RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO CASOLO

Gruppi finiti risolubili in cui tutti i sottogruppi subnormali hanno difetto al più 2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 71 (1984), p. 257-271

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__257_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 70 (1984)

Gruppi finiti risolubili in cui tutti i sottogruppi subnormali hanno difetto al più 2.

CARLO CASOLO (*)

1. Introduzione.

Indichiamo con $\mathfrak{B}_n$ la classe dei gruppi i cui sottogruppi subnormali hanno difetto di subnormalità minore o uguale a n.

I gruppi $\mathfrak{B}_1$ (chiamati spesso T-gruppi) sono stati ampiamente studiati; da Best e Taussky [1], Zacher [13] e Gaschütz [3] nel caso finito e da Robinson [10] nel caso infinito. In particolare è stato provato, da Gaschütz nel caso finito e da Robinson in generale, che i gruppi $\mathfrak{B}_1$ risolubili sono metabeliani.

Per quanto riguarda i gruppi nilpotenti, fra i risultati provati da Roseblade in [12] è l'esistenza di una funzione $\sigma(n)$, dipendente solo da n, tale che ogni gruppo nilpotente $\mathfrak{B}_n$ è di classe al più $\sigma(n)$. Stime sufficientemente precise per tale funzione sono note solo per $n = 1$ (in tal caso i gruppi sono quelli, ben noti, di Dedekind e $\sigma(1) = 2$) e per $n = 2$ (Heineken [5] ha provato che $\sigma(2) \leqslant 4$, anche se non si conoscono gruppi $\mathfrak{B}_2$ nilpotenti di classe esattamente 4).

Alla luce di tali risultati ci si può chiedere se, e per quali valori di n, i gruppi $\mathfrak{B}_n$ risolubili hanno lunghezza derivata limitata da una funzione dipendente da n solamente. Purtroppo una tale limitazione non esiste, in generale, neppure per $n = 2$; infatti Robinson [11] dimostra che il prodotto intrecciato non ristretto iterato:

$$R_t \operatorname{Wr} \big(R_{t-1} \operatorname{Wr} (\dots \operatorname{Wr} (R_2 \operatorname{Wr} R_1) \dots)\big)$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria dell'Università, Via Belzoni 7, 35131 Padova (Italia).

di t copie isomorfe R_i di un gruppo abeliano non banale e privo di torsione, è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ di lunghezza derivata esattamente t.

Tuttavia, se si restringe l'indagine ai gruppi $\mathfrak{B}_2$ risolubili finiti, si ottengono risultati in senso diverso; McCaughan e Stonehewer [9] hanno infatti provato che tali gruppi hanno lunghezza di Fitting al più 5 (migliorando in ciò un precedente e non pubblicato risultato di Camina e Renouf) e lunghezza derivata al più 9. Nel medesimo articolo gli autori osservano che se V è un gruppo abeliano elementare di ordine 9, allora $\mathrm{Hol}(V)$ è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ di lunghezza di Fitting 4 e lunghezza derivata 5.

Scopo del presente lavoro è dimostrare che se G è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito e risolubile, allora G ha, di fatto, lunghezza di Fitting al più 4 e lunghezza derivata al più 5.

Concludiamo questa introduzione ricordando che non è noto il comportamento nè dei gruppi $\mathfrak{B}_2$ risolubili e periodici, in generale, nè dei gruppi finiti risolubili $\mathfrak{B}_n$ con $n \geqslant 3$.

Le notazioni usate sono quelle del libro di D. Gorenstein « Finite groups »; in particolare quelle relative al lemma 2 fanno riferimento al capitolo 3 di tale volume. Inoltre, se G è un gruppo, indicheremo con $\mathrm{Fit}_i(G)$ l'i-esimo termine della serie di Fitting di G, e con $\gamma_i(G)$ l'i-esimo termine della serie centrale discendente di G. Anche quando non esplicitamente richiamato, tutti i gruppi considerati sono finiti.

2. Preliminari.

LEMMA 1 ([1]). *Sia P un p-gruppo, per qualche primo p, e $1 \neq \alpha \in \mathrm{Aut}(P)$ un p'-automorfismo che fissa ogni sottogruppo di $P/\mho_1(P)$. Allora P è abeliano e α un automorfismo potenza.*

DIM. Se α induce l'identità su $P/\mho_1(P)$, allora induce l'identità su $P/\Phi(P)$ e quindi è l'automorfismo identico su P, il che è escluso per ipotesi. Pertanto, per un noto risultato di Huppert ([8], Hilfssatz 5); α induce una potenza su $P/\mho_1(P)$ e questo è abeliano. Osserviamo, in particolare che ciò esclude il caso $p = 2$.

Sia ora P un controesempio minimo; allora $\mho_1(P) \neq 1$ e P non è

([1]) Di questa proprietà, probabilmente ben nota, non ho trovato traccia nella letteratura, la sua validità e dimostrazione mi sono state comunicate da A. Caranti e F. Napolitani.

abeliano (v. la dimostrazione del citato Hilfssatz 5 in [8]), inoltre α induce su P/P' la potenza, poniamo r-esima, con $r \not\equiv 1 \pmod p$.

Sia $N = \gamma_3(P) = [P', P]$; se $N \neq 1$, allora per la minimalità di P, P/N è abeliano, il che è contraddittorio; dunque $N = 1$ e P è perciò di classe 2.

Siano ora $x, y \in P$ tali che $z = [x, y] \neq 1$; si ha allora, per opportuni $t, t' \in P' \leqslant Z(P)$:

$$(\circ) \qquad z^\alpha = [x, y]^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha] = [x^r t, y^r t'] = [x^r, y^r] = z^{r^2}$$

Dunque $L = \Omega_1(\langle z \rangle)$, che è contenuto nel centro di P, è α-invariante; per la scelta di P, P/L è perciò abeliano e quindi $L = P'$.

Poichè $|P'| = p \neq 2$ si ha, per ogni $g, h \in P$: $(gh)^p = g^p h^p [h, g]^{\binom{p}{2}} = g^p h^p$ e quindi $\mho_1(P) = \{x^p | x \in P\}$; poichè $z \in \mho_1(P)$ (infatti $\mho_1(P) \geqslant P'$) deve essere $z = w^p$ per qualche $w \in P$; pertanto $z^\alpha = (w^p)^\alpha = (w^\alpha)^p = (w^r t)^p$ con $t \in P'$ e quindi, essendo $|P'| = p$ si ha:

$$z^\alpha = (w^r)^p t^p = (w^r)^p = (w^p)^r = z^r .$$

Ciò è compatibile con $(\circ)$ solo se $z = 1$. Contraddizione.

Lemma 2. *Sia D un gruppo non abeliano che opera fedelmente sul p-gruppo abeliano elementare $V = V_1 \times V_2$, e irriducibilmente su V_i, $i = 1, 2$. Allora esiste $g \in V$ tale che $\langle g \rangle^D \underset{\text{def}}{=} \langle g^x | x \in D \rangle = V$.*

Dim. Considerati V_1 e V_2 come D-moduli su $GF(p)$, distinguiamo due casi.

1) V_1 e V_2 non sono D-isomorfi.

Supponiamo, con eventuali cambiamenti di indici, che $\dim(V_1) \geqslant \dim(V_2)$. Sia $n = \dim(V_1)$, $1 \neq t \in V_1$, $1 \neq h \in V_2$ e poniamo $g = th$. Poichè V_1 è D-irriducibile esistono $1 = y_1, \dots, y_n$ in D tali che, posto $t_i = t^{y_i}$, $\{t_1, \dots, t_n\}$ è una base di V_1. Posto $h_i = h^{y_i}$, supponiamo che $\{h_1, \dots, h_n\}$ non sia una base di V_2; allora possiamo supporre, dato che $\dim(V_2) \leqslant n$, $h_n = h_1^{a_1} \dots h_{n-1}^{a_{n-1}}$ per opportuni interi $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Chiaramente $\langle g \rangle^D \geqslant \langle t_i h_i | i = 1, \dots, n \rangle$ e quindi:

$$\langle g \rangle^D \ni \mu = t_n h_n (t_1 h_1)^{-a_1} \dots (t_{n-1} h_{n-1})^{-a_{n-1}} = t_n t_1^{-a_1} \dots t_{n-1}^{-a_{n-1}}$$

ed è $1 \neq \mu \in V_1$; essendo V_1 D-irriducibile, $\langle g \rangle^D \geqslant V_1$; poichè $g \notin V_1$ e V_2 è D-irriducibile, si ha $\langle g \rangle^D = V_1 \times V_2$.

Supponiamo, quindi, che $\{h_1, \dots, h_n\}$ sia una base di V_2, la posizione $\psi: t_i \mapsto h_i$ definisce quindi un isomorfismo tra V_1 e V_2, poichè questi non sono D-isomorfi, esiste $z \in D$ tale che (2):

$$(\circ) \qquad (t_1^z)\psi \neq (t_1\psi)^z = h_1^z\,.$$

Sia $t_1^z = t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$; poichè $(t_1^z)\psi = h_1^{r_1} \dots h_n^{r_n}$, è chiaro che $\langle g\rangle^D \ni t_1^z(t_1^z)\psi$, d'altra parte $\langle g\rangle^D \ni (t_1h_1)^z = t_1^z h_1^z$ e quindi $\langle g\rangle^D \ni (t_1^z h_1^z)^{-1} t_1^z (t_1^z)\psi = (h_1^z)^{-1}(t_1^z)\psi$ che per $(\circ)$ è un elemento non identico di V_2. Essendo V_2 D-irriducibile si ha perciò $\langle g\rangle^D \geqslant V_2$ e poichè $g \notin V_2$, si ha ancora $\langle g\rangle^D = V_1 \times V_2$.

2) V_1 e V_2 sono D-isomorfi.

In tal caso $C_D(V_1) = C_D(V_2) = 1$ (poichè D opera fedelmente su V). Per un risultato di Green (v. [4], th. 3.5.6) il numero di sottospazi di V che sono D-isomorfi è, in tal caso:

$$d = q^2 - 1/q - 1 = q + 1 \qquad \text{dove } q = |\mathrm{Hom}_D(V_1, V_1)|\,.$$

Poniamo $H = \mathrm{Hom}_D(V_1, V_1)$ e valutiamo $q = |H|$.

Sia $\Theta: D \to \mathrm{Hom}(V_1)$ il monomorfismo (moltiplicativo) di D in $\mathrm{Aut}(V_1) \subseteq \mathrm{Hom}(V_1)$; definito da $v(x\Theta) = v^x$, $\forall v \in V$, $\forall x \in D$.

Allora $H = \{\psi \in \mathrm{Hom}(V_1) | \psi(x\Theta) = (x\Theta)\psi, \forall x \in D\}$.

Poichè V_1 è D-irriducibile, H è un algebra con divisione di dimensione finita su $GF(p)$, dunque $q = p^r$ per qualche intero r, e, se H^* è il sottogruppo moltiplicativo di H, H^* è ciclico di ordine $p^r - 1$, inoltre $H^* \leqslant \mathrm{Aut}(V_1)$. Dato $\psi \in H^*$ definiamo $C_{V_1}(\psi) = \{v \in V_1 | v\psi = v\}$; $C_{V_1}(\psi)$ è sottospazio di V_1, inoltre dati $v \in C_{V_1}(\psi)$ e $x \in D$ si ha:

$$\big(v(x\Theta)\big)\psi \ (v\psi)(x\Theta) = v(x\Theta) \qquad \text{quindi } v^x = v(x\Theta) \in C_{V_1}(\psi)$$

dunque $C_{V_1}(\psi)$ è D-invariante e perciò $\psi = 1$ oppure $C_{V_1}(\psi) = \{0\}$. Pertanto $C_{H^*}(v) = 1$ per ogni $v \in V_1 \setminus \{0\}$ e quindi, poichè $|V_1 \setminus \{0\}| = p^n - 1$ (dove $n = \dim(V_1)$) si ha $p^r - 1 \leqslant p^n - 1$.

Supponiamo, per assurdo $r = n$, allora $|H^*| = |V_1 \setminus \{0\}|$ e quindi H^* è transitivo sugli elementi di $V_1 \setminus \{0\}$; essendo H^* ciclico, esso coincide con il proprio centralizzante in S_{p^n-1}, il gruppo di permutazioni su $p^n - 1$ oggetti (v. [7], II 3.1), e quindi a maggior ragione in $\mathrm{Aut}(V_1)$;

(2) Si noti che se $(t_1^z)\psi = (t_1\psi)^z$ per ogni z, allora $(t_i^z)\psi = (t_i\psi)^z$ per ogni $z \in D$, e quindi $(t^z)\psi = (t\psi)^z$ per ogni $t \in V_1$ e per ogni $z \in D$.

ma $(D)\Theta \leqslant C_{\mathrm{Aut}\,(V_1)}(H^*)$ e quindi $(D)\Theta \leqslant H^*$ il che è assurdo perchè $(D)\Theta \simeq D$ non è abeliano.

Dunque $|H| = p^r$ con $r < n$ e quindi d, il numero dei sottospazi di V che sono D-invarianti è $d = p^r + 1$. Siano $K_1, \ldots, K_d$ tali sottospazi, essi hanno tutti dimensione n e intersezione a due a due banale, quindi:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{d} K_i\right| = d(p^n - 1) + 1 = (p^r + 1)(p^n - 1) + \\ + 1 < (p^n + 1)(p^n - 1) + 1 = p^{2n} = |V|.$$

Ma allora esiste $g \in V$ tale che $g \notin K_i$ per ogni $i = 1, \ldots, d$ e perciò, poichè $\langle g \rangle^D$ è D-invariante, $\langle g \rangle^D = V$.

Il lemma che segue è un'ovvia generalizzazione di un enunciato di Hobby [6], in un lavoro sui gruppi in cui il normalizzante di ogni sottogruppo è normale.

LEMMA 3. *Sia G un gruppo finito, $x \in G$. Se $\langle x \rangle \lhd \langle x \rangle^G$ allora $\langle x \rangle^G$ è nilpotente di classe al più 2; se inoltre $|x| = p$, per qualche primo p, $\langle x \rangle^G$ è abeliano elementare.*

LEMMA 4. *Sia P un p-gruppo, p un primo, e D un p'-gruppo che opera su P in modo tale che, posto $G = PD$ sia $\langle g \rangle \lhd \langle g \rangle^G$ per ogni $g \in P$. Allora se $x \in D'$ opera come una potenza su $P/\Phi(P)$, x opera come una potenza su P. In particolare se x non opera trivialmente allora P è abeliano.*

DIM. Se x induce l'identità su $P/\Phi(P)$, allora x è l'identità su P. Supponiamo quindi che x non induca l'identità su $P/\Phi(P)$, allora per il lemma 1, è sufficiente provare che $\Phi(P) = \mho_1(P)$; cioè che $P/\mho_1(P)$ è abeliano. Procedendo per induzione su $|P|$, possiamo supporre $\mho_1(P) = 1$; e quindi P ha esponente p e, per il lemma 3, $\langle g \rangle^G$ è abeliano elementare per ogni $g \in P$.

Sia $\bar{P} = P/\Phi(P) = V_1/\Phi(P) \times \ldots \times V_n/\Phi(P) = \bar{V}_1 \times \ldots \times \bar{V}_n$ la riduzione di $\bar{P}$ in fattori D-irriducibili. Ovviamente $P = V_1 \ldots V_n$.

Sia $n = 1$ e si consideri $g \in P \setminus \Phi(P)$; $\langle g \rangle^G \Phi(P)$ è D-invariante, quindi $\langle g \rangle^G \Phi(P) = P$, perciò $\langle g \rangle^G = P$ e P è abeliano elementare.

Sia dunque $n > 1$; se proviamo che tutti i prodotti $V_i V_j$ sono abeliani, resta provato che P stesso è abeliano.

Sia $\tilde{D} = D/C_D(V_i V_j)$; $\tilde{D}$ non è abeliano perchè, se così fosse: $C_D(V_i V_j) \geqslant D' \geqslant \langle x \rangle$ mentre x induce una potenza non identica su

$\overline{V}_i \times \overline{V}_j$. Per il lemma 2, esiste dunque $\bar{g} \in \overline{V}_i \times \overline{V}_j$ tale che $\langle \bar{g} \rangle^G = \overline{V}_i \times \overline{V}_j$ cioè $\langle g\Phi(P) \rangle^D = \overline{V}_i \times \overline{V}_j$ e quindi $\langle g \rangle^G \Phi(P) = V_i V_j$. Ora $\Phi(V_i V_j)$ car $V_i V_j \lhd G$ e perciò $\Phi(V_i V_j) \lhd G$. Se $\Phi(V_i V_j) = 1$, allora $V_i V_j$ è abeliano. Altrimenti, per ipotesi induttiva, x induce una potenza non identica su $P/\Phi(V_i V_j)$ che risulta perciò abeliano, e quindi $\Phi(V_i V_j) = \Phi(P)$; pertanto $V_i V_j = \Phi(P)\langle g \rangle^G = \Phi(V_i V_j) \langle g \rangle^G$; ciò implica $V_i V_j = \langle g \rangle^G$ e quindi che $V_i V_j$ è abeliano elementare.

L'ultima affermazione discende da Hilfssatz 5 in [8].

Riportiamo ora alcune conseguenze di questo lemma che saranno utili nella prossima sezione.

COROLLARIO 1. *Sia $G = PD$, con P un p-sottogruppo normale di G e D un p'-gruppo tali che $\langle g \rangle \lhd \langle g \rangle^G$ per ogni $g \in P$; e sia $x \in D' \cap Z(D)$ con $|x| = q$ e $q | p-1$. Allora P è generato dall'insieme degli elementi $g \in P$ tali che $g^x = g^n$ per qualche intero n. Inoltre se λ è un intero, $1 \leqslant \lambda \leqslant p-1$ e $\lambda^q \equiv 1 \pmod p$, allora $P_\lambda = \{g \in P | g^x = g^n$ con $n \equiv \lambda \pmod p\}$ è un sottogruppo D-invariante di P. Se $\lambda \neq 1$, P_λ è abeliano.*

DIM. Dimostriamo la prima parte per induzione su $|P|$. Se $P/\Phi(P)$ non è D-irriducibile (per l'azione di coniugio di D su P) esistono, per Maschke, $\Phi(P) < H, K \lhd G$ tali che $HK = P$; per ipotesi induttiva H e K sono generati da elementi il cui coniugato tramite x è una loro potenza e quindi lo stesso vale per P. Sia quindi $P/\Phi(P)$ D-irriducibile; poichè $q | p-1$, il campo $GF(p)$ contiene tutte le radici q-esime dell'unità e quindi contiene le radici caratteristiche di x; poichè $x \in Z(D)$ e D opera irriducibilmente su $P/\Phi(P)$ (v. [4], lemma 2.2.1) x è uno scalare (una potenza) su $P/\Phi(P)$ e quindi, per il lemma 4, è un automorfismo potenza su P.

Siano ora λ e P_λ come da ipotesi e sia $T = P_\lambda$; siano poi $g \in P_\lambda$ e $y \in D$, poichè $x \in Z(D)$ si ha: $(g^y)^x = g^{xy} = (g^n)^y = (g^y)^n$ con $n \equiv \lambda \pmod p$, e quindi T è D-invariante; chiaramente poi x induce la potenza λ-esima su $T/\Phi(T)$ e dunque, per il lemma 4, x induce un automorfismo potenza su T e per ogni $h \in T$ è $h^x = h^n$ con $n \equiv \lambda \pmod p$, quindi $T \subseteq P_\lambda$ e perciò $T = P$.

Per rendere più lineari successive dimostrazioni conviene evidenziare un caso particolare.

COROLLARIO 2. *Nelle stesse ipotesi del corollario precedente, sia $p \neq 2$ e $|x| = 2$. Allora $[P, \langle x \rangle] = \{g \in P | g^x = g^{-1}\}$; in particolare $[P, \langle x \rangle]$ è abeliano.*

DIM. Poichè $|x| = 2$ è $[g, x]^x = [g, x]^{-1}$ per ogni $g \in P$, d'altra parte se $g^x = g^{-1}$ allora $[g, x] = g^{-1}g^x = g^{-2}$ ed essendo $p \neq 2$, si ha $g \in \in [P, \langle x \rangle]$. Dunque $[P, \langle x \rangle] = \langle I \rangle$ dove $I = \{g \in P | g^x = g^{-1}\}$, ma $I = P_{p-1}$ è sottogruppo di P e quindi $[P, \langle x \rangle] = I$.

LEMMA 5. *Nelle stesse ipotesi e notazioni del corollario 1, sia $p \neq 2$. Allora $\Omega_1(P_\lambda)$ normalizza ogni sottogruppo di P_μ con $\mu \neq \lambda$. Se $\lambda \neq 1$ allora $\Omega_1(P_\lambda) \leqslant Z(P)$.*

DIM. Siano $\lambda \neq \mu$ interi compresi tra 1 e $p-1$, $g \in \Omega_1(P_\lambda)$ e $h \in \in P_\mu$; allora $g^x = g^\lambda$ e $h^x = h^n$ con $n \equiv \mu \pmod p$; proviamo che g normalizza $\langle h \rangle$, resta così dimostrato che $\Omega_1(P_\lambda)$ normalizza ogni sottogruppo di P_μ. Consideriamo $\langle gh \rangle^G$. $\langle gh \rangle^G \ni g^r h^r$ per ogni intero r, infatti per $r = 1$ la cosa è banale, supposta vera per $r-1$ si ha: $\langle gh \rangle^G \ni gh(g^{r-1}h^{r-1})^h = g^r h^r$; inoltre $\langle gh \rangle^G \ni (gh)^x = g^\lambda h^n$ e quindi $\langle gh \rangle^G \ni \ni g^n h^n h^{-n} g^{-\lambda} = g^{n-\lambda}$, poichè g ha ordine p e $n \not\equiv \lambda \pmod p$ si ha $g \in \in \langle gh \rangle^G$; ma per ipotesi $\langle gh \rangle \lhd \langle gh \rangle^G$ e quindi g normalizza $\langle gh \rangle$.

Ora $H = \langle g, gh \rangle = \langle g, h \rangle$ è un p-gruppo con massimale ciclico $\langle gh \rangle$, essendo $p \neq 2$, si ha: $(gh)^p = g^p h^p = h^p$ e dunque $|h| = |hg|$, pertanto $\langle h \rangle$ è massimale in H e quindi g normalizza $\langle h \rangle$.

Ciò prova la prima asserzione.

Supponiamo ora $\lambda \neq 1$; poichè $g \in \Omega_1(P_\lambda)$ opera per coniugazione come un automorfismo potenza su P_μ, $\mu \neq \lambda$, sul quale x opera come una potenza omogenea, si ha $[g, x] \in C_G(P_\mu)$; ma $[g, x] = g^{-1}g^x = g^{\lambda-1}$, essendo $\lambda \neq 1$ è quindi $g \in C_G(P_\mu)$, pertanto $\Omega_1(P_\lambda) \leqslant C_P(P_\mu)$ per $\mu \neq \lambda$. D'altra parte, essendo $\lambda \neq 1$, P_λ è abeliano. Poichè l'unione dei P_v, $1 \leqslant v \leqslant p-1$ genera P si ottiene allora $\Omega_1(P_\lambda) \leqslant Z(P)$.

3. Gruppi $\mathfrak{B}_2$ risolubili.

Osserviamo, innanzi tutto, che ogni quoziente e ogni sottogruppo subnormale di un gruppo $\mathfrak{B}_n$ è anch'esso $\mathfrak{B}_n$. (Gaschütz [3] prova inoltre che se G è $\mathfrak{B}_1$ finito risolubile, allora ogni suo sottogruppo è $\mathfrak{B}_1$; un risultato analogo non vale però per i gruppi $\mathfrak{B}_2$; infatti il gruppo generale lineare $GL(2, 3)$ è $\mathfrak{B}_2$ mentre i suoi 2-sottogruppi di Sylow sono diedrali di ordine 16, e non sono $\mathfrak{B}_2$, vedi anche [9]).

Enunciamo ora, per comodità, due noti risultati sui gruppi $\mathfrak{B}_2$ dei quali faremo ampio uso nel seguito.

TEOREMA 1 (Heineken [5]). *Se tutti i sottogruppi ciclici del gruppo G sono subnormali di difetto al più 2, allora $\gamma_5(G) = \gamma_4(G)^3 = 1$.*

Dal fatto, ben noto, che $G^{(n)} \leqslant \gamma_{2^n}(G)$ segue immediatamente che un gruppo $\mathfrak{B}_2$ nilpotente N ha lunghezza derivata al più 2 se $3 \nmid |N|$, al più 3 altrimenti. Questa particolarità legata al primo 3 ci costringerà a trattare dei casi particolari. Abbiamo già osservato che non è noto se 4 sia la migliore limitazione della classe dei gruppi $\mathfrak{B}_2$ nilpotenti; in effetti non si sa se esistono 3-gruppi $\mathfrak{B}_2$ di classe esattamente 4.

TEOREMA 2 (McCaughan e Stonehewer [9]). *Sia G un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$, allora tutti i fattori principali di G evitati da* Fit(G) *sono di rango al più* 2.

Di questo teorema, oltre a utilizzare direttamente l'enunciato, faremo ripetutamente uso di una argomentazione contenuta nella dimostrazione originale, che, per comodità, riportiamo nel lemma che segue.

LEMMA 6. *Sia G un gruppo finito $\mathfrak{B}_2$, P un p-sottogruppo normale di G, x un p'-elemento di G tale che $\langle x\rangle P \lhd \lhd G$ e $[P, \langle x\rangle] \cap C_P(x) = 1$, e sia M un p'-sottogruppo di $\langle x\rangle^G$ contenente x; allora M normalizsa ogni sottogruppo di $C_P(x)$.*

DIM. Sia $D \leqslant C_P(x)$; poichè x è un p'-elemento e $P \lhd G$ si ha: $[P, \langle x\rangle]C_P(x) = P$ (v. [4], th. 5.3.5.) e quindi:

$$\langle x\rangle[P, \langle x\rangle]D \lhd \lhd P\langle x\rangle \lhd \lhd G\,,$$

essendo G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ si ha $\langle x\rangle[P, \langle x\rangle]D \lhd (\langle x\rangle[P, \langle x\rangle]D)^G$, in particolare $\langle x\rangle^G$, e quindi M, normalizza $\langle x\rangle[P, \langle x\rangle]D$. D'altra parte $\langle x\rangle P \lhd \lhd G$ e $M \leqslant \langle x\rangle^G$, dunque M normalizza $\langle x\rangle P$, da ciò segue che M normalizza $\langle x\rangle P \cap M = \langle x\rangle(P \cap M) = \langle x\rangle$, e dunque anche $C_P(x)$. Ma allora M normalizza:

$$C_P(x) \cap \langle x\rangle[P, \langle x\rangle]D = D\big(C_P(x) \cap \langle x\rangle[P, \langle x\rangle]\big) = D$$

dato che $C_P(x) \cap [P, \langle x\rangle] = 1$. Come si voleva.

LEMMA 7. *Sia $G = PQ$ un gruppo $\mathfrak{B}_2$, con $P \lhd G$ un p-gruppo, p primo, e Q un q-gruppo, q un primo diverso da p. Se $q \nmid p - 1$ allora $Q/C_Q(P)$ è abeliano.*

DIM. Osserviamo, innanzi tutto che, per ogni primo p, $q \neq p$ e $q \nmid p - 1$ implicano $q \neq 2$. Procediamo quindi per induzione su $|G|$.

Sia $\Phi(P) \neq 1$, $\bar{G} = G/\Phi(P)$, $\bar{Q} = Q\Phi(P)/\Phi(P)$ e $\bar{P} = P/\Phi(P)$, poichè $\bar{G}$ è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ si ha per ipotesi induttiva $\bar{Q}/C_{\bar{Q}}(\bar{P})$ abeliano. Ma essendo Q un p'-gruppo $C_{\bar{Q}}(\bar{P}) = C_Q(P)\Phi(P)/\Phi(P)$ e quindi $Q/C_Q(P) \cong \bar{Q}/C_{\bar{Q}}(\bar{P})$ è abeliano. Possiamo quindi supporre $\Phi(P) = 1$, cioè P abeliano elementare.

Supponiamo che esista $1 \neq H < P$ con $H \lhd G$. Allora, per Maschke, esiste un complemento K di H in P, con $K \lhd G$.

Ora $G/K = PQ/K = KHQ/K \cong QH/QH \cap K = QH$ e, analogamente, $G/H \cong QK$. Essendo isomorfi a quozienti di G, QH e QK sono gruppi $\mathfrak{B}_2$ e dunque, per ipotesi induttiva, si ha:

$$C_Q(H) \geqslant Q' \quad \text{e} \quad C_Q(K) \geqslant Q' \quad \text{quindi} \quad C_Q(P) = C_Q(H) \cap C_Q(K) \geqslant Q' .$$

Rimane solo il caso in cui P è normale minimo in G.

Sia $x \in Q$ tale che $C = C_P(x) \neq 1$. Essendo P abeliano si ha: $C \cap [P, \langle x \rangle] = 1$. Dato che $\langle x \rangle P \lhd \lhd G$ si ha, per il lemma 6, che $\langle x \rangle^Q$ normalizza ogni sottogruppo di C e pertanto opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza su C; poichè $q \nmid p-1$ ciò può avvenire solo se $\langle x \rangle^Q$ centralizza C; quindi $C = C_P(\langle x \rangle^Q)$ e $C \lhd G$. Essendo $C \neq 1$ e P normale minimo deve essere $C = P$ e quindi $x \in C_Q(P)$. Pertanto $Q/C_Q(P)$ opera come un gruppo di automorfismi privi di punti fissi su P, essendo $q \neq 2$ si conclude che $Q/C_Q(P)$ è ciclico.

Corollario 3. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ con* Fit (G) *un p-gruppo, per qualche primo p; allora i q-sottogruppi di Sylow di* $\mathrm{Fit}_2(G)$ *con $q \neq p$ e $q \nmid p-1$ sono abeliani.*

Dim. Sia Q un q-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{Fit}_2(G)$, $q \neq p$, allora Q Fit $(G) \lhd G$, quindi Q Fit (G) è $\mathfrak{B}_2$ e si applica il lemma precedente, tenendo conto che $C_Q(\mathrm{Fit}\,(G)) = 1$.

La dimostrazione del prossimo lemma ricalca quella data da Mc Caughan e Stonehewer del risultato da noi riportato come teorema 2.

Lemma 8. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito risolubile,* Fit $(G) = P$ *un p-gruppo per qualche primo p; allora i q-fattori principali di G con $q \nmid p-1$ che giacciono tra P e* $\mathrm{Fit}_2(G)$ *sono ciclici.*

Dim. Possiamo supporre P abeliano elementare, infatti è ben noto che:

$$\mathrm{Fit}\,(G/\Phi(P)) = \mathrm{Fit}\,(G)/\Phi(P) = P/\Phi(P) .$$

Procediamo per assurdo; sia M/N un q-fattore principale di G, $q \nmid p-1$, con $P \leqslant N < M \leqslant \mathrm{Fit}_2(G)$ e $|M|$ minimo per essere M/N non ciclico. Chiaramente $M/P \leqslant Q/P$ dove Q/P è il q-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{Fit}_2(G)/P$.

Sia $x \in M \setminus N$, allora $P\langle x\rangle^G = M$, infatti sussiste il G-isomorfismo: $M/N = P\langle x\rangle^G N/N \cong P\langle x\rangle^G/(P\langle x\rangle^G \cap N)$ e, per la minimalità di M, è $M = P\langle x\rangle^G$.

Usiamo ora il soprassegno per indicare elementi e sottogruppi modulo P. Per il corollario 3, $\bar{M}$ è abeliano e quindi l'applicazione $\bar{x} \mapsto \bar{x}^q$ induce un G-isomorfismo di $\bar{M}/\Omega_1(\bar{M})$ su $\Phi(\bar{M})$. Per il teorema di Jordan-Hölder e la minimalità di M, è $\Omega_1(\bar{M}) = \bar{M}$, cioè $\bar{M} = M/P$ è abeliano elementare. Sia M_1 un complemento di P in M, $N_1 = N \cap M_1$ e sia infine M_0 un complemento di N_1 in M_1; $M_0 \cong M/N$ è un gruppo abeliano non ciclico che opera fedelmente su P, si ha quindi $P = \prod_{1 \neq x \in M_0} C_P(x)$ $(\circ)$ e, per ogni $x \in M_0$ si ha $[P, \langle x\rangle] \cap C_P(x) = 1$; inoltre, per quanto precedentemente osservato, $\langle x\rangle^G P = M$, chiaramente quindi $M_1 \leqslant \langle x\rangle^G$, e per il lemma 6, M_1 opera come un gruppo di automorfismi potenza sul p-gruppo abeliano elementare $C_P(x)$. Poichè $q \nmid p-1$ allora M_1 centralizza $C_P(x)$; ma questo avviene per ogni $x \in M_0$ e quindi, per $(\circ)$, M_1 centralizza P. Assurdo.

L'assumere che i q-fattori siano contenuti in $\mathrm{Fit}_2(G)$ serve, in realtà, solo per facilitare la dimostrazione; più avanti (teorema 3) sarà chiaro che tutti i q-fattori principali con $q \nmid p-1$ evitati da P sono ciclici.

Prima di proseguire ricordiamo che se H è un gruppo finito, $\mathrm{Fit}(H)$ coincide con l'intersezione dei centralizzanti dei fattori principali di H. È ovvio che, qualora $\mathrm{Fit}(H)$ sia noto è sufficiente considerare i fattori principali in esso contenuti; in particolare $H/\mathrm{Fit}(H)$ è un prodotto subdiretto di gruppi di automorfismi dei fattori principali di H contenuti in $\mathrm{Fit}(H)$.

LEMMA 9. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito risolubile; allora il quoziente $\mathrm{Fit}_3(G)/\mathrm{Fit}_2(G)$ è abeliano.*

DIM. (Dove scriviamo $F_i = \mathrm{Fit}_i(G)$ e $F = F_1$).

Per quanto sopra ricordato e per il teorema 2, F_3/F_2 è un prodotto subdiretto di gruppi lineari nilpotenti di grado al più 2; per un fatto ben noto (vedi p. es. Dixon [2], th. 1.4.B) tali gruppi sono abeliani o hanno 2-componente non identica; pertanto F_3/F_2 è abeliano se e solo se tale è il suo 2-sottogruppo di Sylow.

Sia G un controesempio minimo, allora $G = Q$ dove Q/F_2 è il 2-sottogruppo di Sylow di F_3/F_2 (infatti, essendo $Q \lhd G$, Q è $\mathfrak{B}_2$ ed è $F_2 = \mathrm{Fit}_2(Q)$). Supponiamo che G abbia due sottogruppi normali minimi distinti M_1 ed M_2, e siano $L_i/M_i = \mathrm{Fit}_2(G/M_i)$, $i = 1, 2$; per la scelta di G, i quozienti G/L_i sono abeliani, ma facilmente si verifica che $L_1 \cap L_2 = F_2$ e quindi che G/F_2 è abeliano, contro la scelta di G. Dunque G ha un unico sottogruppo normale minimo e, in particolare, F è un p-gruppo per qualche primo p.

Poichè $\mathrm{Fit}\,(G/\Phi(F)) = F/\Phi(F)$ la minimalità di G comporta $\Phi(F) = 1$ e quindi F è abeliano elementare. Chiaramente F_2/F è un p'-gruppo; osserviamo poi che F non è un 2-gruppo, perchè, se così fosse, per il lemma 8 tutti i fattori principali di G/F sarebbero ciclici e quindi G/F_2 abeliano. Pertanto G/F è un p'-gruppo. Per Maschke F si decompone allora nel prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G, poichè G ha un unico sottogruppo normale minimo, questo coincide con F.

Sia K un complemento di F in G, H il $2'$-sottogruppo di $\mathrm{Fit}\,(K)$ (chiaramente $H \neq 1$) e D un 2-sottogruppo di Sylow di K. Ovviamente $HD = K$ e $\bar{D} = D/C_D(H) \cong K/\mathrm{Fit}\,(K) \cong G/F_2$ non è abeliano. Scelto $\bar{x} = xC_D(H), x \in K$ un elemento di $\bar{D}' \cap Z(\bar{D})$ con $|\bar{x}| = 2$; essendo K un gruppo $\mathfrak{B}_2$, per il corollario 2 [3], $\bar{x}$ opera per coniugazione come l'inversione su $[\bar{H}, \langle\bar{x}\rangle]$ dove $\bar{H} = HC_D(H)$ e quindi x opera come l'inversione su $T = [H, \langle x\rangle]$; inoltre dato che $\bar{x} \in Z(\bar{D})$, T è D-invariante, ma notoriamente $T \lhd H$ e quindi $T \lhd HD = K$; ovviamente $T \neq 1$. Sia V sottogruppo normale minimo di K contenuto in T. È $rg(V) > 1$, perchè se $rg\,(V) = 1$ allora $D/C_D(V)$ è abeliano, quindi: $C_D(V) \geqslant D'C_D(H) \geqslant \langle x\rangle$ contro il fatto che x induce l'inversione su V.

Ora, poichè $(|V|, |F|) = 1$ e V non è ciclico, esiste $g \in V$ tale che $C = C_F(g) \neq 1$. È $C_V(C) < V$, perchè se fosse $C_V(C) = V$ allora $C = C_F(V)$ e quindi $C \lhd G$ e, poichè F è normale minimo, $C = F$ il che è assurdo dato che $C_G(F) = F$.

Ora $\langle g\rangle F \lhd \lhd G$ poichè V è normale minimo in K; V è un p'sottogruppo di $\langle g\rangle^G$, essendo poi F abeliano si ha $[F, \langle x\rangle] \cap C = 1$ e dunque, per il lemma 6, V opera come un gruppo di automorfismi potenza su C; poichè questi sono centrali nel gruppo degli automorfismi di C e chiaramente C è normalizzato da x, si ha $[V, x] \leqslant C_V(C) < V$. Contraddizione, perchè essendo x l'inversione su V, si ha $[V, x] = V$.

[3] Il corollario 2 è stato provato per H un p-gruppo, $p \neq 2$; ma è chiaro che nulla cambia se H è un $2'$-gruppo nilpotente.

TEOREMA 3. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito risolubile; allora $G/\mathrm{Fit}_2(G)$ è supersolubile e metabeliano. In particolare G ha lunghezza di Fitting al più* 4.

DIM. Poichè, per il lemma 9, $\mathrm{Fit}_3(G)/\mathrm{Fit}_2(G)$ è abeliano, è sufficiente provare che i fattori principali di G giacenti tra $\mathrm{Fit}_2(G)$ e $\mathrm{Fit}_3(G)$ sono tutti ciclici.

Ora $\mathrm{Fit}_2(G) = \cap\, C_G(R/S)$ al variare di R/S tra i fattori principali di G tali che $S \geqslant \mathrm{Fit}(G)$, quindi, per il teorema 2, fattori di rango al più 2. Osserviamo che se H è un sottogruppo di $GL(2, p)$ e N è sottogruppo normale abeliano di H, allora i fattori principali di H contenuti in N sono ciclici. Infatti, posto $S = SL(2, p)$ è $N \cap S \lhd H$; inoltre $N/(N \cap S) \cong NS/S$ è ciclico e d'altra parte $N \cap S$ è un sottogruppo abeliano di S e dal teorema 2.8.3 in [4], segue subito che $N \cap S$ è ciclico, per Jordan-Hölder si conclude.

Torniamo al nostro caso e procediamo per assurdo: sia M/N fattore principale di G, $\mathrm{Fit}_2(G) \leqslant N < M \leqslant \mathrm{Fit}_3(G)$ con $|M|$ minimo perchè M/N non sia ciclico. Senz'altro esiste un fattore principale di G, R/S con $S \geqslant \mathrm{Fit}(G)$ tale che $M \nleqslant C = C_G(R/S)$ e quindi $C \cap M < M$. Ora: $(M \cap C)N/N \cong_G M \cap C/(N \cap C)$; poichè $(M \cap C)N \lhd G$ e $N \leqslant (M \cap C)N < M$, la minimalità di M comporta $(M \cap C)N = N$ e perciò $MC/NC \cong M/(M \cap NC) = M/(M \cap C)N = M/N$. Ora, MC/NC è fattore principale di G/C, ma G/C è un gruppo lineare di grado al più 2 e MC/C è abeliano (dato che, essendo $M \leqslant \mathrm{Fit}_3(G)$, $M/\mathrm{Fit}_2(G)$ è abeliano), dunque, per quanto osservato $MC/NC \cong M/N$ è ciclico. Contraddizione.

LEMMA 10. *Sia G un gruppo finito $\mathfrak{B}_2$ metanilpotente. Se i 3-sottogruppi di Sylow di G sono al più metabeliani, allora $G^{(3)} = 1$; altrimenti $G^{(4)} = 1$.*

DIM. Supponiamo che i 3-sottogruppi di Sylow di G siano al più metabeliani e procediamo per induzione su $|G|$; possiamo quindi supporre che $P = \mathrm{Fit}(G)$ sia un p-gruppo per qualche primo p, e che G possieda un solo sottogruppo normale minimo.

Allora $G = PD$ con $D \cong G/P$ un p'-gruppo nilpotente e $C_D(P) = 1$. Se D è abeliano allora per il teorema 1 e per l'ipotesi sui 3-Sylow di G si ha $G^{(3)} = 1$. Ciò comprende, per il corollario 3, il caso $p = 2$. Sia dunque $p \neq 2$ e D non abeliano, allora, ancora per il corollario 3, possiamo scegliere $x \in D' \cap Z(D)$ tale che $|x| = q$ e $q | p - 1$, q un primo. Al variare di λ intero, $1 \leqslant \lambda \leqslant p - 1$ e $\lambda^q \equiv 1 \pmod p$ siano: $P_\lambda = \{g \in P \mid g^x = g^n$ con $n \equiv \lambda \pmod p\}$.

Per il corollario 1, i P_λ sono sottogruppi D-invarianti di P. Inoltre, per il lemma 5, se $\lambda \neq 1$ allora $\Omega_1(P_\lambda) \leqslant Z(P)$ e dunque $\Omega_1(P_\lambda) \lhd G$. Ovviamente $\Omega_1(P_\lambda) \cap \Omega_1(P_\mu) = 1$ se $\lambda \neq \mu$, e poichè supponiamo che G abbia un unico sottogruppo normale minimo, deve essere $P_\lambda \neq 1$ per un solo valore $\lambda \neq 1$. Chiamiamo T tale P_λ. Ci siamo quindi ridotti al caso $P = TC$ con $C = P_1 = C_P(x)$, $T \lhd G$, T abeliano sul quale x opera come una potenza non identica. (Ovviamente quindi $C \cap T = 1$). Ancora per il lemma 5, $\Omega_1(C)$ opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza di T; essendo quest'ultimo abeliano si ha che $\Omega_1(C)/C_{\Omega_1(C)}(T)$ è ciclico. Supponiamo $L = C_{\Omega_1(C)}(T) \neq 1$, essendo $L \lhd C$ si ha allora $R = L \cap Z(C) \neq 1$; ma allora $R = \Omega_1(Z(P\langle x \rangle)) \lhd G$ dato che R car $P\langle x \rangle \lhd G$, inoltre $R \cap T = 1$, contro l'ipotesi che G abbia un solo sottogruppo normale minimo. Quindi $L = 1$ e $\Omega_1(C)$ è ciclico, essendo $p \neq 2$ si conclude che C è ciclico.

Consideriamo ora il quoziente G/T; poichè $P/T \simeq C$ è ciclico, $G'T/T$ centralizza P/T; in particolare $D'T/T$ centralizza P/T; poichè per l'ipotesi sui 3-sottogruppi di G e per il teorema 1, D' è abeliano ed è $D'T/T \cap P/T = 1$ si ha che $D'P/T = G'P/T$ è abeliano e quindi $G^{(2)} \leqslant T$. Essendo T abeliano si ha finalmente $G^{(3)} = 1$.

Con argomenti del tutto analoghi si prova che $G^{(4)} = 1$, senza alcuna ipotesi sui 3-sottogruppi di G.

Il teorema 3 e il lemma 10 consentono di concludere immediatamente che se G è un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$ e $3 \nmid |\mathrm{Fit}_2(G)|$ allora $G^{(5)} = 1$; la dimostrazione dello stesso risultato nel caso generale ci obbliga ad ulteriori osservazioni.

LEMMA 11. *Se G è un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$, allora il quoziente $G/\mathrm{Fit}(G)$ ha lunghezza derivata al più* 4.

DIM. Proviamo infatti che se H è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ coi fattori principali di rango al più 2 e $H/\mathrm{Fit}(H)$ è supersolubile e metabeliano (tale è per i teoremi 2 e 3 il quoziente $G/\mathrm{Fit}(G)$ se G è $\mathfrak{B}_2$ risolubile) allora $H^{(4)} = 1$.

Dato che tutte le ipotesi sono ereditate dai quozienti, procedendo per induzione si può supporre che $\mathrm{Fit}(H)$ sia un p-gruppo per qualche primo p.

Se $p \neq 3$ allora $(\mathrm{Fit}(H))^{(2)} = 1$ per il teorema 1, ed essendo $H/\mathrm{Fit}(H)$ metabeliano si ha $H^{(4)} = 1$.

Se $p = 3$, poichè i fattori principali di H sono di rango al più 2, $H/\mathrm{Fit}(H)$ si immerge nel prodotto diretto di sottogruppi di $GL(2,3)$ e quindi, dovendo essere un $3'$-gruppo, $\mathrm{Fit}_2(H)/\mathrm{Fit}(H)$ è un 2-gruppo;

poichè $H/\mathrm{Fit}(H)$ è supersolubile si ha allora $H = \mathrm{Fit}_2(H)$ e quindi, per il lemma 10, $H^{(4)} = 1$.

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato principale.

TEOREMA 4. *Sia G un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$, allora G ha lunghezza derivata al più* 5.

DIM. Per induzione su $|G|$. Supponiamo quindi che $\mathrm{Fit}(G) = P$ sia un p-gruppo, per qualche primo p.

Se $p \neq 3$, sia $R = G^{(2)}$. Per il teorema 3, R è metanilpotente, inoltre per il lemma 11, $R^{(2)} = G^{(4)} \leqslant \mathrm{Fit}(G)$, dunque gli eventuali 3-sottogruppi di R sono al più metabeliani. Si ha allora, per il lemma 10, $G^{(5)} = R^{(3)} = 1$.

Sia dunque $p = 3$. Sia D un 2-sottogruppo di Sylow di G e $\bar{D} = DP/P$ (ovviamente $\bar{D} \simeq D$), sia inoltre $\bar{F}_2 = \mathrm{Fit}_2(G)/P = \mathrm{Fit}(G/P)$.

Supponiamo D non abeliano. Per il lemma 8, i $2'$-fattori principali di G/P contenuti in $\bar{F}_2$ sono ciclici, quindi $\bar{D}'$ centralizza il $2'$-sottogruppo di Hall $\bar{Q}$ di $\bar{F}_2$, in particolare $Z(\bar{D}) \cap \bar{D}'$ centralizza $\bar{F}_2 \leqslant \bar{Q}\bar{D}$, ciò implica $Z(\bar{D}) \cap \bar{D}' \leqslant \bar{F}_2$. Sia $x \in Z(D) \cap D'$, $|x| = 2$, allora $\bar{x} = xP \in \bar{F}_2$ e quindi $\langle \bar{x} \rangle \lhd \lhd \bar{G}$, cioè $\langle x \rangle P \lhd \lhd G$.

Sia $M/P = \bar{M} = \langle \bar{x} \rangle^{\bar{G}} = \langle x \rangle^G P/P$, $\bar{M}$ è un 2-gruppo abeliano elementare per il lemma 3, dato che $|\bar{x}| = 2$; sia $M_0 = M \cap D$. Poichè $x \in Z(D) \cap D'$, per il corollario 2, x opera per coniugazione come l'inversione su $[P, \langle x \rangle] \neq 1$; pertanto $P = [P, \langle x \rangle] C_P(x)$ con $[P, \langle x \rangle] \cap C_P(x) = 1$; dato che, chiaramente, $M_0 \leqslant \langle x \rangle^G$, il lemma 6 consente allora di concludere che M_0 opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza su $C_P(x)$.

Poichè $[P, \langle x \rangle]$ è abeliano, se tale è anche $C_P(x)$, allora P è metabeliano e quindi, per il lemma 10, $\mathrm{Fit}_2(G)^{(3)} = 1$; per il teorema 3, si ha perciò $G^{(5)} = 1$.

Se $C_P(x)$ non è abeliano allora è centralizzato da M_0; in tal caso $[P, \langle x \rangle]$ è il residuo nilpotente di $M = PM_0 \lhd G$ e quindi $[P, \langle x \rangle] \lhd G$.

Si procede quindi come nella dimostrazione del lemma 10, il supporre, com'è lecito, che G possieda un solo sottogruppo normale minimo comporta allora $C_P(x)$ ciclico, mentre esso era supposto non abeliano.

Rimane il caso in cui D è abeliano.

Sia A/B un 2-fattore principale di G/P. Se A/B è ciclico allora $G = C_G(A/B)$, altrimenti, per il teorema 2, $rg(A/B) = 2$ e $G/C_G(A/B)$ si immerge in $GL(2, 2) \simeq S_3$; ma i 2-sottogruppi di Sylow di G/P sono per assunzione abeliani (essendo P un $2'$-sottogruppo, essi sono infatti isomorfi a D) quindi $G/C_G(A/B)$ è un $2'$-gruppo, pertanto esso è banale oppure ciclico di ordine 3. In ogni caso $C_G(A/B) \geqslant G'$; poichè ciò avviene per tutti i $2'$-fattori principali di G/P (che, in virtù del lemma 8 e del teorema 3, sono ciclici), si ha: $G' \leqslant \cap\, C_G(V/U)$ al variare di V/U tra i fattori principali di G/P e quindi $G' \leqslant \mathrm{Fit}_2(G)$. Poichè, per il lemma 10, $(\mathrm{Fit}_2(G))^{(4)} = 1$ si ottiene, in conclusione, $G^{(5)} = 1$.

Nota. Mentre questo articolo era in fase di stampa è apparso su Arch. Math., **40** (1983), pp. 193-199, l'articolo di S. K. Mahdavianary: *A special class of three-Engel groups*. In esso, in particolare, si conclude la dimostra zione che se N è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ nilpotente allora $\gamma_4(N) = 1$. Ciò semplifica- nella maniera ovvia la dimostrazione del teorema 4 e rende a tal scopo superfluo il lemma 11, così come osservato prima del suo enunciato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Best - O. Taussky, *A class of groups*, Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A., **47** (1942), pp. 55-62.

[2] J. D. Dixon, *The structure of linear groups*, London, 1971.

[3] W. Gaschütz, *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist*, J. Reine Ang. Math., **198** (1957), pp. 87-92.

[4] D. Gorenstein, *Finite groups*, New York, 1968.

[5] H. Heineken, *A class of three-Engel groups*, J. Algebra, **17** (1971), pp. 341-345.

[6] C. Hobby, *Finite groups with normal normalizers*, Can. J. Math., **20** (1968), pp. 1256-1260.

[7] B. Huppert, *Endliche gruppen*, Berlin, 1967.

[8] B. Huppert, *Zur Sylowstruktur auflosbarer gruppen*, Arch. Math., **12** (1961), pp. 161-169.

[9] D. J. McCaughan - S. E. Stonehewer, *Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two*, Arch. Math., **35** (1980), pp. 56-60.

[10] D. J. S. Robinson, *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60** (1964), pp. 21-38.

[11] D. J. S. Robinson, *Wreath products and indices of subnormality*, Proc. London Math. Soc., **17** (1967), pp. 157-270.

[12] J. E. Roseblade, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 402-412.

[13] G. Zacher, *Caratterizzazione dei t-gruppi finiti risolubili*, Ricerche Matematiche, **1** (1952), pp. 287-294.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 gennaio 1983.