RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. CARICATO

# Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in relatività generale. Nota II

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 71 (1984), p. 239-247

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__239_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 71 (1984)

# Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in Relatività generale. Nota II.

G. Caricato (*)

## 1. Introduzione.

In una recente Nota col medesimo titolo, inserita nel volume dedicato al prof. G. Grioli in occasione del suo 70° compleanno [1], ho iniziato lo studio sistematico dell'evoluzione relativistica di un sistema continuo a trasformazioni reversibili $S$ rispetto a un determinato riferimento fisico. Scelta la congruenza $\{L\}$ delle linee d'universo delle particelle del continuo medesimo per rappresentare un riferimento fisico, e introdotto in un intorno di ogni particella $P$ un riferimento (locale) di moto incipiente

$$R_P\colon \{\tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho \equiv \tilde{\partial}_\varrho P,\ \varrho = 1, 2, 3,\ \boldsymbol{e}_4 = \partial_4 P\}$$

ho precisato in qual modo è possibile definire nella generica configurazione $\mathcal{C}$ di $S$ uno stress come campo di tensori doppi simmetrici, puramente spaziale, dello spaziotempo $V_4$. Ho indicato con $X^{hk}$ le componenti controvarianti in coordinate euleriane di tale stress, e con $Y^{hk}$ le analoghe componenti in coordinate lagrangiane. Ricordo anche che le coordinate lagrangiane introdotte hanno il pregio di essere adattate al riferimento fisico $\{L\}$.

Poi, limitatamente ai continui dentro i quali fra elementi contigui non avvengono scambi termici, ho scritto il corrispondente tensore

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico G. Castelnuovo, Città Universitaria, Piazzale A. Moro, 00185 Roma.

energetico materiale, ed ho imposto ad esso la condizione di conservazione, che ora richiamo in coordinate lagrangiane (cfr. [1] (3.2)):

$$\nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} \equiv \nabla_k \left[ c^2 \mu \left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \overset{*}{u}{}^h \overset{*}{u}{}^k + Y^{hk} \right] = 0\,. \tag{1.1}$$

La proiezione spaziale di questa equazione mi ha permesso di dedurre l'equazione vettoriale indefinita (cfr. [1], (3.13))

$$\mu\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \boldsymbol{A} = -\, \overset{*}{C}_\tau Y^{\tau\varrho}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \tilde{\nabla}_\tau Y^{\tau\varrho} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho \qquad \forall P \in \mathcal{C} \tag{1.2}$$

che ho anche chiamato l'*equazione fondamentale della meccanica relativistica dei continui*, nonchè le condizioni al contorno (cfr. [1], (3.21))

$$Y^{h\tau} \tilde{n}_\tau = \overset{*}{f}{}^h(Q) \qquad \forall Q \in \partial\mathcal{C} \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{f}(Q)$ essendo la proiezione spaziale del 4-vettore $\boldsymbol{F}(Q)$ che rappresenta la 4-forza agente sul generico evento $Q$ della frontiera $\partial\mathcal{C}$ della configurazione $\mathcal{C}$.

## 2. Equazione simbolica della meccanica relativistica dei continui.

Tenendo presenti l'equazione fondamentale (1.2) e le condizioni al contorno (1.3), introduciamo i campi vettoriali

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{V}(P) \equiv -\,\mu\left(1 + \dfrac{w}{c^2}\right) c^2 \overset{*}{C}{}^\varrho\, \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \tilde{\nabla}_\sigma\, Y^{\varrho\sigma} \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \overset{*}{C}_\lambda Y^{\lambda\varrho} \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho & \forall P \in \mathcal{C} \\ \boldsymbol{W}(Q) \equiv \boldsymbol{f} - \Phi^\varrho \tilde{n}_\varrho & \forall Q \in \partial\mathcal{C} \end{array} \right. \tag{2.1}$$

e prendiamo in esame il funzionale

$$J(\boldsymbol{z}) \equiv \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{z}\, d\mathcal{C} + \int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{z}\, d\,\partial\mathcal{C} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{z}$ essendo un arbitrario campo vettoriale regolare definito in $\mathcal{C}$. In virtù dell'equazione (1.2) e delle condizioni al contorno (1.3) $J(\boldsymbol{z})$ è nullo comunque sia scelto il campo di vettori $\boldsymbol{z}$; viceversa se il funzionale $J(\boldsymbol{z})$ risulta nullo per ogni scelta del campo di vettori regolari $\boldsymbol{z}$, necessariamente sussistono le equazioni

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{V}(P)=0 & \forall P \in \mathcal{C} \\ \boldsymbol{W}(Q)=0 & \forall Q \in \partial\mathcal{C}\,. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

La dimostrazione di questo risultato è immediata, come nel caso classico, procedendo per assurdo e sfruttando la continuità dei vettori $\boldsymbol{V}(P)$ e $\boldsymbol{W}(Q)$ nei rispettivi campi di esistenza (cfr. per es. [2], cap. $V$, § 1). Se sostituiamo in (2.2) a $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ le corrispondenti espressioni (2.1), e teniamo conto delle identità (cfr. per es. [3], II.3, IV.2)

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{\partial}_\varrho \log\sqrt{\overset{*}{\gamma}} = \varGamma_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\sigma}\,, \qquad \tilde{\partial}_\varrho \tilde{\boldsymbol{e}}_\tau = \varGamma_{\varrho}{}^{\lambda}{}_{\tau}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_\lambda \\ \dfrac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho) = \tilde{\nabla}_\varrho Y^{\varrho\tau}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_\tau \end{array}\right. \tag{2.4}$$

l'equazione

$$J(\boldsymbol{z}) = 0 \tag{2.5}$$

assume la forma

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{z}) \equiv -\int_{\mathcal{C}}\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} - \int_{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho)\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} + \\ -\int_{\mathcal{C}}\overset{*}{C}_\lambda Y^{\lambda\varrho}\,\tilde{z}_\varrho\,d\mathcal{C} + \int_{\partial\mathcal{C}}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{z}\,d\,\partial\mathcal{C} - \int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\tilde{n}_\varrho\cdot\boldsymbol{z}\,d\,\partial\mathcal{C} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tenendo conto inoltre della trasformazione seguente (cfr. [3], III.4.)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho)\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\boldsymbol{z})\,d\mathcal{C} - \int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\tilde{\partial}_\varrho\boldsymbol{z}\cdot d\mathcal{C} = \\ = -\int_{\partial\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\boldsymbol{z}\,\tilde{n}_\varrho\,d\,\partial\mathcal{C} - \int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\tilde{\partial}_\varrho\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C}\,, \end{aligned}$$

l'equazione (2.6) diventa

$$(2.7) \qquad J(\boldsymbol{z}) \equiv -\int_{\mathcal{C}} \mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\Phi}^{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} +$$

$$-\int_{\mathcal{C}} \overset{*}{C}_{\lambda} Y^{\lambda\sigma}\tilde{z}_{\varrho}\,d\mathcal{C} + \int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{z}\,d\,\partial\mathcal{C} = 0\,.$$

Attribuiamo ora a $\boldsymbol{z}$ il significato di un arbitrario spostamento infinitesimo

$$(2.8) \qquad \boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{u}\,dy^4 + \tilde{d}P = \overset{*}{u}{}^4\,\partial_4 P\cdot dy^4 + dy^{\tau}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_{\tau}$$

e costatiamo quale forma assume l'equazione scalare (2.7). A tale scopo esaminiamo innanzitutto come si trasforma il 2° integrale che compare in (2.7) in virtù della simmetria del tensore stress $Y^{rs}$: otteniamo

$$(2.9) \qquad \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\Phi}^{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} Y^{\varrho\lambda}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} Y^{\varrho\lambda}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\lambda}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z})\,d\mathcal{C}\,;$$

attribuendo a $\boldsymbol{z}$ l'espressione (2.8) veniamo ad avere

$$(2.10) \qquad Y^{\varrho\sigma}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\sigma}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}) =$$

$$= Y^{\varrho\sigma}[\boldsymbol{e}_{\varrho}\cdot\overset{*}{u}{}^4\,\tilde{\partial}_{\sigma}\partial_4 P + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\overset{*}{u}{}^4\,\tilde{\partial}_{\varrho}\,\partial_4 P]\,dy^4 + Y^{\varrho\sigma}[\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\sigma}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\tau} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\tau}]\,dy^{\tau}\,.$$

Poichè valgono le identità

$$(2.11) \qquad \tilde{\partial}_{\sigma}\partial_4 P\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho} = \partial_4\tilde{\partial}_{\sigma}P\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\,,$$

l'espressione (2.10) diventa

$$(2.12) \qquad Y^{\varrho\sigma}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\sigma}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}) = 2(Y^{\varrho\sigma}\,\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\,\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\cdot dy^4 + Y^{\varrho}{}_{\lambda}\,\tilde{\Gamma}_{\varrho}{}^{\lambda}{}_{\tau}\,dy^{\tau})\,;$$

pertanto l'equazione (2.7) assume la forma

$$-\int_{\mathcal{C}} \mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right) A\cdot \delta P\, d\mathcal{C} + dy^4 \int_{\mathcal{C}} Y^{\varrho\sigma} \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\, d\mathcal{C} + \\ + \int_{\mathcal{C}} Y_\lambda{}^{\varrho}\, \Gamma_\varrho{}^\lambda{}_\tau\, dy^\tau\, d\mathcal{C} - \int_{\mathcal{C}} Y_\lambda{}^\varrho\, \overset{*}{C}_\varrho\, dy^\lambda\, d\mathcal{C} + \int_{\partial\mathcal{C}} f\cdot \delta P\, d\,\partial\mathcal{C} = 0\,. \tag{2.13}$$

Nell'equazione (2.13) cui siamo pervenuti possiamo attribuire ad ognuno degli integrali presenti un preciso senso fisico relativo:

$$\partial L^{(m)} \equiv -\int_{\mathcal{C}} \mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right) A\cdot \delta P\, d\mathcal{C} \tag{2.14}$$ *lavoro elementare delle forze d'inerzia*;

$$\partial L^{(f)} \equiv \int_{\mathcal{C}} f\cdot \delta P\, d\mathcal{C} \tag{2.15}$$ *lavoro elementare delle forze superficiali*;

$$\partial L^{(i)} \equiv dy^4 \int_{\mathcal{C}} Y^{\varrho\sigma} \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\, d\mathcal{C} \tag{2.16}$$ *lavoro elementare di deformazione delle forze intime*;

$$\partial L^{(c)} \equiv \int_{\mathcal{C}} Y^\varrho{}_\lambda\, \Gamma_\varrho{}^\lambda{}_\tau\, dy^\tau\, d\mathcal{C} \tag{2.17}$$ *lavoro elementare complementare*;

$$\partial L^{(r)} \equiv -\int_{\mathcal{C}} Y^\varrho_\lambda\, \overset{*}{C}_\varrho\, dy^\lambda\, d\mathcal{C} \tag{2.18}$$ *lavoro elementare delle forze d'interazione*.

Di conseguenza l'equazione (2.13) può essere scritta nella forma seguente:

$$\partial L^{(m)} + \partial L^{(i)} + \partial L^{(c)} + \partial L^{(r)} + \partial L^{(f)} = 0\,; \tag{2.19}$$

la chiameremo l'*equazione simbolica della meccanica relativistica dei continui.*

## 3. Sistemi a trasformazioni reversibili: equazioni costitutive.

Se teniamo conto del contributo dato dall'equazione (2.19) all'analisi del lavoro delle forze intime in una trasformazione infinitesima di un sistema continuo a trasformazioni reversibili, siamo indotti a tradurre il 1° principio della Termodinamica per il generico elemento $C$ di $\mathfrak{C}$, nel riferimento locale di moto incipiente $R_P$, nella seguente equazione:

$$E\mu\,\partial q\cdot dC = \mu\, dy^4 \mathfrak{L}_u u\cdot dC + Y^{\varrho\tau}\mathfrak{L}_u \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}\, dy^4\, dC \tag{3.1}$$

ove $\partial q$ indica la quantità di calore assorbito (in senso algebrico) dall'unità di massa del corpo nel passaggio da una configurazione ad una infinitamente prossima, $\mathfrak{L}_u u\cdot dy^4$ esprime la corrispondente variazione di energia interna e

$$\partial l^{(i)} \equiv Y^{\varrho\tau}\mathfrak{L}_u \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}\, dy^4$$

il corrispondente lavoro di deformazione delle forze intime per unità di volume. Poichè abbiamo ammesso che il corpo $S$ sia a trasformazioni reversibili, vale per esso la relazione

$$\frac{\partial q}{T} = \mathfrak{L}_u s\cdot dy^4\,; \tag{3.2}$$

di conseguenza per la corrispondente variazione di energia libera

$$\mathcal{F} = u - EsT$$

deduciamo da (3.1) l'equazione

$$\mu\,\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\mathcal{F} = -\,Y^{\varrho\tau}\,\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\,\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} - E\mu s\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4 T\,. \tag{3.3}$$

Supposta nota l'energia libera $\mathcal{F}$, come funzione caratteristica della struttura del corpo $S$, l'equazione (3.3) mostra la dipendenza di $\mathcal{F}$ dalla variabile evolutiva $y^4$, in ogni evento $P$ di $\mathfrak{C}$, per il tramite delle caratteristiche lagrangiane di deformazione $\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}$ e della temperatura assoluta $T$. Pertanto l'equazione (3.3), scritta nella forma

$$\mu\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}\cdot\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\,\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}\,\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4 T\right] = -\,Y^{\varrho\tau}\,\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\,\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} - E\mu s\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4 T \tag{3.3'}$$

consente di dedurre le relazioni

$$Y^{\varrho\tau} = -\,\mu\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}\,,\qquad s = -\,\frac{1}{E}\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}\,. \tag{3.4}$$

Come nel caso classico, il potenziale termodinamico $\mathcal{F}$ deve verificare il postulato di Helmholtz perchè abbia senso fisico, e deve perciò soddisfare la limitazione

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2} < 0 \,. \tag{3.5}$$

Se, al contrario, supponiamo nota l'energia interna specifica $u$, ed esprimiamo la dipendenza di $u$ dalla variabile $y^4$ per il tramite delle $\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}$ e dell'entropia specifica $s$, per variazioni infinitesime di $u$ lungo le linee di corrente, da (3.1) e (3.2) deduciamo l'equazione

$$\overset{*}{u}{}^4 \partial_4 u \cdot dy^4 = -\frac{1}{\mu} Y^{\varrho\tau} \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} \cdot dy^4 + E T \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 s \cdot dy^4 \tag{3.6}$$

donde seguono, come da (3.3), le relazioni

$$Y^{\varrho\tau} = -\mu \frac{\partial u}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \,, \qquad T = \frac{1}{E} \frac{\partial u}{\partial s} \,. \tag{3.7}$$

Analogamente a ciò che avviene nel caso classico, l'energia interna specifica $u$ deve soddisfare la limitazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} > 0 \,. \tag{3.8}$$

A questo punto ricordiamoci delle formule (2.17) cui siamo pervenuti nella Nota [1], che per comodità riscriviamo:

$$Y^{hr} = \left(\delta_\varrho^h - \delta_4^h \frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta_\tau^r - \delta_4^r \frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right) Y^{\varrho\tau} . \tag{3.9}$$

Sostituendo in esse alle $Y^{\varrho\tau}$ le corrispondenti espressioni assegnate dalle relazioni (3.4) o (3.7) dedotte poc'anzi, possiamo attribuire alle caratteristiche lagrangiane dello stress $Y^{hk}$ le rispettive forme

$$Y^{hk} = -\mu \left(\delta_\varrho^h - \delta_4^h \frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta_\tau^k - \delta_4^k \frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \quad \text{per trasformazioni isoterme;} \tag{3.10}$$

$$Y^{hk} = -\mu \left(\delta_\varrho^h - \delta_4^h \frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta_\tau^k - \delta_4^k \frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right) \frac{\partial u}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \quad \text{per trasformazioni isoentropiche.} \tag{3.11}$$

OSSERVAZIONE. Le equazioni costitutive (3.10), (3.11) ci permettono di completare l'analisi dell'equazione (3.30) ottenuta in [1], che qui riscriviamo:

$$\mu \overset{*}{u}^4 \partial_4 w = -\tfrac{1}{2} Y^{\varrho\tau} \mathfrak{L}_u \overset{*}{\gamma}_{\varrho\tau} = - Y^{\varrho\tau} \overset{*}{u}^4 \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} . \tag{3.12}$$

Ad essa eravamo pervenuti considerando la proiezione temporale dell'equazione di conservazione (3.2)

$$\nabla_k \overset{*}{T}^{hk} = 0 .$$

In virtù delle equazioni costitutive (3.10) o (3.11), valide per un sistema continuo a trasformazioni reversibili, possiamo sostituire in (3.12) alle $Y_{\varrho\tau}$ le espressioni

$$Y^{\varrho\tau} = -\mu \frac{\partial w}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \tag{3.13}$$

intendendo $w$ coincidente con $\mathcal{F}$ nelle trasformazioni isoterme e con $u$ nelle trasformazioni adiabatiche. Ne consegue l'identità

$$\mu \overset{*}{u}^4 \partial_4 w = \mu \overset{*}{u}^4 \frac{\partial w}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}{\partial y^4} = \mu \overset{*}{u}^4 \frac{\partial w}{\partial y^4} . \tag{3.14}$$

Pertanto la proiezione temporale (3.12) nel caso di un sistema continuo a trasformazioni reversibili si riduce a una identità.

## 4. Qualche cenno sul problema di evoluzione.

Nel dedurre l'equazione fondamentale (3.3) nella Nota [1] e l'equazione simbolica (2.19) nonchè le equazioni costitutive (3.10), (3.11) in questa Nota, abbiamo supposto che la struttura metrica dello spazio tempo $V_4$ e il campo di vettori $u^h$ fossero noti. Ma in realtà struttura metrica di $V_4$, riferimento fisico $\{L\}$ e leggi finite di evoluzione del sistema $S$ sono intimamente connessi fra loro sì che la conoscenza effettiva delle leggi finite di evoluzione del corpo $S$ implica la conoscenza del campo di vettori $u^h$ e della metrica di $V_4$, e viceversa.

Pertanto la risoluzione del problema di evoluzione del corpo $S$ in Relatività generale esige che accanto alle equazioni evolutive stabilite sia posto il sistema di equazioni gravitazionali einsteiniane; e il complesso di equazioni atte a studiare l'evoluzione del continuo $S$ viene ad essere così il seguente:

$$
(4.1)\quad \begin{cases} \overset{*}{R}_{hk} - \dfrac{1}{2} R \overset{*}{g}_{hk} = -\chi \left[ c^2 \mu \left( 1 + \dfrac{w}{c^2} \right) \overset{*}{u}_h \overset{*}{u}_k + Y_{hk} \right], \\ \qquad\qquad [\mu(c^2 + w)\,\delta_\varrho^\tau + Y_\varrho^\tau]\, \overset{*}{u}{}^4 \nabla_4 \overset{*}{u}_\tau = -\tilde{\nabla}_\tau Y_\varrho{}^\tau, \\ Y^{\varrho\tau} = -\mu \dfrac{\partial w}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}, \quad \mu \sqrt{\dfrac{\overset{*}{\gamma}}{m}} = \overset{*}{\mu}, \quad \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} = \dfrac{1}{2} (\overset{*}{\gamma}_{\varrho\tau} - m_{\varrho\tau}) . \end{cases}
$$

Tenendo presente che la configurazione di riferimento dev'essere supposta nota, e che quindi sia la densità $\mu^*$ sia il tensore $m_{hk}$ sono da ritenere assegnati, come è da supporre assegnata la funzione energètica $w$, caratteristica della struttura materiale del corpo, le incognite essenziali presenti nel sistema di equazioni (4.1) sono il tensore metrico spaziale $\overset{*}{\gamma}_{hk}(y)$ e il campo di vettori $\overset{*}{u}_h(y)$.

Siamo così giunti a disporre di tutto ciò che serve per formulare correttamente il problema di Cauchy per lo studio dell'evoluzione di un continuo a trasformazioni reversibili. Tale argomento sarà l'oggetto di una prossima Nota.

## BIBLIOGRAFIA


[1] G. Caricato, *Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in Relatività generale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **68** (1982).

[2] A. Signorini, *Lezioni di Fisica Matematica*, anno accad. '52-'35, Veschi, Roma.

[3] G. Caricato, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, anno accad. '81-'82, Ist. Mat. G. Castelnuovo, Roma.


Manoscritto pervenuto in redazione il 23 dicembre 1982.