

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO CASOLO

Gruppi finiti risolubili in cui tutti i sottogruppi subnormali hanno difetto al più 2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 71 (1984), p. 257-271

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__257_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Gruppi finiti risolubili in cui tutti i sottogruppi subnormali hanno difetto al più 2.

CARLO CASOLO (*)

1. Introduzione.

Indichiamo con \mathfrak{B}_n la classe dei gruppi i cui sottogruppi subnormali hanno difetto di subnormalità minore o uguale a n .

I gruppi \mathfrak{B}_1 (chiamati spesso T -gruppi) sono stati ampiamente studiati; da Best e Taussky [1], Zacher [13] e Gaschütz [3] nel caso finito e da Robinson [10] nel caso infinito. In particolare è stato provato, da Gaschütz nel caso finito e da Robinson in generale, che i gruppi \mathfrak{B}_1 risolubili sono metabeliani.

Per quanto riguarda i gruppi nilpotenti, fra i risultati provati da Roseblade in [12] è l'esistenza di una funzione $\sigma(n)$, dipendente solo da n , tale che ogni gruppo nilpotente \mathfrak{B}_n è di classe al più $\sigma(n)$. Stime sufficientemente precise per tale funzione sono note solo per $n = 1$ (in tal caso i gruppi sono quelli, ben noti, di Dedekind e $\sigma(1) = 2$) e per $n = 2$ (Heineken [5] ha provato che $\sigma(2) \leq 4$, anche se non si conoscono gruppi \mathfrak{B}_2 nilpotenti di classe esattamente 4).

Alla luce di tali risultati ci si può chiedere se, e per quali valori di n , i gruppi \mathfrak{B}_n risolubili hanno lunghezza derivata limitata da una funzione dipendente da n solamente. Purtroppo una tale limitazione non esiste, in generale, neppure per $n = 2$; infatti Robinson [11] dimostra che il prodotto intrecciato non ristretto iterato:

$$R_i \text{ Wr } (R_{i-1} \text{ Wr } (\dots \text{ Wr } (R_2 \text{ Wr } R_1) \dots))$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria dell'Università, Via Belzoni 7, 35131 Padova (Italia).

di t copie isomorfe R_i di un gruppo abeliano non banale e privo di torsione, è un gruppo \mathfrak{B}_2 di lunghezza derivata esattamente t .

Tuttavia, se si restringe l'indagine ai gruppi \mathfrak{B}_2 risolubili finiti, si ottengono risultati in senso diverso; McCaughan e Stonehewer [9] hanno infatti provato che tali gruppi hanno lunghezza di Fitting al più 5 (migliorando in ciò un precedente e non pubblicato risultato di Camina e Renouf) e lunghezza derivata al più 9. Nel medesimo articolo gli autori osservano che se V è un gruppo abeliano elementare di ordine 9, allora $\text{Hol}(V)$ è un gruppo \mathfrak{B}_2 di lunghezza di Fitting 4 e lunghezza derivata 5.

Scopo del presente lavoro è dimostrare che se G è un gruppo \mathfrak{B}_2 finito e risolubile, allora G ha, di fatto, lunghezza di Fitting al più 4 e lunghezza derivata al più 5.

Concludiamo questa introduzione ricordando che non è noto il comportamento nè dei gruppi \mathfrak{B}_2 risolubili e periodici, in generale, nè dei gruppi finiti risolubili \mathfrak{B}_n con $n \geq 3$.

Le notazioni usate sono quelle del libro di D. Gorenstein « Finite groups »; in particolare quelle relative al lemma 2 fanno riferimento al capitolo 3 di tale volume. Inoltre, se G è un gruppo, indicheremo con $\text{Fit}_i(G)$ l' i -esimo termine della serie di Fitting di G , e con $\gamma_i(G)$ l' i -esimo termine della serie centrale discendente di G . Anche quando non esplicitamente richiamato, tutti i gruppi considerati sono finiti.

2. Preliminari.

LEMMA 1 ⁽¹⁾. *Sia P un p -gruppo, per qualche primo p , e $1 \neq \alpha \in \text{Aut}(P)$ un p' -automorfismo che fissa ogni sottogruppo di $P/\mathcal{C}_1(P)$. Allora P è abeliano e α un automorfismo potenza.*

DIM. Se α induce l'identità su $P/\mathcal{C}_1(P)$, allora induce l'identità su $P/\Phi(P)$ e quindi è l'automorfismo identico su P , il che è escluso per ipotesi. Pertanto, per un noto risultato di Huppert ([8], Hilfssatz 5); α induce una potenza su $P/\mathcal{C}_1(P)$ e questo è abeliano. Osserviamo, in particolare che ciò esclude il caso $p = 2$.

Sia ora P un controesempio minimo; allora $\mathcal{C}_1(P) \neq 1$ e P non è

⁽¹⁾ Di questa proprietà, probabilmente ben nota, non ho trovato traccia nella letteratura, la sua validità e dimostrazione mi sono state comunicate da A. Caranti e F. Napolitani.

abeliano (v. la dimostrazione del citato Hilfssatz 5 in [8]), inoltre α induce su P/P' la potenza, poniamo r -esima, con $r \not\equiv 1 \pmod{p}$.

Sia $N = \gamma_3(P) = [P', P]$; se $N \neq 1$, allora per la minimalità di P , P/N è abeliano, il che è contraddittorio; dunque $N = 1$ e P è perciò di classe 2.

Siano ora $x, y \in P$ tali che $z = [x, y] \neq 1$; si ha allora, per opportuni $t, t' \in P' \leq Z(P)$:

$$(\circ) \quad z^\alpha = [x, y]^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha] = [x^r t, y^r t'] = [x^r, y^r] = z^r$$

Dunque $L = \Omega_1(\langle z \rangle)$, che è contenuto nel centro di P , è α -invariante; per la scelta di P , P/L è perciò abeliano e quindi $L = P'$.

Poichè $|P'| = p \neq 2$ si ha, per ogni $g, h \in P$: $(gh)^p = g^p h^p [h, g]^{\binom{p}{2}} = g^p h^p$ e quindi $\mathcal{C}_1(P) = \{x^p | x \in P\}$; poichè $z \in \mathcal{C}_1(P)$ (infatti $\mathcal{C}_1(P) \geq \geq P'$) deve essere $z = w^p$ per qualche $w \in P$; pertanto $z^\alpha = (w^p)^\alpha = (w^\alpha)^p = (w^r t)^p$ con $t \in P'$ e quindi, essendo $|P'| = p$ si ha:

$$z^\alpha = (w^r)^p t^p = (w^r)^p = (w^p)^r = z^r.$$

Ciò è compatibile con (\circ) solo se $z = 1$. Contraddizione.

LEMMA 2. *Sia D un gruppo non abeliano che opera fedelmente sul p -gruppo abeliano elementare $V = V_1 \times V_2$, e irriducibilmente su V_i , $i = 1, 2$. Allora esiste $g \in V$ tale che $\langle g \rangle^D \stackrel{\text{def}}{=}} \langle g^x | x \in D \rangle = V$.*

DIM. Considerati V_1 e V_2 come D -moduli su $GF(p)$, distinguiamo due casi.

1) V_1 e V_2 non sono D -isomorfi.

Supponiamo, con eventuali cambiamenti di indici, che $\dim(V_1) \geq \dim(V_2)$. Sia $n = \dim(V_1)$, $1 \neq t \in V_1$, $1 \neq h \in V_2$ e poniamo $g = th$. Poichè V_1 è D -irriducibile esistono $1 = y_1, \dots, y_n$ in D tali che, posto $t_i = t^{y_i}$, $\{t_1, \dots, t_n\}$ è una base di V_1 . Posto $h_i = h^{y_i}$, supponiamo che $\{h_1, \dots, h_n\}$ non sia una base di V_2 ; allora possiamo supporre, dato che $\dim(V_2) \leq n$, $h_n = h_1^{a_1} \dots h_{n-1}^{a_{n-1}}$ per opportuni interi a_1, \dots, a_{n-1} .

Chiaramente $\langle g \rangle^D \geq \langle t_i h_i | i = 1, \dots, n \rangle$ e quindi:

$$\langle g \rangle^D \ni \mu = t_n h_n (t_1 h_1)^{-a_1} \dots (t_{n-1} h_{n-1})^{-a_{n-1}} = t_n t_1^{-a_1} \dots t_{n-1}^{-a_{n-1}}$$

ed è $1 \neq \mu \in V_1$; essendo V_1 D -irriducibile, $\langle g \rangle^D \geq V_1$; poichè $g \notin V_1$ e V_2 è D -irriducibile, si ha $\langle g \rangle^D = V_1 \times V_2$.

Supponiamo, quindi, che $\{h_1, \dots, h_n\}$ sia una base di V_2 , la posizione $\psi: t_i \mapsto h_i$ definisce quindi un isomorfismo tra V_1 e V_2 , poichè questi non sono D -isomorfi, esiste $z \in D$ tale che ⁽²⁾:

$$(\circ) \quad (t_i^z)\psi \neq (t_i\psi)^z = h_i^z.$$

Sia $t_i^z = t_i^{r_1} \dots t_i^{r_n}$; poichè $(t_i^z)\psi = h_i^{r_1} \dots h_i^{r_n}$, è chiaro che $\langle g \rangle^D \ni (t_i^z)\psi$, d'altra parte $\langle g \rangle^D \ni (t_i h_i)^z = t_i^z h_i^z$ e quindi $\langle g \rangle^D \ni (t_i^z h_i^z)^{-1} t_i^z (t_i^z)\psi = (h_i^z)^{-1} (t_i^z)\psi$ che per (\circ) è un elemento non identico di V_2 . Essendo V_2 D -irriducibile si ha perciò $\langle g \rangle^D \supseteq V_2$ e poichè $g \notin V_2$, si ha ancora $\langle g \rangle^D = V_1 \times V_2$.

2) V_1 e V_2 sono D -isomorfi.

In tal caso $C_D(V_1) = C_D(V_2) = 1$ (poichè D opera fedelmente su V). Per un risultato di Green (v. [4], th. 3.5.6) il numero di sottospazi di V che sono D -isomorfi è, in tal caso:

$$d = q^2 - 1/q - 1 = q + 1 \quad \text{dove } q = |\text{Hom}_D(V_1, V_1)|.$$

Poniamo $H = \text{Hom}_D(V_1, V_1)$ e valutiamo $q = |H|$.

Sia $\Theta: D \rightarrow \text{Hom}(V_1)$ il monomorfismo (moltiplicativo) di D in $\text{Aut}(V_1) \subseteq \text{Hom}(V_1)$; definito da $v(x\Theta) = v^x$, $\forall v \in V, \forall x \in D$.

Allora $H = \{\psi \in \text{Hom}(V_1) \mid \psi(x\Theta) = (x\Theta)\psi, \forall x \in D\}$.

Poichè V_1 è D -irriducibile, H è un'algebra con divisione di dimensione finita su $GF(p)$, dunque $q = p^r$ per qualche intero r , e, se H^* è il sottogruppo moltiplicativo di H , H^* è ciclico di ordine $p^r - 1$, inoltre $H^* \leq \text{Aut}(V_1)$. Dato $\psi \in H^*$ definiamo $C_{r_1}(\psi) = \{v \in V_1 \mid v\psi = v\}$; $C_{r_1}(\psi)$ è sottospazio di V_1 , inoltre dati $v \in C_{r_1}(\psi)$ e $x \in D$ si ha:

$$(v(x\Theta))\psi (v\psi)(x\Theta) = v(x\Theta) \quad \text{quindi } v^x = v(x\Theta) \in C_{r_1}(\psi)$$

dunque $C_{r_1}(\psi)$ è D -invariante e perciò $\psi = 1$ oppure $C_{r_1}(\psi) = \{0\}$. Pertanto $C_{r_1}(\psi) = 1$ per ogni $v \in V_1 \setminus \{0\}$ e quindi, poichè $|V_1 \setminus \{0\}| = p^n - 1$ (dove $n = \dim(V_1)$) si ha $p^r - 1 \leq p^n - 1$.

Supponiamo, per assurdo $r = n$, allora $|H^*| = |V_1 \setminus \{0\}|$ e quindi H^* è transitivo sugli elementi di $V_1 \setminus \{0\}$; essendo H^* ciclico, esso coincide con il proprio centralizzante in $S_{p^n - 1}$, il gruppo di permutazioni su $p^n - 1$ oggetti (v. [7], II 3.1), e quindi a maggior ragione in $\text{Aut}(V_1)$;

⁽²⁾ Si noti che se $(t_i^z)\psi = (t_i\psi)^z$ per ogni z , allora $(t_i^z)\psi = (t_i\psi)^z$ per ogni $z \in D$, e quindi $(t^z)\psi = (t\psi)^z$ per ogni $t \in V_1$ e per ogni $z \in D$.

ma $(D)\Theta \leq C_{\text{Aut}(H^*)}(H^*)$ e quindi $(D)\Theta \leq H^*$ il che è assurdo perchè $(D)\Theta \cong D$ non è abeliano.

Dunque $|H| = p^r$ con $r < n$ e quindi d , il numero dei sottospazi di V che sono D -invarianti è $d = p^r + 1$. Siano K_1, \dots, K_d tali sottospazi, essi hanno tutti dimensione n e intersezione a due a due banale, quindi:

$$\left| \bigcup_{i=1}^d K_i \right| = d(p^n - 1) + 1 = (p^r + 1)(p^n - 1) + 1 < (p^n + 1)(p^n - 1) + 1 = p^{2n} = |V|.$$

Ma allora esiste $g \in V$ tale che $g \notin K_i$ per ogni $i = 1, \dots, d$ e perciò, poichè $\langle g \rangle^D$ è D -invariante, $\langle g \rangle^D = V$.

Il lemma che segue è un'ovvia generalizzazione di un enunciato di Hobby [6], in un lavoro sui gruppi in cui il normalizzante di ogni sottogruppo è normale.

LEMMA 3. *Sia G un gruppo finito, $x \in G$. Se $\langle x \rangle \triangleleft \langle x \rangle^\sigma$ allora $\langle x \rangle^\sigma$ è nilpotente di classe al più 2; se inoltre $|x| = p$, per qualche primo p , $\langle x \rangle^\sigma$ è abeliano elementare.*

LEMMA 4. *Sia P un p -gruppo, p un primo, e D un p' -gruppo che opera su P in modo tale che, posto $G = PD$ sia $\langle g \rangle \triangleleft \langle g \rangle^\sigma$ per ogni $g \in P$. Allora se $x \in D'$ opera come una potenza su $P/\Phi(P)$, x opera come una potenza su P . In particolare se x non opera trivialmente allora P è abeliano.*

DIM. Se x induce l'identità su $P/\Phi(P)$, allora x è l'identità su P . Supponiamo quindi che x non induca l'identità su $P/\Phi(P)$, allora per il lemma 1, è sufficiente provare che $\Phi(P) = \mathcal{C}_1(P)$; cioè che $P/\mathcal{C}_1(P)$ è abeliano. Procedendo per induzione su $|P|$, possiamo supporre $\mathcal{C}_1(P) = 1$; e quindi P ha esponente p e, per il lemma 3, $\langle g \rangle^\sigma$ è abeliano elementare per ogni $g \in P$.

Sia $\bar{P} = P/\Phi(P) = V_1/\Phi(P) \times \dots \times V_n/\Phi(P) = \bar{V}_1 \times \dots \times \bar{V}_n$ la riduzione di \bar{P} in fattori D -irriducibili. Ovviamente $P = V_1 \dots V_n$.

Sia $n = 1$ e si consideri $g \in P \setminus \Phi(P)$; $\langle g \rangle^\sigma \Phi(P)$ è D -invariante, quindi $\langle g \rangle^\sigma \Phi(P) = P$, perciò $\langle g \rangle^\sigma = P$ e P è abeliano elementare.

Sia dunque $n > 1$; se proviamo che tutti i prodotti $V_i V_j$ sono abeliani, resta provato che P stesso è abeliano.

Sia $\tilde{D} = D/C_D(V_i V_j)$; \tilde{D} non è abeliano perchè, se così fosse: $C_D(V_i V_j) > D' > \langle x \rangle$ mentre x induce una potenza non identica su

$\bar{V}_i \times \bar{V}_j$. Per il lemma 2, esiste dunque $\bar{g} \in \bar{V}_i \times \bar{V}_j$ tale che $\langle \bar{g} \rangle^\sigma = \bar{V}_i \times \bar{V}_j$, cioè $\langle g\Phi(P) \rangle^p = \bar{V}_i \times \bar{V}_j$ e quindi $\langle g \rangle^\sigma \Phi(P) = V_i V_j$. Ora $\Phi(V_i V_j)$ car $V_i V_j \triangleleft G$ e perciò $\Phi(V_i V_j) \triangleleft G$. Se $\Phi(V_i V_j) = 1$, allora $V_i V_j$ è abeliano. Altrimenti, per ipotesi induttiva, x induce una potenza non identica su $P/\Phi(V_i V_j)$ che risulta perciò abeliano, e quindi $\Phi(V_i V_j) = \Phi(P)$; pertanto $V_i V_j = \Phi(P) \langle g \rangle^\sigma = \Phi(V_i V_j) \langle g \rangle^\sigma$; ciò implica $V_i V_j = \langle g \rangle^\sigma$ e quindi che $V_i V_j$ è abeliano elementare.

L'ultima affermazione discende da Hilfssatz 5 in [8].

Riportiamo ora alcune conseguenze di questo lemma che saranno utili nella prossima sezione.

COROLLARIO 1. *Sia $G = PD$, con P un p -sottogruppo normale di G e D un p' -gruppo tali che $\langle g \rangle \triangleleft \langle g \rangle^\sigma$ per ogni $g \in P$; e sia $x \in D' \cap Z(D)$ con $|x| = q$ e $q|p-1$. Allora P è generato dall'insieme degli elementi $g \in P$ tali che $g^x = g^n$ per qualche intero n . Inoltre se λ è un intero, $1 < \lambda \leq p-1$ e $\lambda^q \equiv 1 \pmod{p}$, allora $P_\lambda = \{g \in P | g^x = g^n \text{ con } n \equiv \lambda \pmod{p}\}$ è un sottogruppo D -invariante di P . Se $\lambda \neq 1$, P_λ è abeliano.*

DM. Dimostriamo la prima parte per induzione su $|P|$. Se $P/\Phi(P)$ non è D -irriducibile (per l'azione di coniugio di D su P) esistono, per Maschke, $\Phi(P) < H, K \triangleleft G$ tali che $HK = P$; per ipotesi induttiva H e K sono generati da elementi il cui coniugato tramite x è una loro potenza e quindi lo stesso vale per P . Sia quindi $P/\Phi(P)$ D -irriducibile; poichè $q|p-1$, il campo $GF(p)$ contiene tutte le radici q -esime dell'unità e quindi contiene le radici caratteristiche di x ; poichè $x \in Z(D)$ e D opera irriducibilmente su $P/\Phi(P)$ (v. [4], lemma 2.2.1) x è uno scalare (una potenza) su $P/\Phi(P)$ e quindi, per il lemma 4, è un automorfismo potenza su P .

Siano ora λ e P_λ come da ipotesi e sia $T = P_\lambda$; siano poi $g \in P_\lambda$ e $y \in D$, poichè $x \in Z(D)$ si ha: $(g^y)^x = g^{xy} = (g^n)^y = (g^y)^n$ con $n \equiv \lambda \pmod{p}$, e quindi T è D -invariante; chiaramente poi x induce la potenza λ -esima su $T/\Phi(T)$ e dunque, per il lemma 4, x induce un automorfismo potenza su T e per ogni $h \in T$ è $h^x = h^n$ con $n \equiv \lambda \pmod{p}$, quindi $T \subseteq P_\lambda$ e perciò $T = P$.

Per rendere più lineari successive dimostrazioni conviene evidenziare un caso particolare.

COROLLARIO 2. *Nelle stesse ipotesi del corollario precedente, sia $p \neq 2$ e $|x| = 2$. Allora $[P, \langle x \rangle] = \{g \in P | g^x = g^{-1}\}$; in particolare $[P, \langle x \rangle]$ è abeliano.*

DIM. Poichè $|x| = 2$ è $[g, x]^x = [g, x]^{-1}$ per ogni $g \in P$, d'altra parte se $g^x = g^{-1}$ allora $[g, x] = g^{-1}g^x = g^{-2}$ ed essendo $p \neq 2$, si ha $g \in [P, \langle x \rangle]$. Dunque $[P, \langle x \rangle] = \langle I \rangle$ dove $I = \{g \in P | g^x = g^{-1}\}$, ma $I = P_{p-1}$ è sottogruppo di P e quindi $[P, \langle x \rangle] = I$.

LEMMA 5. *Nelle stesse ipotesi e notazioni del corollario 1, sia $p \neq 2$. Allora $\Omega_1(P_\lambda)$ normalizza ogni sottogruppo di P_μ con $\mu \neq \lambda$. Se $\lambda \neq 1$ allora $\Omega_1(P_\lambda) \leq Z(P)$.*

DIM. Siano $\lambda \neq \mu$ interi compresi tra 1 e $p-1$, $g \in \Omega_1(P_\lambda)$ e $h \in P_\mu$; allora $g^x = g^\lambda$ e $h^x = h^n$ con $n \equiv \mu \pmod{p}$; proviamo che g normalizza $\langle h \rangle$, resta così dimostrato che $\Omega_1(P_\lambda)$ normalizza ogni sottogruppo di P_μ . Consideriamo $\langle gh \rangle^g$. $\langle gh \rangle^g \ni g^r h^r$ per ogni intero r , infatti per $r=1$ la cosa è banale, supposta vera per $r-1$ si ha: $\langle gh \rangle^g \ni gh(g^{r-1}h^{r-1})^h = g^r h^r$; inoltre $\langle gh \rangle^g \ni (gh)^x = g^\lambda h^n$ e quindi $\langle gh \rangle^g \ni g^n h^n h^{-n} g^{-\lambda} = g^{n-\lambda}$, poichè g ha ordine p e $n \not\equiv \lambda \pmod{p}$ si ha $g \in \langle gh \rangle^g$; ma per ipotesi $\langle gh \rangle \triangleleft \langle gh \rangle^g$ e quindi g normalizza $\langle gh \rangle$.

Ora $H = \langle g, gh \rangle = \langle g, h \rangle$ è un p -gruppo con massimale ciclico $\langle gh \rangle$, essendo $p \neq 2$, si ha: $(gh)^p = g^p h^p = h^p$ e dunque $|h| = |hg|$, pertanto $\langle h \rangle$ è massimale in H e quindi g normalizza $\langle h \rangle$.

Ciò prova la prima asserzione.

Supponiamo ora $\lambda \neq 1$; poichè $g \in \Omega_1(P_\lambda)$ opera per coniugazione come un automorfismo potenza su P_μ , $\mu \neq \lambda$, sul quale x opera come una potenza omogenea, si ha $[g, x] \in C_G(P_\mu)$; ma $[g, x] = g^{-1}g^x = g^{\lambda-1}$, essendo $\lambda \neq 1$ è quindi $g \in C_G(P_\mu)$, pertanto $\Omega_1(P_\lambda) \leq C_P(P_\mu)$ per $\mu \neq \lambda$. D'altra parte, essendo $\lambda \neq 1$, P_λ è abeliano. Poichè l'unione dei P_v , $1 \leq v \leq p-1$ genera P si ottiene allora $\Omega_1(P_\lambda) \leq Z(P)$.

3. Gruppi \mathfrak{B}_2 risolubili.

Osserviamo, innanzi tutto, che ogni quoziente e ogni sottogruppo subnormale di un gruppo \mathfrak{B}_n è anch'esso \mathfrak{B}_n . (Gaschütz [3] prova inoltre che se G è \mathfrak{B}_1 finito risolubile, allora ogni suo sottogruppo è \mathfrak{B}_1 ; un risultato analogo non vale però per i gruppi \mathfrak{B}_2 ; infatti il gruppo generale lineare $GL(2, 3)$ è \mathfrak{B}_2 mentre i suoi 2-sottogruppi di Sylow sono diedrali di ordine 16, e non sono \mathfrak{B}_2 , vedi anche [9]).

Enunciamo ora, per comodità, due noti risultati sui gruppi \mathfrak{B}_2 dei quali faremo ampio uso nel seguito.

TEOREMA 1 (Heineken [5]). *Se tutti i sottogruppi ciclici del gruppo G sono subnormali di difetto al più 2, allora $\gamma_5(G) = \gamma_4(G)^2 = 1$.*

Dal fatto, ben noto, che $G^{(n)} \leq \gamma_{2^n}(G)$ segue immediatamente che un gruppo \mathfrak{B}_2 nilpotente N ha lunghezza derivata al più 2 se $3 \nmid |N|$, al più 3 altrimenti. Questa particolarità legata al primo 3 ci costringerà a trattare dei casi particolari. Abbiamo già osservato che non è noto se 4 sia la migliore limitazione della classe dei gruppi \mathfrak{B}_2 nilpotenti; in effetti non si sa se esistono 3-gruppi \mathfrak{B}_2 di classe esattamente 4.

TEOREMA 2 (McCaughan e Stonehewer [9]). *Sia G un gruppo finito risolubile \mathfrak{B}_2 , allora tutti i fattori principali di G evitati da $\text{Fit}(G)$ sono di rango al più 2.*

Di questo teorema, oltre a utilizzare direttamente l'enunciato, faremo ripetutamente uso di una argomentazione contenuta nella dimostrazione originale, che, per comodità, riportiamo nel lemma che segue.

LEMMA 6. *Sia G un gruppo finito \mathfrak{B}_2 , P un p -sottogruppo normale di G , x un p' -elemento di G tale che $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$ e $[P, \langle x \rangle] \cap C_P(x) = 1$, e sia M un p' -sottogruppo di $\langle x \rangle^G$ contenente x ; allora M normalizza ogni sottogruppo di $C_P(x)$.*

DIM. Sia $D \leq C_P(x)$; poichè x è un p' -elemento e $P \triangleleft G$ si ha: $[P, \langle x \rangle] C_P(x) = P$ (v. [4], th. 5.3.5.) e quindi:

$$\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D \triangleleft \triangleleft P \langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G,$$

essendo G un gruppo \mathfrak{B}_2 si ha $\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D \triangleleft (\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D)^G$, in particolare $\langle x \rangle^G$, e quindi M , normalizza $\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D$. D'altra parte $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$ e $M \leq \langle x \rangle^G$, dunque M normalizza $\langle x \rangle P$, da ciò segue che M normalizza $\langle x \rangle P \cap M = \langle x \rangle (P \cap M) = \langle x \rangle$, e dunque anche $C_P(x)$. Ma allora M normalizza:

$$C_P(x) \cap \langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D = D(C_P(x) \cap \langle x \rangle [P, \langle x \rangle]) = D$$

dato che $C_P(x) \cap [P, \langle x \rangle] = 1$. Come si voleva.

LEMMA 7. *Sia $G = PQ$ un gruppo \mathfrak{B}_2 , con $P \triangleleft G$ un p -gruppo, p primo, e Q un q -gruppo, q un primo diverso da p . Se $q \nmid p-1$ allora $Q/C_Q(P)$ è abeliano.*

DIM. Osserviamo, innanzi tutto che, per ogni primo $p, q \neq p$ e $q \nmid p-1$ implicano $q \neq 2$. Procediamo quindi per induzione su $|G|$.

Sia $\Phi(P) \neq 1$, $\bar{G} = G/\Phi(P)$, $\bar{Q} = Q\Phi(P)/\Phi(P)$ e $\bar{P} = P/\Phi(P)$, poichè \bar{G} è un gruppo \mathfrak{B}_2 si ha per ipotesi induttiva $\bar{Q}/C_{\bar{Q}}(\bar{P})$ abeliano. Ma essendo Q un p' -gruppo $C_{\bar{Q}}(\bar{P}) = C_Q(P)\Phi(P)/\Phi(P)$ e quindi $Q/C_Q(P) \cong \cong \bar{Q}/C_{\bar{Q}}(\bar{P})$ è abeliano. Possiamo quindi supporre $\Phi(P) = 1$, cioè P abeliano elementare.

Supponiamo che esista $1 \neq H < P$ con $H \triangleleft G$. Allora, per Maschke, esiste un complemento K di H in P , con $K \triangleleft G$.

Ora $G/K = PQ/K = KHQ/K \cong QH/QH \cap K = QH$ e, analogamente, $G/H \cong QK$. Essendo isomorfi a quozienti di G , QH e QK sono gruppi \mathfrak{B}_2 e dunque, per ipotesi induttiva, si ha:

$$C_Q(H) \geq Q' \quad \text{e} \quad C_Q(K) \geq Q' \quad \text{quindi} \quad C_Q(P) = C_Q(H) \cap C_Q(K) \geq Q'.$$

Rimane solo il caso in cui P è normale minimo in G .

Sia $x \in Q$ tale che $C = C_P(x) \neq 1$. Essendo P abeliano si ha: $C \cap [P, \langle x \rangle] = 1$. Dato che $\langle x \rangle^q P \triangleleft \triangleleft G$ si ha, per il lemma 6, che $\langle x \rangle^q$ normalizza ogni sottogruppo di C e pertanto opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza su C ; poichè $q \nmid p-1$ ciò può avvenire solo se $\langle x \rangle^q$ centralizza C ; quindi $C = C_P(\langle x \rangle^q)$ e $C \triangleleft G$. Essendo $C \neq 1$ e P normale minimo deve essere $C = P$ e quindi $x \in C_Q(P)$. Pertanto $Q/C_Q(P)$ opera come un gruppo di automorfismi privi di punti fissi su P , essendo $q \neq 2$ si conclude che $Q/C_Q(P)$ è ciclico.

COROLLARIO 3. *Sia G un gruppo \mathfrak{B}_2 con $\text{Fit}(G)$ un p -gruppo, per qualche primo p ; allora i q -sottogruppi di Sylow di $\text{Fit}_2(G)$ con $q \neq p$ e $q \nmid p-1$ sono abeliani.*

DIM. Sia Q un q -sottogruppo di Sylow di $\text{Fit}_2(G)$, $q \neq p$, allora $Q \text{Fit}(G) \triangleleft G$, quindi $Q \text{Fit}(G)$ è \mathfrak{B}_2 e si applica il lemma precedente, tenendo conto che $C_Q(\text{Fit}(G)) = 1$.

La dimostrazione del prossimo lemma ricalca quella data da Mc Caughan e Stonehewer del risultato da noi riportato come teorema 2.

LEMMA 8. *Sia G un gruppo \mathfrak{B}_2 finito risolubile, $\text{Fit}(G) = P$ un p -gruppo per qualche primo p ; allora i q -fattori principali di G con $q \nmid p-1$ che giacciono tra P e $\text{Fit}_2(G)$ sono ciclici.*

DIM. Possiamo supporre P abeliano elementare, infatti è ben noto che:

$$\text{Fit}(G/\Phi(P)) = \text{Fit}(G)/\Phi(P) = P/\Phi(P).$$

Procediamo per assurdo; sia M/N un q -fattore principale di G , $q \nmid p-1$, con $P \leq N < M \leq \text{Fit}_2(G)$ e $|M|$ minimo per essere M/N non ciclico. Chiaramente $M/P < Q/P$ dove Q/P è il q -sottogruppo di Sylow di $\text{Fit}_2(G)/P$.

Sia $x \in M \setminus N$, allora $P\langle x \rangle^G = M$, infatti sussiste il G -isomorfismo: $M/N = P\langle x \rangle^G N/N \cong P\langle x \rangle^G / (P\langle x \rangle^G \cap N)$ e, per la minimalità di M , è $M = P\langle x \rangle^G$.

Usiamo ora il soprassegno per indicare elementi e sottogruppi modulo P . Per il corollario 3, \bar{M} è abeliano e quindi l'applicazione $\bar{x} \mapsto \bar{x}^G$ induce un G -isomorfismo di $\bar{M}/\Omega_1(\bar{M})$ su $\Phi(\bar{M})$. Per il teorema di Jordan-Hölder e la minimalità di M , è $\Omega_1(\bar{M}) = \bar{M}$, cioè $\bar{M} = M/P$ è abeliano elementare. Sia M_1 un complemento di P in M , $N_1 = N \cap M_1$ e sia infine M_0 un complemento di N_1 in M_1 ; $M_0 \cong M/N$ è un gruppo abeliano non ciclico che opera fedelmente su P , si ha quindi $P = \prod_{1 \neq x \in M_0} C_P(x)$ (\circ) e, per ogni $x \in M_0$ si ha $[P, \langle x \rangle] \cap C_P(x) = 1$; inoltre, per quanto precedentemente osservato, $\langle x \rangle^G P = M$, chiaramente quindi $M_1 \leq \langle x \rangle^G$, e per il lemma 6, M_1 opera come un gruppo di automorfismi potenza sul p -gruppo abeliano elementare $C_P(x)$. Poichè $q \nmid p-1$ allora M_1 centralizza $C_P(x)$; ma questo avviene per ogni $x \in M_0$ e quindi, per (\circ), M_1 centralizza P . Assurdo.

L'assumere che i q -fattori siano contenuti in $\text{Fit}_2(G)$ serve, in realtà, solo per facilitare la dimostrazione; più avanti (teorema 3) sarà chiaro che tutti i q -fattori principali con $q \nmid p-1$ evitati da P sono ciclici.

Prima di proseguire ricordiamo che se H è un gruppo finito, $\text{Fit}(H)$ coincide con l'intersezione dei centralizzanti dei fattori principali di H . È ovvio che, qualora $\text{Fit}(H)$ sia noto è sufficiente considerare i fattori principali in esso contenuti; in particolare $H/\text{Fit}(H)$ è un prodotto subdiretto di gruppi di automorfismi dei fattori principali di H contenuti in $\text{Fit}(H)$.

LEMMA 9. *Sia G un gruppo \mathfrak{B}_2 finito risolubile; allora il quoziente $\text{Fit}_3(G)/\text{Fit}_2(G)$ è abeliano.*

DIM. (Dove scriviamo $F_i = \text{Fit}_i(G)$ e $F = F_1$).

Per quanto sopra ricordato e per il teorema 2, F_3/F_2 è un prodotto subdiretto di gruppi lineari nilpotenti di grado al più 2; per un fatto ben noto (vedi p. es. Dixon [2], th. 1.4.B) tali gruppi sono abeliani o hanno 2-componente non identica; pertanto F_3/F_2 è abeliano se e solo se tale è il suo 2-sottogruppo di Sylow.

Sia G un controesempio minimo, allora $G = Q$ dove Q/F_2 è il 2-sottogruppo di Sylow di F_3/F_2 (infatti, essendo $Q \triangleleft G$, Q è \mathfrak{B}_2 ed è $F_2 = \text{Fit}_2(Q)$). Supponiamo che G abbia due sottogruppi normali minimi distinti M_1 ed M_2 , e siano $L_i/M_i = \text{Fit}_2(G/M_i)$, $i = 1, 2$; per la scelta di G , i quozienti G/L_i sono abeliani, ma facilmente si verifica che $L_1 \cap L_2 = F_2$ e quindi che G/F_2 è abeliano, contro la scelta di G . Dunque G ha un unico sottogruppo normale minimo e, in particolare, F è un p -gruppo per qualche primo p .

Poichè $\text{Fit}(G/\Phi(F)) = F/\Phi(F)$ la minimalità di G comporta $\Phi(F) = 1$ e quindi F è abeliano elementare. Chiaramente F_2/F è un p' -gruppo; osserviamo poi che F non è un 2-gruppo, perchè, se così fosse, per il lemma 8 tutti i fattori principali di G/F sarebbero ciclici e quindi G/F_2 abeliano. Pertanto G/F è un p' -gruppo. Per Maschke F si decompone allora nel prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G , poichè G ha un unico sottogruppo normale minimo, questo coincide con F .

Sia K un complemento di F in G , H il 2'-sottogruppo di $\text{Fit}(K)$ (chiaramente $H \neq 1$) e D un 2-sottogruppo di Sylow di K . Ovviamente $HD = K$ e $\bar{D} = D/C_D(H) \cong K/\text{Fit}(K) \cong G/F_2$ non è abeliano. Scelto $\bar{x} = xC_D(H)$, $x \in K$ un elemento di $\bar{D}' \cap Z(\bar{D})$ con $|\bar{x}| = 2$; essendo K un gruppo \mathfrak{B}_2 , per il corollario 2⁽³⁾, \bar{x} opera per coniugazione come l'inversione su $[\bar{H}, \langle \bar{x} \rangle]$ dove $\bar{H} = HC_D(H)$ e quindi x opera come l'inversione su $T = [H, \langle x \rangle]$; inoltre dato che $\bar{x} \in Z(\bar{D})$, T è D -invariante, ma notoriamente $T \triangleleft H$ e quindi $T \triangleleft HD = K$; ovviamente $T \neq 1$. Sia V sottogruppo normale minimo di K contenuto in T . È $rg(V) > 1$, perchè se $rg(V) = 1$ allora $D/C_D(V)$ è abeliano, quindi: $C_D(V) \geq D'C_D(H) \geq \langle x \rangle$ contro il fatto che x induce l'inversione su V .

Ora, poichè $(|V|, |F|) = 1$ e V non è ciclico, esiste $g \in V$ tale che $C = C_F(g) \neq 1$. È $C_V(C) < V$, perchè se fosse $C_V(C) = V$ allora $C = C_F(V)$ e quindi $C \triangleleft G$ e, poichè F è normale minimo, $C = F$ il che è assurdo dato che $C_G(F) = F$.

Ora $\langle g \rangle F \triangleleft \triangleleft G$ poichè V è normale minimo in K ; V è un p' -sottogruppo di $\langle g \rangle^G$, essendo poi F abeliano si ha $[F, \langle x \rangle] \cap C = 1$ e dunque, per il lemma 6, V opera come un gruppo di automorfismi potenza su C ; poichè questi sono centrali nel gruppo degli automorfismi di C e chiaramente C è normalizzato da x , si ha $[V, x] \leq C_V(C) < V$. Contraddizione, perchè essendo x l'inversione su V , si ha $[V, x] = V$.

(3) Il corollario 2 è stato provato per H un p -gruppo, $p \neq 2$; ma è chiaro che nulla cambia se H è un 2'-gruppo nilpotente.

TEOREMA 3. *Sia G un gruppo \mathfrak{B}_2 finito risolubile; allora $G/\text{Fit}_2(G)$ è supersolubile e metabeliano. In particolare G ha lunghezza di Fitting al più 4.*

DIM. Poichè, per il lemma 9, $\text{Fit}_3(G)/\text{Fit}_2(G)$ è abeliano, è sufficiente provare che i fattori principali di G giacenti tra $\text{Fit}_2(G)$ e $\text{Fit}_3(G)$ sono tutti ciclici.

Ora $\text{Fit}_2(G) = \cap C_G(R/S)$ al variare di R/S tra i fattori principali di G tali che $S \geq \text{Fit}(G)$, quindi, per il teorema 2, fattori di rango al più 2. Osserviamo che se H è un sottogruppo di $GL(2, p)$ e N è sottogruppo normale abeliano di H , allora i fattori principali di H contenuti in N sono ciclici. Infatti, posto $S = SL(2, p)$ è $N \cap S \triangleleft H$; inoltre $N/(N \cap S) \cong NS/S$ è ciclico e d'altra parte $N \cap S$ è un sottogruppo abeliano di S e dal teorema 2.8.3 in [4], segue subito che $N \cap S$ è ciclico, per Jordan-Hölder si conclude.

Torniamo al nostro caso e procediamo per assurdo: sia M/N fattore principale di G , $\text{Fit}_2(G) \leq N < M < \text{Fit}_3(G)$ con $|M|$ minimo perchè M/N non sia ciclico. Senz'altro esiste un fattore principale di G , R/S con $S \geq \text{Fit}(G)$ tale che $M \not\leq C = C_G(R/S)$ e quindi $C \cap M < M$. Ora: $(M \cap C)N/N \cong_G M \cap C/(N \cap C)$; poichè $(M \cap C)N \triangleleft G$ e $N < (M \cap C)N < M$, la minimalità di M comporta $(M \cap C)N = N$ e perciò $MC/NC \cong M/(M \cap NC) = M/(M \cap C)N = M/N$. Ora, MC/NC è fattore principale di G/C , ma G/C è un gruppo lineare di grado al più 2 e MC/C è abeliano (dato che, essendo $M < \text{Fit}_3(G)$, $M/\text{Fit}_2(G)$ è abeliano), dunque, per quanto osservato $MC/NC \cong M/N$ è ciclico. Contraddizione.

LEMMA 10. *Sia G un gruppo finito \mathfrak{B}_2 metanilpotente. Se i 3-sottogruppi di Sylow di G sono al più metabeliani, allora $G^{(3)} = 1$; altrimenti $G^{(4)} = 1$.*

DIM. Supponiamo che i 3-sottogruppi di Sylow di G siano al più metabeliani e procediamo per induzione su $|G|$; possiamo quindi supporre che $P = \text{Fit}(G)$ sia un p -gruppo per qualche primo p , e che G possieda un solo sottogruppo normale minimo.

Allora $G = PD$ con $D \cong G/P$ un p' -gruppo nilpotente e $C_D(P) = 1$. Se D è abeliano allora per il teorema 1 e per l'ipotesi sui 3-Sylow di G si ha $G^{(3)} = 1$. Ciò comprende, per il corollario 3, il caso $p = 2$. Sia dunque $p \neq 2$ e D non abeliano, allora, ancora per il corollario 3, possiamo scegliere $x \in D' \cap Z(D)$ tale che $|x| = q$ e $q|p - 1$, q un primo. Al variare di λ intero, $1 < \lambda < p - 1$ e $\lambda^q \equiv 1 \pmod{p}$ siano: $P_\lambda = \{g \in P | g^x = g^\lambda \text{ con } n \equiv \lambda \pmod{p}\}$.

Per il corollario 1, i P_λ sono sottogruppi D -invarianti di P . Inoltre, per il lemma 5, se $\lambda \neq 1$ allora $\Omega_1(P_\lambda) \leq Z(P)$ e dunque $\Omega_1(P_\lambda) \triangleleft G$. Ovviamente $\Omega_1(P_\lambda) \cap \Omega_1(P_\mu) = 1$ se $\lambda \neq \mu$, e poichè supponiamo che G abbia un unico sottogruppo normale minimo, deve essere $P_\lambda \neq 1$ per un solo valore $\lambda \neq 1$. Chiamiamo T tale P_λ . Ci siamo quindi ridotti al caso $P = TC$ con $C = P_1 = C_P(x)$, $T \triangleleft G$, T abeliano sul quale x opera come una potenza non identica. (Ovviamente quindi $C \cap T = 1$). Ancora per il lemma 5, $\Omega_1(C)$ opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza di T ; essendo quest'ultimo abeliano si ha che $\Omega_1(C)/C_{\Omega_1(C)}(T)$ è ciclico. Supponiamo $L = C_{\Omega_1(C)}(T) \neq 1$, essendo $L \triangleleft C$ si ha allora $R = L \cap Z(C) \neq 1$; ma allora $R = \Omega_1(Z(P\langle x \rangle)) \triangleleft G$ dato che $R \text{ car } P\langle x \rangle \triangleleft G$, inoltre $R \cap T = 1$, contro l'ipotesi che G abbia un solo sottogruppo normale minimo. Quindi $L = 1$ e $\Omega_1(C)$ è ciclico, essendo $p \neq 2$ si conclude che C è ciclico.

Consideriamo ora il quoziente G/T ; poichè $P/T \cong C$ è ciclico, $G/T/T$ centralizza P/T ; in particolare $D'T/T$ centralizza P/T ; poichè per l'ipotesi sui 3-sottogruppi di G e per il teorema 1, D' è abeliano ed è $D'T/T \cap P/T = 1$ si ha che $D'P/T = G'P/T$ è abeliano e quindi $G^{(2)} \leq T$. Essendo T abeliano si ha finalmente $G^{(3)} = 1$.

Con argomenti del tutto analoghi si prova che $G^{(4)} = 1$, senza alcuna ipotesi sui 3-sottogruppi di G .

Il teorema 3 e il lemma 10 consentono di concludere immediatamente che se G è un gruppo finito risolubile \mathfrak{B}_2 e $3 \nmid |\text{Fit}_2(G)|$ allora $G^{(5)} = 1$; la dimostrazione dello stesso risultato nel caso generale ci obbliga ad ulteriori osservazioni.

LEMMA 11. *Se G è un gruppo finito risolubile \mathfrak{B}_2 , allora il quoziente $G/\text{Fit}(G)$ ha lunghezza derivata al più 4.*

DIM. Proviamo infatti che se H è un gruppo \mathfrak{B}_2 coi fattori principali di rango al più 2 e $H/\text{Fit}(H)$ è supersolubile e metabeliano (tale è per i teoremi 2 e 3 il quoziente $G/\text{Fit}(G)$ se G è \mathfrak{B}_2 risolubile) allora $H^{(4)} = 1$.

Dato che tutte le ipotesi sono ereditate dai quozienti, procedendo per induzione si può supporre che $\text{Fit}(H)$ sia un p -gruppo per qualche primo p .

Se $p \neq 3$ allora $(\text{Fit}(H))^{(2)} = 1$ per il teorema 1, ed essendo $H/\text{Fit}(H)$ metabeliano si ha $H^{(4)} = 1$.

Se $p = 3$, poichè i fattori principali di H sono di rango al più 2, $H/\text{Fit}(H)$ si immerge nel prodotto diretto di sottogruppi di $GL(2, 3)$ e quindi, dovendo essere un 3'-gruppo, $\text{Fit}_2(H)/\text{Fit}(H)$ è un 2-gruppo;

poichè $H/\text{Fit}(H)$ è supersolubile si ha allora $H = \text{Fit}_2(H)$ e quindi, per il lemma 10, $H^{(4)} = 1$.

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato principale.

TEOREMA 4. *Sia G un gruppo finito risolubile \mathfrak{B}_2 , allora G ha lunghezza derivata al più 5.*

DIM. Per induzione su $|G|$. Supponiamo quindi che $\text{Fit}(G) = P$ sia un p -gruppo, per qualche primo p .

Se $p \neq 3$, sia $R = G^{(2)}$. Per il teorema 3, R è metanilpotente, inoltre per il lemma 11, $R^{(2)} = G^{(4)} \triangleleft \text{Fit}(G)$, dunque gli eventuali 3-sottogruppi di R sono al più metabeliani. Si ha allora, per il lemma 10, $G^{(5)} = R^{(3)} = 1$.

Sia dunque $p = 3$. Sia D un 2-sottogruppo di Sylow di G e $\bar{D} = DP/P$ (ovviamente $\bar{D} \cong D$), sia inoltre $\bar{F}_2 = \text{Fit}_2(G)/P = \text{Fit}(G/P)$.

Supponiamo D non abeliano. Per il lemma 8, i 2'-fattori principali di G/P contenuti in \bar{F}_2 sono ciclici, quindi \bar{D}' centralizza il 2'-sottogruppo di Hall \bar{Q} di \bar{F}_2 , in particolare $Z(\bar{D}) \cap \bar{D}'$ centralizza $\bar{F}_2 \triangleleft \triangleleft \bar{Q}\bar{D}$, ciò implica $Z(\bar{D}) \cap \bar{D}' \triangleleft \bar{F}_2$. Sia $x \in Z(D) \cap D'$, $|x| = 2$, allora $\bar{x} = xP \in \bar{F}_2$ e quindi $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \triangleleft \bar{G}$, cioè $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$.

Sia $M/P = \bar{M} = \langle \bar{x} \rangle^{\bar{a}} = \langle x \rangle^a P/P$, \bar{M} è un 2-gruppo abeliano elementare per il lemma 3, dato che $|\bar{x}| = 2$; sia $M_0 = M \cap D$. Poichè $x \in Z(D) \cap D'$, per il corollario 2, x opera per coniugazione come l'inversione su $[P, \langle x \rangle] \neq 1$; pertanto $P = [P, \langle x \rangle] C_P(x)$ con $[P, \langle x \rangle] \cap \cap C_P(x) = 1$; dato che, chiaramente, $M_0 \triangleleft \triangleleft \langle x \rangle^a$, il lemma 6 consente allora di concludere che M_0 opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza su $C_P(x)$.

Poichè $[P, \langle x \rangle]$ è abeliano, se tale è anche $C_P(x)$, allora P è metabeliano e quindi, per il lemma 10, $\text{Fit}_2(G)^{(3)} = 1$; per il teorema 3, si ha perciò $G^{(5)} = 1$.

Se $C_P(x)$ non è abeliano allora è centralizzato da M_0 ; in tal caso $[P, \langle x \rangle]$ è il residuo nilpotente di $M = PM_0 \triangleleft G$ e quindi $[P, \langle x \rangle] \triangleleft G$.

Si procede quindi come nella dimostrazione del lemma 10, il supporre, com'è lecito, che G possieda un solo sottogruppo normale minimo comporta allora $C_P(x)$ ciclico, mentre esso era supposto non abeliano.

Rimane il caso in cui D è abeliano.

Sia A/B un 2-fattore principale di G/P . Se A/B è ciclico allora $G = C_G(A/B)$, altrimenti, per il teorema 2, $\text{rg}(A/B) = 2$ e $G/C_G(A/B)$ si immerge in $GL(2, 2) \cong S_3$; ma i 2-sottogruppi di Sylow di G/P sono per assunzione abeliani (essendo P un 2'-sottogruppo, essi sono in-

fatti isomorfi a D) quindi $G/C_G(A/B)$ è un $2'$ -gruppo, pertanto esso è banale oppure ciclico di ordine 3. In ogni caso $C_G(A/B) \geq G'$; poichè ciò avviene per tutti i $2'$ -fattori principali di G/P (che, in virtù del lemma 8 e del teorema 3, sono ciclici), si ha: $G' \leq \cap C_G(V/U)$ al variare di V/U tra i fattori principali di G/P e quindi $G' \leq \text{Fit}_2(G)$. Poichè, per il lemma 10, $(\text{Fit}_2(G))^{(4)} = 1$ si ottiene, in conclusione, $G^{(5)} = 1$.

Nota. Mentre questo articolo era in fase di stampa è apparso su Arch. Math., **40** (1983), pp. 193-199, l'articolo di S. K. MAHDAVIANARY: *A special class of three-Engel groups*. In esso, in particolare, si conclude la dimostrazione che se N è un gruppo \mathfrak{B}_2 nilpotente allora $\gamma_4(N) = 1$. Ciò semplifica nella maniera ovvia la dimostrazione del teorema 4 e rende a tal scopo superfluo il lemma 11, così come osservato prima del suo enunciato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BEST - O. TAUSSKY, *A class of groups*, Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A., **47** (1942), pp. 55-62.
- [2] J. D. DIXON, *The structure of linear groups*, London, 1971.
- [3] W. GASCHÜTZ, *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist*, J. Reine Ang. Math., **198** (1957), pp. 87-92.
- [4] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, New York, 1968.
- [5] H. HEINEKEN, *A class of three-Engel groups*, J. Algebra, **17** (1971), pp. 341-345.
- [6] C. HOBBY, *Finite groups with normal normalizers*, Can. J. Math., **20** (1968), pp. 1256-1260.
- [7] B. HUPPERT, *Endliche gruppen*, Berlin, 1967.
- [8] B. HUPPERT, *Zur Sylowstruktur auflösbarer gruppen*, Arch. Math., **12** (1961), pp. 161-169.
- [9] D. J. MCCAUGHAN - S. E. STONEHEWER, *Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two*, Arch. Math., **35** (1980), pp. 56-60.
- [10] D. J. S. ROBINSON, *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60** (1964), pp. 21-38.
- [11] D. J. S. ROBINSON, *Wreath products and indices of subnormality*, Proc. London Math. Soc., **17** (1967), pp. 157-270.
- [12] J. E. ROSEBLADE, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 402-412.
- [13] G. ZACHER, *Caratterizzazione dei t -gruppi finiti risolubili*, Ricerche Matematiche, **1** (1952), pp. 287-294.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 gennaio 1983.