RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE CONGEDO

Rotating drops in a vessel. Existence of local minima

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 135-156

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__135_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 72 (1984)

Rotating Drops in a Vessel. Existence of Local Minima.

Giuseppe Congedo (*)

1. Introduzione.

In un recente lavoro [2] si è considerato il problema di minimizzare il funzionale che rappresenta l'energia totale di un liquido di volume assegnato in un contenitore ruotante intorno ad un asse con velocità angolare costante. L'energia del sistema è data da quella di volume dovuta alla forza di gravità ed alla energia cinetica e da quella di superficie dovuta alla tensione superficiale. In tale lavoro si dimostrano teoremi di esistenza di minimi assoluti insieme alla limitatezza ed alla regolarità degli stessi nel caso in cui il contenitore è la superficie che si ottiene ruotando intorno all'asse verticale la curva grafico di $f(t) = t^\alpha$, con $\alpha \geqslant 2$.

Nel citato lavoro si dimostra anche che nel caso $0 < \alpha < 2$ non esistono minimi assoluti.

Nel presente lavoro mi propongo di dimostrare che per ogni $\alpha > 0$ esistono sempre dei «minimi locali» purchè la velocità di rotazione sia sufficientemente piccola.

Di fatto, non mi limiterò a considerare soltanto contenitori del tipo precedente (con $0 < \alpha < 2$), ma prenderò in considerazione ogni contenitore le cui pareti tendono a infinito quando ci si allontana dall'asse di rotazione e verifichino inoltre una «maggiorazione di traccia» (vedi 1.4).

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica Università di Lecce.
Ringrazio il Prof. E. H. Gonzalez sotto la cui guida ho realizzato questo lavoro.

Per una formulazione matematica del problema ritengo utile richiamare il significato di alcuni simboli:

$\mathbb{R}^n$ indicherà lo spazio euclideo ad n dimensioni, $x = (y, z)$ con $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ e con $z \in \mathbb{R}$ un generico punto di $\mathbb{R}^n$, H_k la misura di Hausdorff k-dimensionale (vedi [5]).

Se con E indichiamo un insieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue, con Φ_E denoteremo la sua funzione caratteristica e con $D\Phi_E$ il gradiente di Φ_E (nel senso delle distribuzioni). Posto $\psi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ funzione lipschitziana tale che

(i) $\psi \geqslant 0$

(ii) $\psi(y) \to +\infty$ quando $|y| \to +\infty$, e

$$\mho = \{(y, z) \in R^n \colon z > \psi(y)\}$$

con $\int_{\mho} |D\Phi_E|$ indicheremo la variazione totale di $D\Phi_E$ e con $\Phi_E\colon \partial\mho \to [0, 1]$ la traccia di E su $\partial\mho$ (vedi [4], [9], [10], [6]).

Possiamo allora considerare il funzionale

$$\mathcal{F}_\Omega(E) = \int_{\mho} |D\Phi_E| + \int_{\partial\mho} \cos\theta \Phi_E \, dH_{n-1} + g\int_E z \, dy \, dz - \Omega \int_E |y|^2 \, dy \, dz \tag{1.1}$$

dove $g > 0$, $\Omega \geqslant 0$ sono costanti assegnate e

(iii) $\theta\colon \partial\mho \to [0, \theta_0]$ $(0 < \theta_0 < \pi)$

è una funzione continua.

Il problema che ci proponiamo è quello di minimizzare il funzionale (1.1) fra tutti gli insiemi $E \subset \mho$ tali che $|E| = H_n(E) = 1$ cioè minimizzare il funzionale nella classe

$$\mathcal{E} = \{E \subset \mho \colon |E| = 1\} . \tag{1.2}$$

Indicheremo inoltre

$$\mho_T = \{(y, z) \in \mho \colon z < T\} . \tag{1.3}$$

Risolveremo il problema cercando « minimi locali » nel senso della seguente

DEFINIZIONE 1.1. Si dice che $E \in \mathcal{E}$ è « minimo locale » per il funzionale (1.1) nella classe (1.2) se esiste $T > 0$ tale che

a) $\bar{E} \subset \{(y, z) : z < T\}$

b) $\mathcal{F}_\Omega(E) \leqslant \mathcal{F}_\Omega(F)$ per ogni $F \in \mathcal{E}$ tale che $E \Delta F \subset \mathcal{V}_T$.

Faremo inoltre le seguenti ipotesi:

(iv) $\exists \lambda > 0$ e $\exists \mu > 0$ tali che $\forall E \subset \mathcal{V}$ si ha:

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \Phi_E \, dH_{n-1} \leqslant \lambda \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_E| + \mu |E| , \tag{1.4}$$

con

$$|\cos \theta_0| < \frac{1}{\lambda} . \tag{1.5}$$

Il paragrafo 2 è dedicato alla dimostrazione della equilimitatezza dei minimi di $\mathcal{F}_0$ dove $\mathcal{F}_0$ è il funzionale (1.1) con $\Omega = 0$ (cioè esiste $\tau > 0$ tale che $E_0 \subset \mathcal{V}_\tau$ per ogni E_0 minimo di $\mathcal{F}_0$).

Per dimostrare poi, nel paragrafo 3, l'esistenza di minimi locali del funzionale (1.1) nella classe (1.2) considero una successione di funzionali

$$\mathcal{F}_{\Omega_j}(E) = \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_E| + \int_{\partial \mathcal{V}} \cos \theta \Phi_E \, dH_{n-1} + g \int_E z \, dy \, dz - \Omega_j \int_E |y|^2 \, dy \, dz$$

dove $\Omega_j > 0$ per ogni j e $\Omega_j \to 0$ per $j \to +\infty$ e faccio vedere che da ogni successione E_{Ω_j} di minimi di $\mathcal{F}_{\Omega_j}$ in $\mathcal{V}_t$ ($t > 0$ fissato opportunamente) si estrae una sottosuccessione convergente in $L^1(\mathcal{V}_t)$ ad un minimo di $\mathcal{F}_0$.

Quindi, prendendo $t > \tau$ e migliorando la precedente convergenza concluderò che esiste Ω_0 tale che $E \subset \mathcal{V}_{(\tau+t)/2} \subset \mathcal{V}_t$ per ogni E_Ω minimo di $\mathcal{F}_\Omega$ con $\Omega < \Omega_0$ e quindi gli E_Ω sono minimi locali in $\mathcal{V}$.

Per ottenere tale risultato dimostrerò vari teoremi e proposizioni utilizzando dei metodi usati da più autori per lo studio delle superfici minime.

Per ogni notazione che non è stata qui richiamata si fa riferimento alla nota [2].

2. Equilimitatezza dei minimi di $\mathcal{F}_0$.

Fissato $\Omega = 0$ il funzionale (1.1) è quello considerato da E Giusti (vedi [7]).

In tale lavoro si dimostra l'esistenza, la limitatezza e la regolarità dei minimi di $\mathcal{F}_0$ nella classe $\mathcal{E}$. Scopo di questo paragrafo è quello di far vedere la equilimitatezza dei minimi di $\mathcal{F}_0$.

Si noti che il nostro metodo permetterebbe anche di ottenere direttamente il citato risultato di esistenza, limitatezza e regolarità di [7].

Per ottenere tale risultato si seguirà il seguente schema:

I) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T_\varepsilon > 0$ tale che

$|E_0 \cap \{z > T_\varepsilon\}| < \varepsilon$ per ogni E_0 minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$. Quindi

$|E_0 \cap \mathcal{V}_{T_\varepsilon}| > 1 - \varepsilon$ per ogni E_0 minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$.

II) Fissato ε: $0 < \varepsilon < 1$ si ha che:

$\forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$ esiste $T_0 = T_0(E_0)$ tale che $0 < T_0 < T_\varepsilon$ e inoltre

$$|E_0 \cap \mathcal{V}_{T_0}| = \frac{1-\varepsilon}{2}\,.$$

Questo risultato segue subito da I) e dalla continuità della funzione

$$t \to |E_0 \cap \mathcal{V}_t|\,.$$

III) Da II) si ottiene facilmente l'esistenza di $\bar{v}$ e r, $\bar{v} > 0$, $r > 0$ tali che $\forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$ esiste $x_0 = x_0(E_0)$ tale che

$$B_r(x_0) \subset \mathcal{V}_{T_\varepsilon} - \mathcal{V}_{T_0}\,, \qquad |B_r(x_0)| \cap E_0| \geqslant \bar{v}\,.$$

IV) Un argomento più sofisticato, introdotto in [8], Lemma 1 (vedi anche [3]) permette di dimostrare che:

$\forall A > 0$, $\forall p \in (0, n^2/(n-1))$ esiste $r_0 = r_0(A, p) > 0$ tale che

$\forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E} \exists x(E_0)$, $\exists r(E_0) \geqslant r_0$ tali che

$$B_{r(E_0)}(x(E_0)) \subset \mathcal{V}_{T_0} \quad \text{e} \quad |B_{r(E_0)}(x(E_0)) - E_0| < A\,[r(E_0)]^p\,.$$

V) Scegliendo opportunamente A e p si dimostra che:

$\forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$ $\exists \varrho = \varrho(E_0)$ tale che

$$\frac{r(E_0)}{2} \leqslant \varrho \leqslant r(E_0) \quad \text{e} \quad \int_{B_\varrho(x(E_0))} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} = n\omega_n \varrho^{n-1}$$

anzi si ha

$$\int_{B_\varrho(x(E_0))} \Phi_{E_0}\, dx = \omega_n \varrho^n \text{ e quindi}$$

$$\int_{B_{\varrho_0}(x(E_0))} \Phi_{E_0}\, dx = \omega_n \varrho_0^n \quad \forall E_0 \text{ minimo di } \mathcal{F}_0, \text{ dove } \varrho_0 = \frac{r_0}{2}$$

VI) Analogamente si dimostra che, prendendo T sufficientemente grande, allora: per ogni E_0 minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$ esiste $\tau = \tau(E_0)$ tale che

$$T < \tau(E_0) < T + 1 \quad \text{e} \int_{\{z=\tau(E_0)\}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} = 0$$

anzi

$$\int_{\{z \geqslant \tau(E_0)\}} \Phi_{E_0}\, dx = 0\,.$$

Quindi, posto $\tau = \sup\limits_{E_0} \tau(E_0)$, dove il sup è preso su tutti gli E_0 minimi di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$, risulta

$$E_0 \subset \mathcal{V}_\tau \quad \text{per ogni tale } E_0\,.$$

Passiamo quindi alla dimostrazione dei passi I), V), VI).

Sia dunque E_0 un qualunque minimo del funzionale

$$\mathcal{F}_0(E) = \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_E| + \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta\, \Phi_E\, dH_{n-1} + g\int_E z\, dy\, dz \tag{2.1}$$

nella classe

$$\mathcal{E} = \{E \subset \mathcal{V} \colon |E| = 1\} \tag{2.2}$$

Vale il seguente

LEMMA 2.1. Per ogni $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$ esiste T_ε tale che

(2.3) $\quad |E_0 \cap \{Z > T_\varepsilon\}| < \varepsilon \qquad \forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$ nella classe $\mathcal{E}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $i = \inf\limits_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_0$ e sia E_0 un minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$. Si ha

$$i = \mathcal{F}_0(E_0) > \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\mathcal{V}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} + g \int_{E_0} z\, dy\, dz \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| - \frac{1}{\lambda}\left(\lambda \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| + \mu |E_0|\right) + g \int_{E_0} z\, dy\, dz =$$

$$= -\frac{\mu}{\lambda}|E_0| + g\int_{E_0} z\, dy\, dz = -\frac{\mu}{\lambda} + g \int_{E_0} z\, dy\, dz$$

da cui

$$g \int_{E_0} z\, dy\, dz \leqslant i + \frac{\mu}{\lambda} = K\,.$$

Posto ora $T_\varepsilon = K/g\varepsilon$, risulta

$$g \int_{E_0 \cap \{z > T_\varepsilon\}} T_\varepsilon\, dy\, dz \leqslant g \int_{E_0 \cap \{z > T_\varepsilon\}} z\, dy\, dz \leqslant K$$

da cui

$$|E_0 \cap \{z > T_\varepsilon\}| = \frac{K}{gT_\varepsilon} = \varepsilon\,. \qquad \text{c.v.d.}$$

Per ciò che seguità è necessario dimostrare il seguente

LEMMA 2.2. L'insieme di tutti gli E_0 minimi di $\mathcal{F}_0$ è una famiglia di insiemi di perimetro equilimitato.

DIMOSTRAZIONE. Da (1.4) si ha

$$i = \mathfrak{Z}_0(E_0) = \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| + \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta\, \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} + g \int_{E_0} z\, dy\, dz \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta_0| \int_{\partial\mathcal{V}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta_0| \Big(\lambda \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| + \mu |E_0|\Big) =$$

$$= (1 - \lambda|\cos\theta_0|) \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| - \mu|\cos\theta_0|$$

da cui

$$\int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_0}| \leqslant \frac{i + \mu|\cos\theta_0|}{(1 - \lambda|\cos\theta_0|)} \qquad \forall E_0 \text{ minimo di } \mathcal{F}_0 \text{ in } \mathcal{E}\,. \tag{2.4}$$

Passiamo ora a dimostrare il passo V).

TEOREMA 2.3. $\forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$, $\exists \varrho = \varrho(E_0)$ tale che

$$\frac{r(E_0)}{2} \leqslant \varrho \leqslant r(E_0) \tag{2.5}$$

$$\int_{\partial B_\varrho(x(E_0))} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} = n\omega_n \varrho^{n-1} \tag{2.6}$$

dove $x(E_0)$ ed $r(E_0)$ sono stati definiti in IV).

DIMOSTRAZIONE. Sia E_0 un minimo di $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{E}$. Allora $\tilde{E}_0 = \mathcal{V}_{T_\varepsilon} - E_0$ minimizza il funzionale

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(F) = \int_{\mathcal{V}_{T_\varepsilon}} |D\Phi\ | - g \int_F z\, dy\, dz$$

nella famiglia degli insiemi $F \subset \mathcal{V}_{T_\varepsilon}$ con $\Phi_F|_{\partial\mathcal{V}_{T_\varepsilon}} = (1 - \Phi_{E_0})|_{\partial\mathcal{V}_{T_\varepsilon}}$.
Consideriamo la pallina $B_r(x_0) \subset V_{T_\varepsilon} - \mathcal{V}_{T_0}$ tale che $|B_r(x)_0 \cap E_0| = \bar{v} > 0$ (passo III)). Scegliendo opportunamente A e p in IV) è possibile prendere $B_{r(E_0)}(x(E_0))$ tale che $|\tilde{E}_0 \cap B_{r(E_0)}(x(E_0))| \leqslant \bar{v}$.
Per procedere oltre è necessario dimostrare una disuguaglianza di tipo isoperimetrico.
Introduciamo le seguenti notazioni.

Per t_1, t_2, t_3 tali che $r(E_0)/2 < t_1 < t_2 < t_3 < r(E_0)$, poniamo:

$$(t_1, t_2) = B_{t_2}(x(E_0)) - B_{t_1}(x(E_0)) , \qquad (t_2, t_3) = B_{t_3}(x(E_0)) - B_{t_2}(x(E_0))$$

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_0 \cap (t_1, t_2) , \qquad \tilde{E}_2 = \tilde{E}_0 \cap (t_2, t_3)$$

$$V_1 = |\tilde{E}_1| , \qquad V_2 = |\tilde{E}_2| , \qquad V = V_1 + V_2$$

$$m = \max_{i=1,2,3} \int_{\partial B_{t_i}} \Phi_{E_0} \, dH_{n-1}$$

dove, per comodità, assumiamo $\partial B_{t_i}(x(E_0))$ $(i = 1, 2, 3)$ continue (è facile verificare che questa supposizione non toglie alcuna generalità al nostro ragionamento).

Per la proprietà isoperimetrica della sfera abbiamo

$$\int_{R^n} |D\Phi_{\tilde{E}_i}| = \int_{(t_i, t_{i+1})} |D\Phi_{\tilde{E}_i}| + \int_{\partial B_{t_i}} \Phi_{\tilde{E}_i} \, dH_{n-1} + \int_{\partial B_{t_{i+1}}} \Phi_{\tilde{E}_i} \, dH_{n-1} \geqslant n\omega_n V_i^{(n-1)/n} . \tag{2.7}$$

Definiamo ora un nuovo insieme F_0 nel seguente modo:

$$F_0 = \begin{cases} \emptyset & \text{in } (t_1, t_3) \\ \tilde{E}_0 & \text{in } \mho_{T_\varepsilon} - (t_1, t_3) - B_r(x_0) \\ B_{r'}(x_0) \cup \tilde{E}_0 & \text{in } B_r(x_0) \end{cases}$$

dove r' è scelto in modo che $|\tilde{E}_0| = |F_0|$:

Dalla proprietà di minimo di $\tilde{E}_0$ si ha:

$$\tilde{\mathfrak{F}}_0(E_0) \leqslant \tilde{\mathfrak{F}}_0(F_0)$$

cioè

$$\int_{(t_1, t_3)} |D\Phi_{\tilde{E}_0}| + \int_{B_r(x_0)} |D\Phi_{\tilde{E}_0}| - g \int_{\tilde{E}_0 \cap (t_1, t_3)} z \, dy \, dz - g \int_{\tilde{E}_0 \cap B_r(x_0)} z \, dy \, dz \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\partial B_{t_1}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} \, dH_{n-1} + \int_{\partial B_{t_3}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} \, dH_{n-1} + \int_{B_r(x_0)} |D\Phi_{F_0}| - g \int_{F_0 \cap B_r(x_0)} z \, dy \, dz .$$

Assumendo la traccia di E_0 su $\partial B_{r'}(x_0)$ continua si ha:

$$\int_{(t_1,t_3)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| + \int_{B_{r'}(x_0)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| - g\int_{\tilde{E}_0\cap(t_1,t_3)} z\,dy\,dz - g\int_{\tilde{E}_0\cap B_{r'}(x_0)} z\,dy\,dz \leqslant \tag{2.8}$$

$$\leqslant \int_{\partial B_{t_1}(x(E_0))}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} + \int_{\partial B_{t_3}(x(E_0))}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} + n\omega_n r'^{n-1} - \int_{\partial B_{r'}(x_0)}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} - g\int_{B_{r'}(x_0)} z\,dy\,dz\,.$$

Poichè risulta

$$g\int_{B_{r'}(x_0)} z\,dy\,dz \geqslant g\int_{\tilde{E}_0\cap B_{r'}(x_0)} z\,dy\,dz + g\int_{\tilde{E}_0\cap(t_1,t_3)} z\,dy\,dz$$

ne viene

$$\int_{(t_1,t_3)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| + \int_{B_{r'}(x_0)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| \leqslant \int_{\partial B_{t_1}(x(E_0))}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} + \tag{2.9}$$

$$+ \int_{\partial B_{t_3}}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} + n\omega_n r'^{n-1} - \int_{\partial B_{r'}(x_0)}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1}\,.$$

Ora, ricordando che (vedi disuguaglianza 1.18 in 11)

$$\int_{\partial B}\Phi_L\,dH_{n-1} \leqslant \int_B |D\Phi_L| + \frac{n}{R}\,|L| \tag{2.10}$$

dove B è una sfera di raggio R ed L è un sottoinsieme di Borel di B, otteniamo

$$n\omega_n r'^{n-1} - \int_{\partial B_{r'}(x_0)}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} = \int_{\partial B_{r'}(x_0)}\Phi_{(B_{r'}(x_0)-\tilde{E}_0)}\,dH_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B_{r'}(x_0)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| + \frac{n}{r'}\,|\tilde{E}_0\cap(t_1,t_3)| = \int_{B_{r'}(x_0)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| + \frac{n}{r'}\,V\,.$$

La (2.9) diviene allora

$$\int_{(t_1,t_3)}|D\Phi_{\tilde{E}_0}| \leqslant \int_{\partial B_{t_1}(x(E_0))}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} + \int_{\partial B_{t_3}(x(E_0))}\Phi_{\tilde{E}_0}\,dH_{n-1} + \frac{n}{r'}\,V$$

e, tenendo conto che $\omega_n r'^n \geqslant V$,

$$(2.11) \qquad \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{\tilde{E}_0}| \leqslant \int_{\partial B_{t_1}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} dH_{n-1} + \int_{\partial B_{t_2}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} dH_{n-1} + n\omega_n^{1/n} V^{n-1/n} .$$

Da (2.11) e (2.7) segue

$$n\omega_n^{1/n}(V_1^{(n-1)/n} + V_2^{(n-1)/n} - V^{(n-1)/n}) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial B_{t_i}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} dH_{n-1} .$$

Supponiamo ora che $V_2 \leqslant V_1$. Allora $V_1 = sV_2$ e $V = (1+s)V_2$ con $s \geqslant 1$; posto $f(s) = 1 + s^{(n-1)/n} - (1+s)^{(n-1)/n}$ si ha, da (2.7)

$$(2.12) \qquad 2 \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial B_{t_i}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} dH_{n-1} \geqslant n\omega_n^{1/n} V_2^{(n-1)/n} f(s) .$$

Poichè $f(s)$ ha minimo in $s = 1$ ed inoltre $f(1) = 2(1 - 2^{-1/n})$, da (2.12) scende

$$(2.13) \qquad 2 \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial B_{t_i}(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} dH_{n-1} \geqslant 2n\omega_n^{1/n}(1 - 2^{-1/n}) V_2^{(n-1)/n} .$$

È chiaro anche che (2.13) vale con V_1 al posto di V_2 se $V_1 \leqslant V_2$. Si ha quindi

$$V_1 \wedge V_2 = \min\{V_1, V_2\} \leqslant [3n^{-1}\omega_n^{-1/n}(1 - 2^{-1/n})^{-1} m]^{n/(n-1)}$$

cioè

$$(2.14) \qquad V_1 \wedge V_2 \leqslant c(n) m^N$$

dove $N = n/(n-1)$ e $c(n) = \left(3n^{-1}\omega_n^{-1/n}(1 - 2^{-1/n})^{-1}\right)^{n/n-1}$.

Ragionando ora in modo perfettamente analogo al Teorema 1 di [8], ma partendo nel processo ricorsivo da $a_0 = r(E_0)$ e $b_0 = r(E_0)/2$ e sostituendo alla (22) di [8] $|B_{r(E_0)}(x(E_0)) - E_0| < A[r(E_0)]^p$, si dimostra che, se $|B_{r(E_0)}(x(E_0)) - E_0|$ è abbastanza piccolo allora esiste ϱ tale che

$$\frac{r(E_0)}{2} \leqslant \varrho \leqslant r(E_0) \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_\varrho(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0} dH_{n-1} = 0$$

e da cui la tesi.

Anzi vale il seguente

TEOREMA 2.4. $\forall E_0$ minimo di $\mathcal{F}_0$:

$$\int_{B_\varrho(x(E_0))} \Phi_{\tilde{E}_0}\, dx = 0 \qquad \text{cioè} \int_{B_\varrho(x(E_0))} \Phi_{E_0}\, dx = \omega_n \varrho^n . \tag{2.15}$$

DIMOSTRAZIONE. Se la (2.15) non si verificasse, ponendo

$$F_0 = \begin{cases} \tilde{E}_0 & \text{in } \mho_{T_\varepsilon} - B_r(x_0) - B_\varrho(x(E_0)) \\ \emptyset & \text{in } B_\varrho(x(E_0)) \\ \tilde{E}_0 \cup B_{\bar{r}}(x_0) & \text{in } B_r(x_0) \end{cases}$$

dove $\bar{r}$ è scelto in modo tale che $|F_0| = |\tilde{E}_0|$ si avrebbe

$$\tilde{\mathcal{F}}(F_0) < \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{E}_0)$$

che è assurdo. Infatti:

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(E_0) - \tilde{\mathcal{F}}_0(F_0) \geqslant \int_{B_{\bar{r}}(x_0)} |D\Phi_{\tilde{E}_0}| - g \int_{\tilde{E}_0 \cap B_{\bar{r}}(x_0)} z\, dy\, dz + \int_{B_\varrho(x(E_0))} |D\Phi_{\tilde{E}_0}| -$$

$$- g \int_{\tilde{E}_0 \cap B_\varrho(x(E_0))} z\, dy\, dz - \int_{B_{\bar{r}}(x_0)} |D\Phi_{\tilde{E}_0}| - \frac{n}{\bar{r}} |\tilde{E}_0 \cap B_\varrho(x(E_0))| + g \int_{B_{\bar{r}}(x_0)} z\, dy\, dz >$$

$$> \int_{B_\varrho(x(E_0))} |D\varphi_{\tilde{E}_0}| - \frac{n}{\bar{r}} |\tilde{E}_0 \cap B_\varrho(x(E_0))| \geqslant \int_{B_\varrho(x(E_0))} |D\varphi_{\tilde{E}_0}| - n\omega_n^{1/n} |\tilde{E}_0 \cap B_\varrho(x(E_0))|^{(n-1)/n} \geqslant 0$$

OSSERVAZIONE 2.5. Dal teorema precedente posto $\varrho_0 = r_0/2$ si ha, tenendo conto che

$$\varrho = \varrho(E_0) \geqslant \frac{r(E_0)}{2} \geqslant \frac{r_0}{2} \qquad \forall E_0 \text{ minimo di } \mathcal{F}_0 \text{ in } \mathcal{E},$$

$$|E_0 \cap B_{\varrho_0}(x(E_0))| = |B_{\varrho_0}(x(E_0))| \qquad \forall E_0 \text{ minimo di } \mathcal{F}_0 .$$

Vale il seguente

TEOREMA 2.6. Esiste $\tau > 0$ tale che

$$E_0 \cap (\mho - \mho_\tau) = \emptyset \qquad \forall E_0 \text{ minimo di } \mathcal{F}_0 .$$

DIMOSTRAZIONE. Anche in questo teorema è necessario prima di tutto provare una disuguaglianza di tipo isoperimetrico.

Per $T > 0$ siano t_1, t_2, t_3 tali che $T \leqslant t_1 < t_2 < t_3$.

Poniamo inoltre

$$E_i = E_0 \cap (t_i, t_{i+1}) \text{ dove } (t_i, t_{i+1}) = \mho_{t_{i+1}} - \overline{\mho}_{t_i} \qquad (i = i, 2)$$

$$V_i = |E_i|\,, \qquad V = V_1 + V_2\,.$$

Supponiamo che le tracce di E_0 su $\{z = t_i\}$ siano continue e definiamo

$$m = \max_{i=1,2,3} \int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1}\,. \tag{2.16}$$

Per la proprietà isoperimetrica della sfera si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} |D\Phi_{E_i}| = \int_{(t_i,t_{i+1})} |D\Phi_{E_i}| + \int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \int_{\{z=t_{i+1}\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \int_{\partial\mho} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} \geqslant \geqslant n\omega_n^{1/n} V_i^{(n-1)/n} \tag{2.17}$$

Per la (1.4) si deduce dalla (2.17)

$$n\omega_n V_i^{(n-1)/n} \leqslant \int_{(t_i,t_{i+1})} |D\Phi_{E_i}| + \int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \int_{\{z=t_{i+1}\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \lambda \int_{\mho} |D\Phi_{E_i}| + \mu V_i =$$
$$= \int_{(t_i,t_{i+1})} |D\Phi_{E_i}| + \int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \int_{\{z=t_{i+1}\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} +$$
$$+ \lambda \left[\int_{(t_i,t_{i+1})} |D\Phi_{E_i}| + \int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \int_{\{z=t_{i+1}\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} \right] + \mu V_i$$

cioè

$$n\omega_n^{1/n} V_i^{(n-1)/n} \leqslant \leqslant (1 + \lambda) \left[\int_{(t_i,t_{i+1})} |D\Phi_{E_i}| + \int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} + \int_{\{z=t_{i+1}\}} \Phi_{E_i}\, dH_{n-1} \right] + \mu V_i \tag{2.18}$$

Sia ora $T^* < T$ tale che $|E_0 \cap \{z \geqslant T\}| < \omega_n \varrho_0^n/2$ e tale che esista una sfera $B \subset \mho_{T^*}$ di raggio ϱ_0 con $|B - E_0| \geqslant \omega_n \varrho_0^n/2$ e definiamo un nuovo insieme F togliendo $E_1 \cup E_2$ ed aggiungendo una pallina $B_{\varrho_0}(x) \subset \mathcal{V}_{T^*}$ tale che $|E_0| = |F|$. Essendo E_0 minimo risulta $\mathcal{F}_0(E_0) \leqslant \leqslant \mathcal{F}_0(F)$.

Ricordando (2.10) otteniamo

$$\int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| + \int_{\partial\mathcal{V}\cap(t_1,t_2)} \cos\theta \Phi_{E_0} dH_{n-1} + g\int_{E_0\cap(t_1,t_2)} z\,dy\,dz + g\int_{E_0\cap B_{\varrho_0}(x)} z\,dy\,dz \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\{z=t_1\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \int_{\{z=t_2\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \frac{n}{\varrho_0} V + g\int_{B_{\varrho_0}(x)} z\,dy\,dz;$$

essendo

$$g\int_{E_0\cap(t_1,t_2)} z\,dy\,dz + g\int_{E_0\cap B_{\varrho_0}(x)} z\,dy\,dz - g\int_{B_{\varrho_0}(x)} z\,dy\,dz \geqslant 0$$

si ha

$$\int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| + \int_{\partial\mathcal{V}\cap(t_1,t_2)} \cos\theta \Phi_{E_0} dH_{n-1} \leqslant \int_{\{z=t_1\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \int_{\{z=t_2\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \frac{n}{\varrho_0} V . \tag{2.19}$$

Ricordando che $0 \leqslant \theta < \theta_0 < \pi$ e la (1.4) si ottiene

$$\int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| + \int_{\partial\mathcal{V}\cap(t_1,t_2)} \cos\theta \Phi_{E_0} dH_{n-1} \geqslant \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta_0| \int_{\partial\mathcal{V}\cap(t_1,t_2)} \Phi_{E_0} dH_{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta_0| \Big[\lambda \int_{\mathcal{V}\cap(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| + \mu V\Big] =$$
$$= \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta_0| \Big[\lambda \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| + \lambda \int_{\{z=t_1\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \lambda \int_{\{z=t_2\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \mu V\Big] =$$
$$= (1 - \lambda|\cos\theta_0|) \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| - \lambda|\cos\theta_0| \Big(\int_{\{z=t_1\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \int_{\{z=t_2\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1}\Big) - \mu|\cos\theta_0| V$$

cioè

$$\int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_E| + \int_{\partial\mathcal{V}\cap(t_1,t_2)} \cos\theta \Phi_E dH_{n-1} \geqslant (1 - \lambda|\cos\theta_0|) \int_{(t_1,t_2)} |D\Phi_{E_0}| -$$
$$- \lambda|\cos\theta_0| \Big(\int_{\{z=t_1\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1} + \int_{\{z=t_2\}} \Phi_{E_0} dH_{n-1}\Big) - \mu|\cos\theta_0| V . \tag{2.20}$$

Combinando (2.19) e (2.20) risulta

$$(2.21)\qquad (1-\lambda|\cos\theta_0|)\int_{(t_1,t_3)}|D\Phi_{E_0}|\leqslant$$
$$\leqslant(1+\lambda|\cos\theta_0|)\left[\int_{\{z=t_1\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}+\int_{\{z=t_3\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}\right]+\frac{n}{\varrho_0}V+\mu|\cos\theta_0|V\,.$$

Da (2.18) si ha

$$(2.22)\qquad n\omega_n^{1/n}(V_1^{(n-1)/n}+V_2^{(n-1)/n})\leqslant(1+\lambda)\left[\int_{(t_1,t_3)}|D\Phi_{E_0}|+\int_{\{z=t_1\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}+\right.$$
$$\left.+\int_{\{z=t_3\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}+2\int_{\{z=t_2\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}\right]+\mu\cdot V\,.$$

Tenendo conto che $\lambda>0$ e $1-\lambda|\cos\theta_0|>0$, da (2.21) e (2.22) ne viene

$$n\omega_n^{1/n}(V_1^{(n-1)/n}+V_2^{(n-1)/n})\frac{(1-\lambda|\cos\theta_0|)}{1+\lambda}\leqslant$$
$$\leqslant2\int_{\{z=t_1\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}+2\int_{\{z=t_3\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}+2(1-\lambda|\cos\theta_0|)\int_{\{z=t_2\}}\Phi_{E_0}\,dH_{n-1}+$$
$$+\left(\frac{n}{\varrho_0}+\mu|\cos\theta_0|+\frac{1-\lambda|\cos\theta_0|}{1+\lambda}u\right)V\leqslant6m+c_1V$$

cioè

$$(2.23)\qquad n\omega_n^{1/n}(V_1^{(n-1)/n}+V_2^{(n-1)/n})\leqslant c_2m+c_3V$$

dove $c_2=c_2(\theta_0,\lambda)$ e $c_3=c_3(\theta_0,\lambda,\varrho_0,\mu)$.

Da (2.23) si deduce facilmente, come nella disuguaglianza isoperimetrica precedente

$$(2.24)\qquad \begin{cases} V_1\wedge V_2\leqslant c(n,\theta_0)(m+KV)^N\\ K=K(\theta_0,\varrho_0,\lambda_0,\mu,n)\,.\end{cases}$$

Consideriamo ora una striscia $\mho_{T+\frac{1}{2}}-\overline{\mho_T}$.

Ragionando come nel teorema 1 di [8] è facile vedere che per T

sufficientemente grande esiste $\tau(E_0)$ tale

$$T < \tau(E_0) < T + \tfrac{1}{2}$$

$$\int\limits_{\{z=\tau(E_0)\}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} = 0 \qquad \forall E_0 \text{ minimo di } \mathcal{F}_0 .$$

Sostituiamo ora un insieme E_0 con un insieme F ottenuto cancellando $E_0 \cap \{(y, z): z > \tau(E_0)\}$ ed aggiungendo una pallina $B_{\varrho_0}(x') \subset \subset \mathcal{V}_{T^*}$ (ϱ_0 e T^* scelti come prima) in modo tale che $|E_0| = |F|$.

Per la disuguaglianza (2.10) e per la (1.4) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_0(E_0) - \mathfrak{Z}_0(F) &\geqslant \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| + \int\limits_{\partial\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} \cos\theta \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} + g\int\limits_{E_0\cap\{z>\tau(E_0)\}} z\, dy\, dz - \\
&- \frac{n}{\varrho_0} V - g\int\limits_{B_{\varrho_0}(x')} z\, dy\, dz \geqslant \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta_0| \int\limits_{\partial\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} - \frac{n}{\varrho_0} V \geqslant \\
&\geqslant \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| - |\cos\theta| \left[\lambda \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| + \mu V\right] - \frac{n}{\varrho_0} V = \\
&= (1 - \lambda|\cos\theta_0|) \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| - \mu|\cos\theta_0| V - \frac{n}{\varrho_c} V = \\
&= (1 - \lambda|\cos\theta_0|) \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| - c_4 V
\end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{F}_0(E_0) - \mathcal{F}_0(E) \geqslant (1 - \lambda|\cos\theta_0|) \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| - c_4 V \tag{2.25}$$

e questa quantità è strettamente positiva se $V = |E_0 \cap \{z > \tau(E_0)\}|$ è abbastanza piccola. Infatti:

$$\int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| \geqslant n\omega_n^{1/n} V_n^{(n-1)/n} \tag{2.26}$$

e

$$\int\limits_{\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| = \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| + \int\limits_{\partial\mathcal{V}\cap\{x>\tau(E_0)\}} \Phi_{E_0}\, dH_{n-1} \leqslant \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| + \lambda \int\limits_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| + \mu V . \tag{2.27}$$

Da (2.26) e (2.27) scende

$$\int_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| \geqslant \frac{n\omega_n^{1/n} V^{(n-1)/n} - \mu V}{1+\lambda} .$$

Pertanto

$$(1-\lambda|\cos\theta_0|)\int_{\mathcal{V}\cap\{z>\tau(E_0)\}} |D\Phi_{E_0}| - c_4 V \geqslant \frac{n\omega_n^{1/n} V^{(n-1)/n} - \mu V}{1+\lambda}(1-\lambda|\cos\theta_0|) - c_4 V =$$
$$= \frac{(1-\lambda|\cos\theta_0|)}{1+\lambda} n\omega_n^{1/n} V^{(n-1)/n} - c_5 V$$

e questa quantità è strettamente positiva se V è piccolo.

Indicando quindi con $\tau = \sup\limits_{E_0} \tau(E_0)$ si ha la tesi.

3. Esistenza di minimi locali per $\mathcal{F}_\Omega$.

Scopo di questo paragrafo è quello di dimostrare che assegnata una quota $T > \tau$, con τ tale che $E_0 \cap (\mathcal{V} - \mathcal{V}_\tau) = \emptyset$ per ogni E_0 minimo di $\mathcal{F}_0$, esiste $\Omega_0 > 0$ tale che $\mathcal{F}_\Omega$ ha minimi locali in $\mathcal{V}$ per $\Omega \leqslant \Omega_0$. Per fissare le idee prendiamo $T = \tau + 1$. Vale il seguente

TEOREMA 3.1. Per ogni $\Omega \geqslant 0$ e per ogni $g > 0$ esiste $E_\Omega \subset \mathcal{V}_T$ tale che

$$\mathcal{F}_\Omega(E_\Omega) = \inf_{\mathcal{E}_T} \mathcal{F}_\Omega \qquad \text{dove } \mathcal{E}_T = \{E \in \mathcal{E}\colon E \subset \mathcal{V}_T\} .$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\mathcal{F}_\Omega(E) \geqslant \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta \Phi_E \, dH_{n-1} - \Omega \int_E |y|^2 \, dy\, dz \geqslant$$
$$\geqslant -\int_{\partial\mathcal{V}_T} \Phi_E \, dH_{n-1} - \Omega \sup\{|y|^2\colon (y,z) \in \mathcal{V}_T\} |E| ,$$

cioè

$$\mathcal{F}_\Omega(E) \geqslant - H_{n-1}(\partial\mathcal{V}_T) - \Omega \sup\{|y|^2\colon (y,z) \in \mathcal{V}_T\} = \tag{3.1}$$
$$= \text{cost} > -\infty \qquad \forall E \in \mathcal{E}_T .$$

Sia ora $\{E_j\}_{i\in N}$ una successione minimizzante, *i.e.*

$$\mathcal{F}_\Omega(E_i) \xrightarrow{i\to+\infty} \inf_{\mathcal{E}_T} \mathcal{F}_\Omega$$

Esiste una costante C tale che

$$\mathcal{F}_\Omega(E_i) \leqslant c \qquad \forall i \in N \tag{3.2}$$

da cui

$$\int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_i}| \leqslant c - \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta \Phi_{E_i} dH_{n-1} - g\int_{E_i} z d\,dz + \Omega \int_{E_i} |y|^2 dy\,dz \leqslant \tag{3.3}$$
$$\leqslant c + H_{n-1}(\partial\mathcal{V}_T) + \Omega \sup\{|y|^2 \colon (y, z) \in \mathcal{V}_T\} = \tilde{c} < +\infty .$$

Essendo per la (3.3) i perimetri equilimitati per un noto teorema di compattezza (vedi [4], [9]) esiste E_Ω ed una successione $j(K)$ tali che

$$E_{j(K)} \xrightarrow{K\to+\infty} E_\Omega$$

nella topologia $L^1(\mathcal{V}_T)$. La tesi scende allora dalla semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}_\Omega$ rispetto alla topologia $L^1(\mathcal{V}_T)$. c.v.d.

Sia Ω_j una successione tale che $\Omega_j > 0$, $\forall j$, $\Omega_j \xrightarrow{j} 0$. Sia inoltre E_{Ω_j} un qualunque minimo del funzionale $\mathcal{F}_{\Omega_j}$ in $\mathcal{E}_T$. Per brevità poniamo $E_j = E_{\Omega_j}$, $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{\Omega_j}$. Vale il seguente

TEOREMA 3.2. La famiglia $\{E_j\}_{j\in N}$ è compatta in $L^1(\mathcal{V}_T)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia F un qualunque insieme di perimetro finito tale che $|F| = 1$, $F \subset \mathcal{V}_T$. Posto $\forall_j$ $K_j = \mathcal{F}_j(F)$ si ha $K_j \geqslant \mathcal{F}_j(E_j)$ per la proprietà di minimo di E_j. Poichè $\Omega_j \xrightarrow{j\to+\infty} 0$ si ha $\mathcal{F}_j(F) \xrightarrow{j\to+\infty} \mathfrak{Z}_0(F)$ e quindi esiste K tale che $K \geqslant \mathcal{F}_j(F)$ $\forall j \in N$ da cui $K \geqslant \mathcal{F}_j(E_j)$ $\forall j \in N$. Si ha

$$K \geqslant \mathcal{F}_j(E_j) \geqslant \int_{\mathcal{V}_T} |D\Phi_{E_j}| - \int_{\partial\mathcal{V}_T} \Phi_{E_j} dH_{n-1} - \Omega_j \int_{\mathcal{V}_T} |y|^2 dy\,dz \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\mathcal{V}_T} |D\Phi_{E_j}| - H_{n-1}(\partial\mathcal{V}_T) - \max_i \Omega_j \sup\{|y|^2 (y, z) \in \mathcal{V}_T\} |\mathcal{V}_T|$$

da cui, posto

$$\tilde{K} = H_{n-1}(\partial \mathcal{V}_T) + \max_i \Omega_j \sup\{|y|^2 : (y, z) \in \mathcal{V}_T\}|\mathcal{V}_T| + K$$

risulta

$$\int_{\mathcal{V}_T} |D\Phi_{E_j}| \leqslant K \qquad \forall j \in N . \tag{3.5}$$

Pertanto i perimetri degli E_j sono equilimitati. La tesi scende allora dal citato teorema di compattezza (vedi [4], [9]).

Osservazione 3.3. Dal teorema precedente scende l'esistenza di una sottosuccessione $j(K)$ e di un insieme E^* tali che

$$E_{j(K)} \xrightarrow{K\to+\infty} E^* \quad \text{in } L^1(\mathcal{V}_T) . \tag{3.6}$$

Vale il seguente

Teorema 3.4. E^* è minimo di $\mathcal{F}_0$.

Dimostrazione. Per ogni $F \in \mathcal{E}_T$ risulta

$$\int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E^*}| + \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta \Phi_{E^*}\, dH_{n-1} + g\int_{E^*} z\, dy\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \min\lim_{K\to+\infty}\left(\int_{\mathcal{V}} |D\Phi_{E_{j(K)}}| + \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta \Phi_{E_{j(K)}} dH_{n-1} + g\int_{E_{j(K)}} z\, dy\, dz - \Omega_{j(K)}\int_{E_{j(K)}} |y|^2\, dy\, dz\right) \leqslant$$

$$\leqslant \min\lim_{K\to+\infty}\left(\int_{\mathcal{V}} |D\Phi_F| + \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta \Phi_F\, dH_{n-1} + g\int_F z\, dy\, dz - \Omega_{j(K)}\int_F |y|^2\, dy\, dz\right) =$$

$$= \int_{\mathcal{V}} |D\Phi_F| + \int_{\partial\mathcal{V}} \cos\theta \Phi_F\, dH_{n-1} + g\int_F z\, dy\, dz .$$

Pertanto E^* è minimo per il funzionale $\mathcal{F}_0$.

Per ottenere l'esistenza di minimi locali basta seguire uno schema analogo a quello seguito per il programma della equilimitatezza.

I) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists j_\varepsilon$ tale $|E_j \cap (\mho - \mho_\tau)| < \varepsilon$ per ogni $j \geqslant j_\varepsilon$

(ciò segue subito dai teoremai 2.6 e 3.4) e quindi

$$|E_j \cap \mho_\tau| > 1 - \varepsilon \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_\varepsilon$$

II) $\forall j \geqslant j_\varepsilon \ \exists T_j = T_j(E_j)$ tale che

$$0 < T_j < \tau \qquad \text{e } |E_j \cap \mho_{T_j}| = \frac{1-\varepsilon}{2}$$

(immediato da I)).

III) Da II) si ottiene subito l'esistenza di $\bar{v} > 0$, $r > 0$ tali che $\forall E_j \ (j \geqslant j_\varepsilon)$, $\exists x_j = x_j(E_j)$ tale che

$$B_r(x_j) \subset \mho_\tau - \mho_{T_j} \qquad \text{e} \qquad |B_r(x_j) \cap E_j| \geqslant \bar{v}\,.$$

VI) $\forall A > 0$, $\forall p \in (0, n^2/(n-1))$ esiste $r_0 = r_0(A, p) > 0$ tale che $\forall E_j \ (j \geqslant j_\varepsilon) \ \exists \tilde{x}_j = \tilde{x}_j(E_j)$, $\exists r(E_j) \geqslant r_0$ tali che

$$B_{r(E_j)}(\tilde{x}_j) \subset \mho_{T_j}\,, \qquad |B_{r(E_j)}(\tilde{x}_j) - E_j| < A[r(E_j)]^p$$

(vedi teorema 1 di [8]).

V) Scegliendo opportunamente A e p si dimostra che $\forall E_j \ (j \geqslant j_\varepsilon) \ \exists \varrho_j = \varrho_j(E_j)$ tale che

$$\frac{r_0}{2} \leqslant \frac{r(E_j)}{2} \leqslant \varrho_j \leqslant r(E_j)$$

e $\int\limits_{\partial B_{\varrho_j}(\tilde{x}_j)} \Phi_{E_j}\, dH_{n-1} = n\omega_n \varrho_j^{n-1}$. Anzi, $\int\limits_{B_{\varrho_j}(\tilde{x}_j)} \Phi_{E_j}\, dx = \omega_n \varrho_j^n$.

VI) Si dimostra quindi che se j è abbastanza grande allora $\exists \tau_j = \tau_j(E_j)$ tale che

$$\tau < \tau_j < \tau + \tfrac{1}{2} \qquad \text{e } \int\limits_{\{z = \tau_j\}} \Phi_E \, dH_{n-1} = 0$$

Si conclude che

$$\int_{\mho - \mho_{\tau+\frac{1}{2}}} \Phi_E \, dx = 0$$

provando così l'asserita esistenza di minimi locali.

Per la dimostrazione di V si procede come nei corrispondenti teoremi 2.3 e 2.4 nel programma della equilimitatezza. L'unica differenza è nella diseguaglianza (2.14) che ora diventa

$$V_j^1 \wedge V_j^2 \leqslant c(n)(m_j + kV_j)^N \tag{3.7}$$

dove $k = k(\tau, g, n)$ è una costante e

$$\begin{aligned} V_j^1 &= |\tilde{E}_j \cap (t_1, t_2)|\,, \qquad (t_i, t_{i+1}) = B_{t_{i+1}}(\tilde{x}_j) - B_{t_i}(\tilde{x}_j) \\ V_j^2 &= |\tilde{E}_j \cap (t_2, t_3)| \\ V_j &= V_j^1 + V_j^2\,, \qquad m_j = \max_{i=1,2,3} \left(\int_{\partial B_{t_i}} \Phi_{\tilde{E}_j} dH_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Il procedimento iterativo che conduceva alla dimostrazione della (2.6) funziona anche qui con opportune modifiche (vedi anche [1], [3]).

Si ottiene così l'esistenza di ϱ_j e di $\tilde{x}_j$ tali che

$$\int_{B_{\varrho_j}(\tilde{x}_j)} \Phi_{E_j} dx = 0$$

come asserito in V.

Il passo VI) è anch'esso analogo al corrispondente per l'equilimitatezza. Anche qui la (2.24) va sostituita dalla

$$V_j^1 \wedge V_j^2 \leqslant c(n, \theta_0)(m_j + kV_j)^N \tag{3.8}$$

dove $k = k(\theta_0, \varrho_0, \lambda, \mu, n)$ è una costante e dove ora

$$\begin{aligned} V_j^1 &= |E_j \cap (t_1, t_2)|\,, \qquad (t_i, t_{i+1}) = \mho_{t_{i+1}} - \overline{\mho}_{t_i} \\ V_j^2 &= |E_j \cap (t_2, t_3)| \\ V_j &= V_j^1 + V_j^2 \qquad\qquad m_j = \max_{i=1,2,3} \left(\int_{\{z=t_i\}} \Phi_{E_j} dH_{n-1} \right) \end{aligned}$$

Dalla (3.8) si ottiene

$$\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_{T+\frac{1}{2}}} \Phi_{E_j}\,dx = 0 \qquad \forall j \text{ abbastanza grande}\,.$$

Abbiamo così dimostrato

TEOREMA (Esistenza di minimi locali). Esiste $T > 0$, esiste $\Omega_0 > 0$ tali che $\forall \Omega \leqslant \Omega_0$ esiste E_Ω con

$$\tilde{E}_\Omega \subset \{(y, z) : z < T\}$$

$$\mathcal{F}_\Omega(E_\Omega) \leqslant \mathcal{F}_\Omega(F) \qquad \forall F \in \mathcal{E} \text{ con } E\,\Delta F \subset \mathcal{V}_T\,.$$

Procedendo ora come in [8], [1] si ottiene anche il

TEOREMA (Regolarità). Sia E_Ω minimo locale per $\mathcal{F}_\Omega$. Allora ∂E_Ω è una varietà analitica $(n-1)$-dimensionale eccetto al più su un insieme singolare chiuso Σ_Ω che ha misura di Hausdorff non superiore a $(n-8)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBANO - GONZALEZ, *Rotating drops*, to appear in Indiana Univ. Mat. J.

[2] G. CONGEDO - M. EMMER - E. GONZALEZ, *Rotating drops in a vessel.* To appear in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1983).

[3] G. CONGEDO - E. GONZALEZ, *Sul problema di Plateau con volume fissato,* Q. 15 Istituto Matematica, Università di Lecce (1981).

[4] L. DE GIORGI - F. COLOMBINI - L. PICCININI, *Frontiere orientate di misura minima e questioni connesse,* Editrice Tecnico Scientifica, Pisa (1973).

[5] H. FEDERER, *Geometric measure thoery,* Springer (1969).

[6] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variation,* Notes on Pure Math., Camberra, **10** (1977).

[7] E. GIUSTI, *The equilibrium configuration of liquid drops,* J. Reine Angew. Math., **321** (1981), pp. 53-63.

[8] E. GONZALEZ - U. MASSARI - I. TAMANINI, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint,* Indiana Univ. Mat., J., **32**, Né 1, Jannuary-February 1983.

[9] M. Miranda, *Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Norm. Sc. Norm. Sup., Pisa (1064).

[10] M. Miranda, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **38** (1967).

[11] I. Tamanini, *Il problema della capillarità su domini non regolari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **56** (1977).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 Giugno 1983.