RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

S. ZAIDMAN

Analogue d’un Lemme de Kohn et Nirenberg

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 71 (1984), p. 249-255

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__249_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 71 (1984)

Analogue d'un Lemme de Kohn et Nirenberg (*).

S. Zaidman (**)

1. Introduction.

Le but de cette note est celui d'établir un résultat similaire à l'inégalité (A.8) dans l'article [1], en effectuant ainsi un passage de l'espace $L^2 = H^0$ à un espace de Sobolev arbitraire H^s. Tout comme dans l'Appendix de [1], Théorème A.3, nous prenons comme modèle le Lemme 9.1 de [1] et son schéma de démonstration, mais sans la partie finale. On s'inspire aussi des très courtes indications de la démonstration du Théorème A.3, mais notre raisonnement, exposé ici avec ampleur de détails reste néanmoins différent. Aussi le résultat qu'on obtient contient un terme additionnel (par rapport à l'inégalité A.8) dont l'apparition reste pour nous un peu « mystérieuse ». Enfin, il y a lieu à dire, nous ne sommes pas arrivés à compléter les détails absents dans la démonstration du Théorème A.3 exposée par Kohn et Nirenberg et aussi, si l'on pose $s = 0$ dans notre résultat plus loin on ne retrouve pas (A.8) sans lui ajouter un term correctif. Comme nous ne connaissons aucune autre source où on pourrait lire quelque chose sur les recherches exposées dans l'Annexe du travail fondamental [1], nous estimons que le papier qu'on présente ici peut avoir de l'intérêt pour un groupe assez large de mathématiciens.

2. Ce paragraphe sera très court. On se ramène pour la plupart des notations et définitions au travail de Kohn et Nirenberg (on pour-

(*) Travail subentionné par le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada.

(**) Indirizzo dell'A.: 924 Pratt Avenue, Outremont (Quebec), H2V2VI Canada.

rait consulter aussi notre article à paraître [4]). On considère des symboles $a(x, \xi)$ comme dans (A.1) vérifiant la condition (A.2) *où pour un nombre réel fixé s, la fonction* $(1+|\eta|^2)^{(2|s|+1)/4}k(\eta) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, et aussi les conditions (A.3) et (A.4).

On démontrera le suivant analogue au Lemme 9.1 de [1]:

THÉORÈME. *Supposons que la fonction $a(x, \xi)$ vérifie les conditions* (A.1)-(A.4) *dans* [1] *et que les fonctions u et v dans $S(\mathbf{R}^n)$ ont les supports situés à distance positive un de l'autre. Alors, pour l'opérateur $\mathcal{A}$ de la forme* (3.7) *et pour la fonction* $\varphi_1(|\eta|) = \sup_\tau \varphi(|\tau|)/(1+|\tau-\eta|)$ *a lieu l'inégalité*

$$|(\mathcal{A}u, v)| \leqslant c\{\|\varphi(|D|)^{\frac{1}{2}}u\|_{H^s}\|\varphi_1(|D|)^{\frac{1}{2}}v\|_{H^{-s}} + \|u\|_{H^{s-1}}\|v\|_{H^{-s}}\}\,.$$

3-I. La démonstration est assez longue et délicate; elle sera ici divisée en plusieurs étapes. Au début on introduit la fonction J comme dans le lemme 9.1 de [1] et ensuite le « symbole corrigé » $b(x, \xi) = (1+|\xi|^2)^{-m}a(x, \xi)$ où m est un entier $> n$. Aussi l'on pose $w = (I-\Delta)^m u$ et on définit les fonctions

$$G(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{J}(\xi-\tau)\big(b(\infty, \tau) - b(\infty, \xi)\big)\,d\tau\,\tilde{w}(\xi)$$

et

$$H(\xi) = (2\pi)^{-n}\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} \tilde{J}(\eta-\tau)\big(\tilde{b}'(\xi-\eta, \tau) - \tilde{b}'(\xi-\eta, \eta)\big)\tilde{w}(\eta)\,d\eta\,d\tau\,.$$

On voit que:

$$(\mathcal{A}u, v) = -\Big[\int_{\mathbf{R}^n} G(\xi)\bar{\tilde{v}}(\xi)\,d\xi + \int_{\mathbf{R}^n} H(\xi)\bar{\tilde{v}}(\xi)\,d\xi\Big]\,.$$

On a maintenant le

LEMME 1. *La majoration*

$$|G(\xi)| \leqslant C|\tilde{w}(\xi)|\{(1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}} + (1+|\xi|^2)^{-m}\sqrt{\varphi(|\xi|)}\sqrt{\varphi_1(|\xi|)} \quad \textit{est vraie}\,.$$

En effet on a

$$(1)\qquad |G(\xi)| \leqslant C|\tilde{w}(\xi)|\int_{\mathbf{R}^n} |\tilde{J}(\xi-\tau)|\,|b(\infty, \tau) - b(\infty, \xi)|\,d\tau\,.$$

Aussi (voir [2], p. 369) il vient que

$$(2)\qquad |b(\infty,\xi)-b(\infty,\tau)|\leqslant|a(\infty,\tau)|\,|(1+|\tau|^2)^{-m}-(1+|\xi|^2)^{-m}|+$$
$$+(1+|\xi|^2)^{-m}\cdot|a(\infty,\tau)-a(\infty,\xi)|\leqslant C_1(1+|\xi-\tau|^2)^{m+1}\cdot$$
$$\cdot(1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}}+(1+|\xi|^2)^{-m}\cdot|a(\infty,\tau)-a(\infty,\xi)|\,.$$

De (A.3) on déduit (pour $x\to\infty$) que $|a(\infty,\tau)-a(\infty,\xi)|\leqslant\leqslant(1+|\xi-\tau|)\varphi(|\xi|)$, et aussi que $|a(\infty,\tau)-a(\infty,\xi)|\leqslant(1+|\xi-\tau|)\cdot\cdot\varphi(|\tau|)$.

Remarquons maintenant que si l'on a: $0<A<B_1$, $0<A<B_2$ alors $\sqrt{A}<\sqrt{B_1}$, $\sqrt{A}<\sqrt{B_2}$, et $A<\sqrt{B_1B_2}$. Par conséquent

$$(3)\qquad |a(\infty,\xi)-a(\infty,\tau)|<(1+|\xi-\tau|)\sqrt{\varphi(|\xi|)}\sqrt{\varphi(|\tau|)}\leqslant$$
$$\leqslant C(1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi(|\xi|)}\sqrt{\varphi(|\tau|)}\,.$$

et donc aussi

$$(4)\qquad |b(\infty,\xi)-b(\infty,\tau)|<C(1+|\xi-\tau|^2)^{m+1}(1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}}+$$
$$+C(1+|\xi|^2)^{-m}(1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi(|\xi|)\varphi(|\tau|)}=$$
$$=C(1+|\xi-\tau|^2)^{m+1}(1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}}+C(1+|\xi|^2)^{-m}(1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\varphi(|\xi|)}(1+|\xi-\tau|)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi(|\tau|)}(1+|\xi-\tau|)^{\frac{1}{2}}\,.$$

A cause de l'égalité:

$$\varphi_1(|\eta|)=\sup_{\tau\in\mathbf{R}^n}(1+|\tau-\eta|)^{-1}\varphi(|\tau|)\,,$$

on déduit que $\varphi(|\tau|)/(1+|\xi-\tau|)\leqslant\varphi_1(|\xi|)$ et ensuite on obtient l'inégalité

$$(5)\qquad |b(\infty,\tau)-b(\infty,\xi)|\leqslant C\{(1+|\xi-\tau|^2)^{m+1}(1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}}+$$
$$+(1+|\xi|^2)^{-m}(1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi(|\xi|)}\sqrt{\varphi_1(|\xi|)}(1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\}\,.$$

Cette dernière inégalité, introduite dans (1) nous donne:

$$(6)\qquad |G(\xi)| \leqslant C|\tilde{w}(\xi)| \cdot \int_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{J}(\xi-\tau)|(1+|\xi-\tau|^2)^{m+1} \cdot (1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}}\, d\tau +$$

$$+ C|\tilde{w}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-m}\sqrt{\varphi(|\xi|)}\sqrt{\varphi_1(|\xi|)}\int_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{J}(\xi-\tau)|(1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{3}{4}}\, d\tau =$$

$$= C|\tilde{w}(\xi)|\{(1+|\xi|^2)^{-m-\frac{1}{2}} + (1+|\xi|^2)^{-m}\sqrt{\varphi(|\xi|)}\sqrt{\varphi_1(|\xi|)}\}.$$

Le lemme 1 est donc démontré.

3-II. On établit ici le suivant

Lemme 2. *L'inégalité*

$$|H(\xi)| \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\tau)[\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|)1 + |\xi-\eta|^2)^{\frac{1}{2}}\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|\xi|) +$$

$$+ (1+|\eta|^2)^{-\frac{1}{2}}]|\tilde{u}(\eta)|\, d\eta \qquad \textit{est vraie.}$$

Preuve. On part de: $\tilde{b}'(\lambda,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-m}\tilde{a}'(\lambda,\xi)$ et on obtient

$$\tilde{b}'(\lambda,\eta) - \tilde{b}'(\lambda,\tau) = (1+|\eta|^2)^{-m}[\tilde{a}'(\lambda,\eta) - \tilde{a}'(\lambda,\tau)] +$$

$$+ [(1+|\eta|^2)^{-m} - (1+|\tau|^2)^{-m}]\tilde{a}'(\lambda,\tau)$$

et ensuite

$$(7)\qquad |\tilde{b}'(\lambda,\eta) - \tilde{b}'(\lambda,\tau)| \leqslant (1+|\eta|^2)^{-m}(1+|\eta-\tau|)\varphi(|\eta|)k(\lambda) +$$

$$+ Ck(\lambda)(1+|\eta-\tau|^2)^{m+1}(1+|\eta|^2)^{-m-\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent on peut déduire de la définition de $H(\xi)$, les majorations

$$(8)\qquad |H(\xi)| \leqslant C\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |\mathcal{J}(\eta-\tau)|(1+|\eta|^2)^{-m} \cdot$$

$$\cdot (1+|\eta-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\varphi(|\eta|)k(\xi-\eta)|\tilde{w}(\eta)|\, d\eta\, d\tau +$$

$$+ C\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |\mathcal{J}(\eta-\tau)|k(\xi-\eta)(1+|\eta-\tau|^2)^{m+1}(1+|\eta|^2)^{-m-\frac{1}{2}}|\tilde{w}(\eta)|\, d\eta\, d\tau$$

$$= C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{J}(\eta-\tau)|(1+|\eta-\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\,d\tau\Big)(1+|\eta|^2)^{-m}\varphi(|\eta|)|\tilde{w}(\eta)|\,d\eta +$$

$$+ C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{J}(\eta-\tau)|(1+|\eta-\tau|^2)^{m+1}\,d\tau\Big)(1+|\eta|^2)^{-m-\frac{1}{2}}|\tilde{w}(\eta)|\,d\eta =$$

$$= C_1\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-m}\varphi(|\eta|)|\tilde{w}(\eta)|\,d\eta +$$

$$+ C_2\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-m-\frac{1}{2}}|\tilde{w}(\eta)|\,d\eta\,.$$

Aussi on a:

$$\varphi(|\eta|) = \varphi(|\eta|)(1+|\xi-\eta|)^{-1}(1+|\xi-\eta|) \leqslant \varphi_1(|\xi|)(1+|\xi-\eta|)$$

et $\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|) \leqslant C\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|\xi|)(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{1}{4}}$.

En introduisant cela dans (8) on obtient que

$$(9)\quad |H(\xi)| \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-m}\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|)\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|\xi|)(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{1}{4}}|\tilde{w}(\eta)|\,d\eta +$$

$$+ C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-\frac{1}{2}}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta =$$

$$= C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|)(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{1}{4}}\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|\xi|)|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta +$$

$$+ C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-\frac{1}{2}}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3-III. Le théorème sera une conséquence des deux lemmes qui suivent:

LEMME 3. *On a l'inégalité*

$$(10)\qquad \Big|\int_{\mathbf{R}^n} G(\xi)\bar{v}(\xi)\,d\xi\Big| \leqslant C\{\|u\|_{H^{s-1}}\|v\|_{H^{-s}} + \|\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|)u\|_{H^s}\|\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|D|)v\|_{H^{-s}}\,.$$

En effet, d'après le lemme 1, on obtient que

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^n} G(\xi)\bar{v}(\xi)\,d\xi\Big| \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}|\tilde{u}(\xi)||\tilde{v}(\xi)|\,d\xi +$$

$$+ C\int_{\mathbf{R}^n} |\tilde{u}(\xi)|\sqrt{\varphi(|\xi|)}|\tilde{v}(\xi)|\sqrt{\varphi_1(|\xi|)}\,d\xi =$$

$$= C\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2-\frac{1}{2}}|\tilde{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\tilde{v}(\xi)|\,d\xi +$$

$$+ C\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2}\sqrt{\varphi(|\xi|)}|\tilde{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\sqrt{\varphi_1(|\xi|)}|\tilde{v}(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C\{\|u\|_{H^{s-1}}\|v\|_{H^{-s}} + \|\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|)u\|_{H^s}\|\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|D|)v\|_{H^{-s}}\}$$

c'est-à-dire (10).

Finalement on a le

LEMME 4. *La majoration*

$$(11)\qquad \Big|\int_{\mathbf{R}^n} H(\xi)\bar{\tilde{v}}(\xi)\,d\xi\Big| \leqslant C\{\|u\|_{H^{s-1}}\|v\|_{H^{-s}} + \|\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|)u\|_{H^s}\|\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|D|)v\|_{H^{-s}}\}$$

est vraie.

En effet, par le lemme 2, on trouve

$$(12)\qquad (1+|\xi|^2)^{s/2}|H(\xi)| \leqslant C\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|\xi|)\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|)\cdot$$

$$\cdot(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2+\frac{1}{2}}(1+|\eta|^2)^{s/2}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta +$$

$$+ C\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}(1+|\eta|^2)^{(s-1)/2}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta\,.$$

D'un autre côté on a

$$(13)\qquad \Big|\int_{\mathbf{R}^n} H(\xi)\bar{\tilde{v}}(\xi)\,d\xi\Big| = \Big|\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2}H(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\bar{\tilde{v}}(\xi)\,d\xi\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2}|H(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\tilde{v}(\xi)|\,d\xi\,,$$

et par conséquent on déduit que

$$(14)\qquad \Big|\int_{\mathbf{R}^n} H(\xi)\bar{\tilde{v}}(\xi)\,d\xi\Big| \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|)(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2+\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot(1+|\eta|^2)^{s/2}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta\Big)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|\xi|)|\tilde{v}(\xi)|\,d\xi\, +$$

$$+\, C\int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}(1+|\eta|^2)^{(s-1)/2}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta\Big)\cdot$$

$$\cdot(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\tilde{v}(\xi)|\,d\xi\,.$$

Il résulte sans difficulté que la première intégrale à droite est majorée par

$$(15)\qquad C\Big\|\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)\varphi^{\frac{1}{2}}(|\eta|)(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2+\frac{1}{4}}(1+|\eta|^2)^{|s|/2}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta\Big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_\xi)}\times$$

$$\times\Big(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}\varphi_1(|\xi|)|\tilde{v}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\text{Lemme 5.1 de } [4[3]]) \leqslant$$

$$\leqslant \|(1+|\lambda|^2)^{|s|/2+\frac{1}{4}}k(\lambda)\|_{L^1}\|\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|)u\|_{H^s}\|\varphi_1^{\frac{1}{2}}(|D|)v\|_{H^{-s}}$$

tandis que la seconde est plus petite que

$$(16)\qquad \Big\|\int_{\mathbf{R}^n} k(\xi-\eta)(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}(1+|\eta|^2)^{(s-1)/2}|\tilde{u}(\eta)|\,d\eta\Big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_\xi)}\times$$

$$\times\Big(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}|\tilde{v}(\xi)|^2)\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|(1+|\lambda|^2)^{|s|/2}k(\lambda)\|_{L^1}\cdot\|u\|_{H^{s-1}}\|v\|_{H^{-s}}\,.$$

Cela termine la démonstration du théorème.

REFERENCES

[1] J. J. Kohn - L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), pp. 269-305.

[2] S. Zaidman: *Pseudo-differential operators*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **92** (1972), pp. 345-399.

[3] S. Zaidman, *Certaines classes d'opérateurs pseudo-différentiels*, Journ. Math. Anal. Appl., **30** (1970), pp. 522-563.

[4] S. Zaidman, *Remarks on Kohn-Nirenberg's pseudo-differential operators of order zero*, Advances in Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory (Editor: G. I. Zapata, Marcel Dekker, U.S.A., to appear).

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 Gennaio 1983.