un elemento non triviale di  $A$ ,  $G/\langle x \rangle$  è modulare.

Infatti in caso contrario esisterebbero due sottogruppi  $\langle x_i, x_j \rangle$  e  $\langle x_k, x_l \rangle$  ( $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ) che modulo  $\langle x \rangle$  sono distinti e isomorfi a  $Q_8$ .

$x$  non appartiene a  $\langle x_i, x_j \rangle$  o a  $\langle x_k, x_l \rangle$  perchè non esistono gruppi modulari 2-generati di ordine 16 con un quoziente isomorfo a  $Q_8$ .

Allora  $\langle x_i, x_j \rangle$  e  $\langle x_k, x_l \rangle$  sarebbero due sottogruppi distinti e isomorfi a  $Q_8$  di  $G$ , in contraddizione con le ipotesi.

$G$  non è modulare quindi contiene un sottogruppo  $H$  minimale non modulare.

$A \leq H$  perchè se esistesse un elemento  $x$  di  $A$  tale che  $\langle x \rangle \cap H = 1$  allora  $H \cong H\langle x \rangle / \langle x \rangle$  sarebbe un gruppo modulare.

Per la proposizione 1.8 di [4] esiste un sottogruppo  $N$  di  $H$  tale che  $H/N$  è un gruppo di ordine  $p^3$  non modulare.

Allora  $A \cap N = 1$  e ciò è assurdo perchè  $H/N$  non può contenere un sottogruppo centrale non ciclico.

**COROLLARIO.** Se  $\sigma$  è una proiettività del gruppo  $G$  nel gruppo  $\bar{G}$  e  $N \triangleleft G$  allora  $(N^\sigma[N^\sigma, 2\bar{G}])^{\sigma^{-1}}/N$  è un gruppo modulare.

**DIM.** La tesi discende direttamente dalle dimostrazioni del lemma 2.4 e del teorema 2.5 di [2] e dal lemma 1.

LEMMA 2. Se  $G$  è un gruppo non periodico e  $\{H_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottogruppi di  $G$  tali che ogni sottogruppo di  $H_i \vee H_j$  ( $i, j \in I$ ) è quasinormale in  $G$ , allora  $G$  è modulare.

DIM. Possiamo supporre che  $I = \{1, \dots, n\}$  e quindi che  $G$  sia nilpotente.

Sia  $T$  il sottogruppo di torsione di  $G$ ; per ogni  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$   $\langle x_i, x_j \rangle$  è un gruppo modulare e quindi  $\langle x_i, x_j \rangle T/T$  è abeliano per la proposizione 1.12 di [4].

Allora  $G/T$  è abeliano e quindi  $G/Z(G)$  è finito. Se  $G$  non è modulare esistono due elementi  $a$  e  $b$  di  $G$  tali che  $\langle a \rangle$  e  $\langle b \rangle$  non sono permutabili.

Allora se  $H = \langle a, b \rangle$  e  $K = (\langle a \rangle \cap Z(G)) (\langle b \rangle \cap Z(G))$ ,  $H/K$  è un gruppo finito non quasihamiltoniano.

$G$  è un gruppo nilpotente finitamente generato e quindi esiste  $N$  normale e di indice finito in  $G$  tale che  $H \cap N \leq K$ .

Si può supporre inoltre che la 2-componente di  $G/N$  abbia esponente maggiore di 4. Allora  $G/N$  è quasihamiltoniano perchè lo sono le sue  $p$ -componenti per il lemma 1 e ciò è assurdo perchè  $HN/N \cong H/H \cap N$  non è quasihamiltoniano.

Per quanto riguarda le notazioni sui gruppi extraspeciali si fa riferimento a [1, p. 203].

In particolare nel seguito se  $E$  e  $F$  sono due gruppi extraspeciali  $EF$  indicherà il loro prodotto centrale.

TEOREMA.  $G$  è un  $p$ -gruppo finito con un insieme di sottogruppi  $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$  tali che  $G = \langle H_i: 1 \leq i \leq n \rangle$  e se  $1 \leq i, j \leq n$ , ogni sottogruppo di  $H_i \vee H_j$  è quasinormale in  $G$  se e solo se o  $G$  è un  $p$ -gruppo modulare oppure  $p = 2$ ,  $G = B \times A$  con  $A$  2-gruppo abeliano elementare e  $B$  isomorfo ad uno dei seguenti gruppi per un certo intero positivo  $n$ :  $Q_3^n D_3^n$ ,  $Q_3^n D_3^n \wr C_4$ ,  $Q_3^{n+1} D_3^n$ .

DIM. Se  $G$  non è modulare e soddisfa le ipotesi del teorema, si può supporre che  $n \geq 2$  e che  $\langle x_1, x_2 \rangle$  sia il gruppo dei quaternioni, per il lemma 1.

Allora per ogni  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\langle x_1, x_2, x_i \rangle$  è un gruppo di esponente 4 perchè o contiene due sottogruppi distinti  $\langle x_i, x_j \rangle$  e  $\langle x_k, x_i \rangle$  isomorfi a  $Q_8$  oppure è modulare per il lemma 1 quindi hamiltoniano.

Pertanto se  $x$  è un elemento di  $G$  di periodo 2 e  $x = x_i$  o  $x = x_i x_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , allora  $x \in Z(G)$  perchè per ogni  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $\langle x, x_k \rangle$  è un gruppo modulare per la proposizione 1.4 di [2].

Inoltre se  $x_i$  centralizza  $x_1$  (o  $x_2$ ) allora o  $|x_i| = 2$  oppure  $|x_1 x_i| = 2$  perchè  $\langle x_1, x_2, x_i \rangle$  è hamiltoniano.

Possiamo quindi limitarci a considerare il caso in cui per ogni  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ ,  $\langle x_1, x_i \rangle$  e  $\langle x_2, x_i \rangle$  sono isomorfi a  $Q_8$ .

Se  $\langle x_i, x_j \rangle$  è abeliano con  $3 \leq i, j \leq n$  allora  $|x_i x_j| = 2$  essendo  $x_i^2 = x_1^2 = x_j^2$ .

Supponiamo quindi che per ogni  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle$  sia il gruppo dei quaternioni.

Se  $n = 3$ ,  $G = \langle x_1, x_2 \rangle \times \langle x_1 x_2 x_3 \rangle$  è hamiltoniano.

Se  $n > 3$  ed  $n$  è pari,  $G = \langle x_1, x_2 \rangle \langle x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 \rangle \dots \langle x_{n-1} x_n, x_1 x_2 \dots x_{n-1} \rangle = Q_8 D_8^m \dots$  e quindi se  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $G = Q_8^m D_8^m$  mentre se  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ ,  $G = Q_8^{m+1} D_8^m$ .

Se  $n > 3$  ed  $n$  è dispari,  $G = \langle x_1, x_2 \rangle \langle x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 \rangle \dots \langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle$  con  $x_1 x_2 \dots x_n \in Z(G)$ .

Allora se  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $G = Q_8^m D_8^m \wr C_4$  mentre se  $n \not\equiv 1 \pmod{4}$   $G = Q_8^{m+1} D_8^m \times C_2$ .

Viceversa se  $G = Q_8^m D_8^m \wr C_4$  esistono degli elementi  $y_1, \dots, y_n$  di  $G$  tali che  $G = \langle y_1, y_2 \rangle \langle y_3, y_4 \rangle \dots \langle y_{n-2}, y_{n-1} \rangle \langle y_n \rangle$  dove  $\langle y_1, y_2 \rangle \cong Q_8$ ,  $\langle y_3, y_4 \rangle \cong D_8$  ( $|y_3| = 4$ )  $\dots \langle y_{n-2}, y_{n-1} \rangle \cong Q_8$  e  $y_n$  è di ordine 4.

Poniamo dunque

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1 y_2 y_3, \quad x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 \dots,$$

$$x_{n-2} = y_1 y_2 y_3 \dots y_{n-1}, \quad x_{n-1} = y_1 y_2 y_3 \dots y_{n-2} y_{n-1},$$

$$x_n = y_1 y_2 y_3 \dots y_{n-2} y_n.$$

Allora  $G = \langle x_i; 1 \leq i \leq n \rangle$  e per ogni  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $|x_i| = 4$   $x_i^2 = x_i^{-1}$  e quindi  $G$  appartiene alla classe considerata.

In modo analogo si prova che i gruppi del tipo  $Q_8^m D_8^m$  o  $Q_8^{m+1} D_8^m$  con  $m$  intero positivo hanno un sistema di generatori con le proprietà volute.

Per concludere la dimostrazione è sufficiente osservare che se  $B$  è un gruppo appartenente alla classe considerata e  $A$  è un 2-gruppo abeliano elementare anche  $B \times A$  appartiene a tale classe.

**3.** Da quanto già visto si deduce che se  $G$  è un  $p$ -gruppo non modulare appartenente alla classe in questione allora  $p = 2$  e  $G = B \times A$  con  $A$  2-gruppo abeliano elementare,  $B = \langle x_i: i \in I \rangle$  dove  $\{x_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di elementi di  $B$  tali che per ogni  $i, j \in I$   $i = j$ ,  $x_i^4 = 1$   $x^2 = x^2$  e  $x_i^2 = x_i^{-1}$ .

La struttura del gruppo  $B$  risulta determinata dalla cardinalità dall'insieme  $I$ ; costruiamo quindi per ogni cardinale  $c$  un gruppo  $B_c$  con tali proprietà e con  $I$  di cardinalità  $c$ .

Fissato il cardinale  $c$ , sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $GF(2)$  con una base  $\{v_i\}_{i \in I}$  di cardinalità  $c$ .

Supponiamo inoltre che su  $I$  sia fissato un ordinamento totale e definiamo quindi una forma bilineare  $f$  su  $V$  ponendo  $f(v_i, v_j) = 0$  se  $i < j$ ,  $f(v_i, v_j) = 1$  se  $i \geq j$ .

Sia dunque  $B_c = V \times GF(2)$  con il prodotto definito da  $(v, a)(w, b) = (v + w, a + b + f(v, w))$  ( $v, w \in V, a, b \in GF(2)$ ).

$B_c$  è un gruppo di esponente 4 e se  $x_i = (v_i, 0)\{x_{ij}\}_{i \in I}$  è un sistema minimale di generatori di  $B_c$  tale che se  $i, j \in I$   $i \neq j$ ,  $x_i^2 = x_j^2 = (0, 1)$  e  $x_i^{x_j} = (v_i, 1) = x_i^{-1}$ .

Se  $c$  è un cardinale infinito  $B_c$  è un gruppo extraspeciale perchè ovviamente  $B'_c = \langle (0, 1) \rangle$  e si può provare che  $Z(B_c) = \langle (0, 1) \rangle$ .

Infatti se  $x = x_{i_1} \dots x_{i_n}$  è un elemento di  $B_c$  ( $i_1, \dots, i_n \in I$ ) se  $n$  è pari  $[x, x_{i_1}] \neq 1$  mentre se  $n$  è dispari e  $j \in I$   $j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$   $[x, x_j] \neq 1$ .

In particolare se  $c = \aleph_0$  e  $I = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ ,

$$B_c = \langle x_1, x_2 \rangle \langle x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 \rangle \langle x_5 x_6, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \rangle \dots$$

$\dots \langle x_{n-1} x_n, x_1 \dots x_{n-1} \rangle \dots = Q_8 D_8 Q_8 \dots$  e quindi  $B_c$  è prodotto centrale di  $\aleph_0$  copie di  $Q_8$ .

### BIBLIOGRAFIA

- [1] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, Harper Row (1968).
- [2] F. NAPOLITANI - G. ZACHER, *Über das Verhalten der Normalteiler unter Projektivitäten* (in corso di pubbl. su Math. Z.).
- [3] D. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, vol. I e II, Springer-Verlag (1972).
- [4] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer (1956).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 Giugno 1983.