RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ELISABETTA BAROZZI

Il problema di Plateau in domini illimitati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 70 (1983), p. 89-98

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__89_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 70 (1983)

Il problema di Plateau in domini illimitati.

ELISABETTA BAROZZI (*)

Sia $\Omega \subset R^n$ un aperto con $\partial\Omega$ lipschitziana, sia $\Gamma \subset \partial\Omega$ e sia $V \in \in (0, H_n(\Omega))$. In questo lavoro consideriamo il problema

Minimizzare il funzionale dell'area

$$\mathcal{F}(E) = \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega} |\varphi_E - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} \tag{1}$$

nella classe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_V = \{E \subset \Omega \colon H_n(E) = V\}. \tag{2}$$

Qui, come al solito, abbiamo indicato con H_k la misura di Hausdorff k-dimensionale in R^n (vedi H. Federer [4], pagina 171). φ_E è la funzione caratteristica dell'insieme E, cioè

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

mentre $D\varphi_E$ è il gradiente di φ_E nel senso delle distribuzioni e $|D\varphi_E|$ è la sua variazione totale, i.e.

$$\int_A |D\varphi_E| = \sup \left\{ \int \varphi_E(x) \cdot \operatorname{div} g(x) \, dx, \ g \in C_0^1(A; R^n), \qquad |g(x)| \leqslant 1, \ \forall x \in A \right\}$$

per $A \subset R^n$ aperto.

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Trento.

La quantità $\int_A |D\varphi_E|$ si chiama *perimetro di E in A* (vedi E. De Giorgi [3], E. Giusti [5], M. Miranda [8]).

È ben noto (vedi E. Giusti [5], M. Miranda [9]), che se $\int_E |D\varphi_E| < < +\infty$ allora φ_E ha una traccia in $L^1_{\text{loc}}(\partial\Omega)$, che continueremo a chiamare, con abuso di notazione, φ_E.

Il problema (1)-(2) si risolve facilmente nel caso in cui $H_n(\Omega) < < +\infty$, grazie alla semicontinuità inferiore del funzionale $\mathcal{F}$ rispetto alla convergenza $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ed al ormai classico teorema di compattezza in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ per gli insiemi di perimetro equilimitato (vedi [3], [5], [8]).

La situazione diventa più complessa se $H_n(\Omega) = +\infty$, perchè in questo caso il passaggio al limite in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ non preserva in generale il vincolo di volume $H_n(E) = V$.

Un primo esempio di questa situazione si ha quando $\Omega = R^n$ (e quindi $\partial\Omega$ e Γ sono vuoti). Il primo teorema di esistenza di minimo per il problema (1)-(2) in tale situazione fu dimostrato da E. De Giorgi in [2]. Una dimostrazione leggermente diversa si trova in E. Gonzalez - G. Greco [6].

Lo strumento fondamentale per la dimostrazione dell'esistenza di minimo (che di fatto è una sfera di misura V) in tale situazione è un procedimento di simmetrizzazione che conduce ad assicurare che la precedente compattezza $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ è in realtà $L^1(R^n)$ sulle successioni minimizzanti. Tale procedimento di simmetrizzazione non è però applicabile in situazioni più generali. Tuttavia, in questo lavoro vedremo come dalla proprietà isoperimetrica della sfera (cioè, dalla risoluzione del problema (1)-(2) nella particolare situazione $\Omega = R^n$) si possa ottenere un teorema molto generale di esistenza e regolarità di minimo per il problema (1)-(2).

Facciamo le seguenti ipotesi:

(3) Γ è un insieme limitato.

(4) Esiste una sfera $B \subset \Omega$ con $H_n(B) = V$.

Mentre l'ipotesi (3) non sembra essenziale e dovrebbe essere una questione puramente tecnica sostituirla con l'ipotesi $H_{n-1}(\Gamma) < +\infty$, l'ipotesi (4) è necessaria, come mostra il seguente

Esempio. Sia $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset R^n$, dove $\{B_j\}_j$ è una famiglia disgiunta di sfere con

$$H_n(B_j) = V - \frac{V}{2^j}.$$

Sia $\Gamma = \emptyset$. Consideriamo la successione $\{E_j\}_j \subset \mathcal{E}$ definita da

$$E_j = B_j \cup F_j \qquad (j \geqslant 2)$$

dove F_j è una sfera di misura $V/2^j$ contenuta in B_1. È chiaro che

$$\mathcal{F}(E_j) \downarrow n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n} .$$

(Qui $\omega_n = H_n(\{x \in R^n\colon |x| \leqslant 1\})$ e quindi $n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n}$ è il perimetro di una sfera di misura V).

D'altra parte, dalla proprietà isoperimetrica della sfera, è chiaro che

$$\mathcal{F}(E) > n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n} , \qquad \forall E \in \mathcal{E} .$$

Quindi in questo caso non esiste minimo per il problema (1)-(2). (Si noti che in questo caso $E_j \xrightarrow{j \to +\infty} \emptyset$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$).

Osservazione 1. Notiamo che le condizioni (3), (4) assicurano l'esistenza di insiemi $E \in \mathcal{E}$ tali che $\mathcal{F}(E) < +\infty$; basta infatti prendere $E = B$. Si ha

$$\mathcal{F}(B) \leqslant n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n} + H_{n-1}(\Gamma) < +\infty .$$

La dimostrazione dell'esistenza di minimo per il problema (1)-(2) con le ipotesi (3), (4) si farà secondo il seguente schema:

a) Per ogni intero positivo j, sia

$$\Omega_j = \{x \in \Omega\colon |x| < j\} .$$

Chiaramente esiste j_0 tale che

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_j \supset B \\ \Gamma \supset \partial\Omega_j \end{array}\right\} \quad \text{per ogni } j \geqslant j_0 .$$

b) Per $j \geqslant j_0$, sia E_j minimo (non unico in generale) del problema

$$\text{(1')} \qquad \text{minimizzare} \left\{ \int_{\Omega_j} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_E - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} \right\}$$

nella classe

$$\mathcal{E}_j = \{E \subset \Omega_j \colon H_n(E) = V\} . \tag{2'}$$

Come già osservato, poichè $H_n(\Omega_j) < +\infty$, non ci sono problemi riguardo all'esistenza di E_j.

c) Esiste $j_1 > j_0$ tale che, per ogni $j \geqslant j_1$ esiste $r_j \colon j_0 \leqslant r_j \leqslant j_1$ tale che

$$\int_{|x|=r_j} \varphi_{E_j}\, dH_{n-1} = 0 .$$

d) Da *c*) segue che, per ogni $j \geqslant j_1$ esiste $\tilde{E}_j \subset \Omega_{r_j}$, $\tilde{E}_j \in \mathcal{E}$ con

$$\mathcal{F}(\tilde{E}_j) \leqslant \mathcal{F}(E_j) .$$

Questo ci permette di sostituire la successione $\{E_j\}_j$ di minimi per i problemi (1')-(2') con la successione di minimi $\{\tilde{E}_j\}_j$ tutti contenuti nello stesso insieme limitato Ω_{j_1}.

e) Dalla proprietà di minimo degli $\tilde{E}_j$ si ha che essi hanno perimetro equilimitato in Ω. Tenendo allora conto di *d*), posso supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione, che esiste $E_0 \subset \mathcal{E}$ tale che

$$\tilde{E}_j \xrightarrow{j \to +\infty} E_0 \quad \text{in } L^1(\Omega) .$$

f) Dalla semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}$ e dalla proprietà di minimo degli insiemi approssimanti $\tilde{E}_j$ si vede facilmente che E_0 minimizza $\mathcal{F}$ tra tutti gli insiemi limitati di $\mathcal{E}$. Ne segue allora che E_0 minimizza $\mathcal{F}$ su tutto $\mathcal{E}$.

Le difficoltà per svolgere questo programma risiedono nei punti *c*) e *d*).

Per dimostrare *c*) abbiamo bisogno di un lemma di tipo isoperimetrico, la cui formulazione richiede l'introduzione di alcune notazioni:

Per $j_0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant j_1$, poniamo

$$(t_1, t_2) = \Omega_{t_2} - \bar{\Omega}_{t_1} , \qquad (t_2, t_3) = \Omega_{t_3} - \bar{\Omega}_{t_2} .$$

Sia $E = E_j$ per $j \geqslant j_1$. Poniamo

$$E_1 = E \cap (t_1, t_2)\,, \qquad E_2 = E \cap (t_2, t_3)\,,$$

$$v_1 = H_n(E_1)\,, \qquad v_2 = H_n(E_2)\,, \qquad v = v_1 + v_2\,,$$

$$m = \max_{i=1,2,3} \int_{|x|=t_i} \varphi_E \, dH_{n-1}\,.$$

Sostituiamo l'insieme E con un nuovo insieme F nel seguente modo:

$$F = \begin{cases} E & \text{in } \Omega_j - (t_1, t_3) - B \\ \emptyset & \text{in } (t_1, t_3) \\ E \cup B_\varrho & \text{in } B \end{cases}$$

dove B_ϱ è una sfera contenuta in B e concentrica con B, scelta in modo che $H_n(B_\varrho - E) = v$ e quindi $H_n(F) = V$, cioè $F \in \mathcal{E}$.

(La possibilità di una tale scelta di B_ϱ è immediata dal fatto che

$$H_n(B - E) \geqslant v$$

e la funzione $\varrho \mapsto H_n(B_\varrho - E)$ è continua).

Dalla proprietà di minimo di E si ha quindi

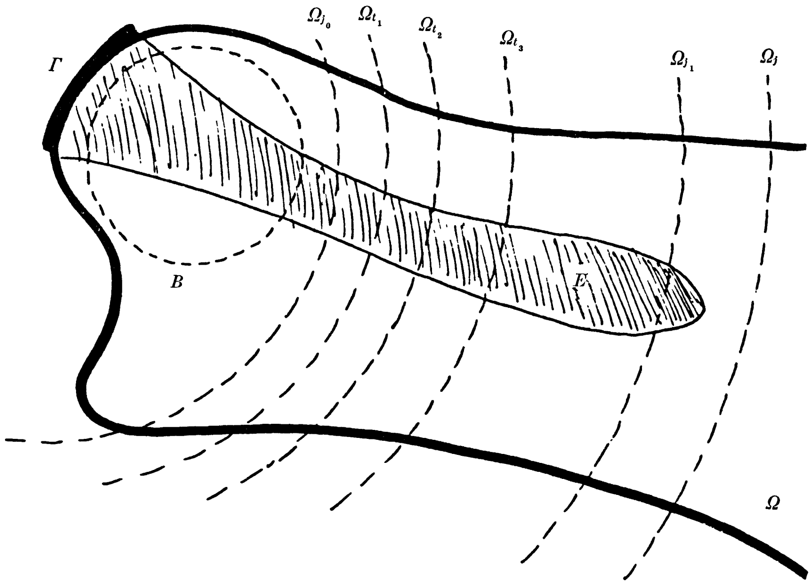
$$\mathcal{F}(E) \leqslant \mathcal{F}(F)\,;$$

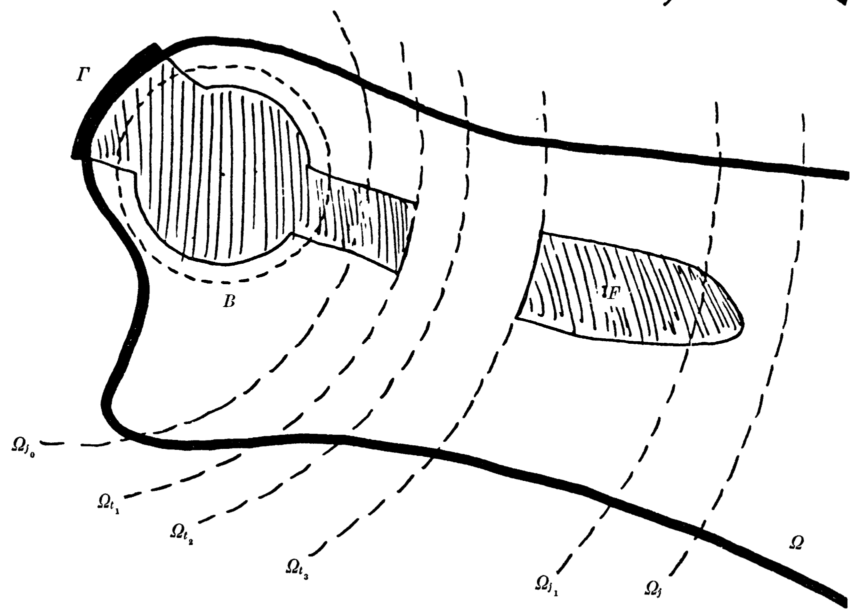
allora usando la disuguaglianza (1.10) dimostrata da I. Tamanini in [10] si ottiene:

$$\int_{(t_1,t_3)} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_1,t_3)} \varphi_E + \int_{B_\varrho} |D\varphi_E| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{|x|=t_1} \varphi_E \, dH_{n-1} + \int_{|x|=t_3} \varphi_E \, dH_{n-1} + \int_{B_\varrho} |D\varphi_E| + n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot v^{(n-1)/n}$$

cioè

$$\int_{(t_1,t_3)} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_1,t_3)} \varphi_E \, dH_{n-1} \leqslant \int_{|x|=t_1} \varphi_E \, dH_{n-1} + \int_{|x|=t_3} \varphi_E \, dH_{n-1} + n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot v^{(n-1)/n}\,. \tag{5}$$


Ω_{j_0}
Ω_{t_1}
Ω_{t_2}
Ω_{t_3}
Ω_{j_1}
Ω_j
Γ
B
E
Ω


Γ
B
F
Ω
Ω_{j_0}
Ω_{t_1}
Ω_{t_2}
Ω_{t_3}
Ω_{j_1}
Ω_j

D'altra parte, dalla proprietà isoperimetrica della sfera, si ha

$$(6)\qquad n\cdot\omega_n^{1/n}\cdot v_i^{(n-1)/n}\leqslant\int\limits_{(t_i,t_{i+1})}|D\varphi_E|+\int\limits_{\partial\Omega\cap(t_i,t_{i+1})}\varphi_E\,dH_{n-1}+\int\limits_{|x|=t_i}\varphi_E\,dH_{n-1}+\int\limits_{|x|=t_{i+1}}\varphi_E\,dH_{n-1}$$

$$(i=1,2)\,.$$

Dalle (5) e (6) ne segue

$$(7)\qquad n\cdot\omega_n^{1/n}\cdot\left(v_1^{(n-1)/n}+v_2^{(n-1)/n}-v^{(n-1)/n}\right)\leqslant 2\cdot\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{|x|=t_i}\varphi_E\,dH_{n-1}\leqslant 6m\,.$$

Supponiamo $v_1\leqslant v_2$, cioè $v_2=s\cdot v_1$ con $s\geqslant 1$, $v=v_1+s\cdot v_1=(1+$ $+s)\cdot v_1$. La (7) si scrive allora

$$(8)\qquad n\cdot\omega_n^{1/n}\cdot v_1^{(n-1)/n}\cdot\left(1+s^{(n-1)/n}-(1+s)^{(n-1)/n}\right)\leqslant 6m$$

e quindi, poichè

$$\min_{s\geqslant 1}\left(1+s^{(n-1)/n}-(1+s)^{(n-1)/n}\right)=2-2_n^{(n-1)/n}>0\,,$$

risulta

$$v_1\wedge v_2\leqslant\left(\omega_n^{-1/n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(2-2^{(n-1)/n}\right)\cdot 6m\right)^{n/(n-1)}.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente

LEMMA 1. *Con le notazioni precedenti, si ha*

$$(9)\qquad v_1\wedge v_2\leqslant c_1\cdot m^N$$

dove $c_1=c_1(n)$ *dipende solo dalla dimensione ed* $N=n/(n-1)$.

Ora, poichè $H_n(E_j)=V<+\infty$, $\forall j$, si ha

$$(10)\qquad \frac{H_n(E_j\cap(\Omega_{j_1}-\Omega_{j_0}))}{j_1-j_0}\leqslant\frac{V}{j_1-j_0}\,,\qquad\forall j$$

e quindi la quantità (10) può essere resa piccola a piacere uniformemente in j. Ragionando allora come nella dimostrazione del teorema 1 di E. Gonzalez - U. Massari - I. Tamanini in [7] (vedi anche S. Albano - E. Gonzalez [1]) si prova il seguente

LEMMA 2. Esiste $j_1 > j_0$ tale che, per ogni $j \geqslant j_1$ esiste r_j: $j_0 \leqslant r_j \leqslant j_1$ tale che

$$\int_{|x|=r_j} \varphi_{E_j} \cdot dH_{n-1} = 0 \,. \tag{11}$$

Abbiamo così superato la tappa c); vediamo ora di dimostrare d):

PROPOSIZIONE 1. Siano j_0, j_1 come prima. Allora, per ogni $j \geqslant j_1$ esiste $\tilde{E}_j$ minimo del problema (1′)-(2′) tale che $\tilde{E}_j \subset \Omega_{j_1}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia E_j minimo del problema (1′)-(2′), sia r_j come nel Lemma 2.

Costruiamo $\tilde{E}_j$ nel seguente modo:

$$\tilde{E}_j = \begin{cases} E_j & \text{in } \Omega_{r_j} - B \\ \emptyset & \text{in } \Omega - \Omega_{r_j} \\ E_j \cup B_{\varrho_j} & \text{in } B \end{cases}$$

dove B_{ϱ_j} è una palla concentrica con B scelta in modo da preservare il vincolo di volume, cioè

$$H_n(B_{\varrho_j} - E_j) = H_n\big(E_j \cap (\Omega - \Omega_{r_j})\big) = v_j \,.$$

Allora

$$\mathcal{F}(\tilde{E}_j) = \int_{\Omega_j} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} =$$

$$= \int_{\Omega_{r_j} - \bar{B}_{\varrho_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\bar{B}_{\varrho_j}} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_{r_j} - \bar{B}_{\varrho_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{B_{\varrho_j}} |D\varphi_{E_j}| + \frac{n}{\varrho_j} \cdot v_j + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_\Gamma| \, dN_{n-1} =$$

$$= \int_{\Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + \frac{n}{\varrho_j} \cdot v_j + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + n \cdot \omega_n^{1/n} v_j^{(n-1)/n} + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\Omega_j - \Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{E_j} - \varphi_\Gamma| \, dH_{n-1} = \mathcal{F}(E_j)$$

e quindi $\mathcal{F}(\tilde{E}_j) = \mathcal{F}(E_j)$ c.v.d.

Concludiamo infine le tappe *e*), *f*) dimostrando il seguente risultato di esistenza:

TEOREMA. Nelle ipotesi (3)-(4) esiste soluzione del problema (1)-(2).

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{\tilde{E}_j\}_j$ come nella proposizione precedente. Come già osservato, possiamo supporre che esista $E_0 \in \mathcal{E}$ tale che

$$\tilde{E}_j \xrightarrow{j \to +\infty} E_0 \quad \text{in } L^1(\Omega) .$$

Sia $F \in \mathcal{E}$, F limitato.

Allora $F \in \mathcal{E}_j$ per j sufficientemente grande e quindi, dalla semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}$ si ha

$$\mathcal{F}(E_0) \leqslant \min_j \lim \mathcal{F}(\tilde{E}_j) \leqslant \mathcal{F}(F) .$$

Sia ora $F \in \mathcal{E}$ arbitrario. Sostituiamo F con il seguente insieme $\tilde{F}_k$:

$$\tilde{F}_k = \begin{cases} F & \text{in } \Omega_{r(k)} - B \\ \emptyset & \text{in } \Omega - \Omega_{r(k)} \\ F \cup B_{\varrho_k} & \text{in } B \end{cases}$$

dove al solito $B_{\varrho k}$ è scelta in modo da preservare il vincolo di volume e dove $r(k)$ è un'opportuna successione divergente a $+\infty$.

Poichè $\tilde{F}_k \in \mathcal{E}$ ed è limitato, si ha

$$\mathcal{F}(E_0) \leqslant \mathcal{F}(\tilde{F}_k) .$$

Il risultato segue notando che, per un'opportuna scelta di $r(k)$, risulta

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{F}(\tilde{F}_k) = \mathcal{F}(F) \qquad \text{c.v.d.} .$$

OSSERVAZIONI FINALI. La soluzione da noi trovata è contenuta nella regione Ω_{j_1} precedentemente definita, ed è quindi limitata.

Con la tecnica usata per dimostrare i Lemmi 1 e 2 si può altresì dimostrare che ogni soluzione del problema (1)-(2) nelle ipotesi (3), (4) è in effetti limitata.

Inoltre, ogni soluzione del problema (1)-(2) è regolare, cioè la frontiera in Ω di ogni minimo è una varietà analitica $n-1$ dimensionale tranne che su un eventuale insieme singolare chiuso Σ la cui dimensione di Hausdorff non supera $n-8$ (vedi [7]).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. ALBANO - E. GONZALEZ, *Rotating drops*. Apparirà sul Indiana J. of Math.

[2] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Memorie Accad. Naz. Lincei, serie 8, **5** (1958).

[3] E. DE GIORGI - F. COLOMBINI - L. PICCININI, *Frontiere orientate di misura minima e questioni colleqate*, Pisa, Editrice Tecnico Scientifica, 1972.

[4] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.

[5] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Notes on Pure Math., Canberra, 1977.

[6] E. GONZALEZ - G. GRECO, *Una nuova dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe degli insiemi aventi perimetro finito*, Ann. Univ. Ferrara, **23**, 1977.

[7] E. GONZALEZ - U. MASSARI - I. TAMANINI, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*. Apparirà sul Indiana J. of Math.

[8] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **18**, 1964.

[9] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. di Padova, **38**, 1967.

[10] I. TAMANINI, *Il problema della capillarità su domini non regolari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **56**, 1977.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 aprile 1982.