RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

P. C. CRAIGHERO

I punti delle ipersuperficie cubiche irriducibili di $\mathbb{P}_k^n$ come sottoinsieme intersezione completa

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 70 (1983), p. 31-46

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__31_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 70 (1983)

I punti delle ipersuperficie cubiche irriducibili di $\mathbb{P}_k^n$ come sottoinsieme intersezione completa.

P. C. CRAIGHERO (*)

SUMMARY - In this note it is proved that on every irriducible reduced cubic hypersurface $\mathcal{F}$ of the projective space $\mathbb{P}_k^n$ (where k is an algebraically closed field of characteristic different from 2 and $n \geqslant 3$) such that $\mathcal{F}$ is not a cone whose vertex has dimension $n-3$, every point is set theoretic complete intersection of $\mathcal{F}$. Algebraically this means that in the homogeneous coordinate ring of $\mathcal{F}$ every homogeneous prime ideal of height $n-1$ is the radical of $n-1$ homogeneous elements.

Introduzione.

Nel corso di questa nota con varietà irriducibile si intenderà sempre varietà irriducibile e ridotta. Sia $\mathcal{F}$ una ipersuperficie cubica irriducibile di $\mathbb{P}_k^n$ (ove k è un corpo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2 ed $n \geqslant 3$) che non sia un cono il cui vertice $V(\mathcal{F})$ abbia dimensione $n-3$ (che è il massimo di dim $V(\mathcal{F})$ se $\mathcal{F}$ è irriducibile). In questa nota si dimostra che, per ogni punto P di $\mathcal{F}$, esiste una opportuna curva piana $\mathcal{C}$, che a seconda del punto P può essere retta, conica, cubica o quartica, tale che per l'intersezione completa $\mathcal{F} \cdot \mathcal{C}$ si abbia $\mathcal{F} \cdot \mathcal{C} = rP$, con $r = 3, 6, 9, 12$ rispettivamente. Poichè ogni curva piana di $\mathbb{P}_k^n$ è intersezione completa di $n-1$ ipersuperficie, ciò implica che su $\mathcal{F}$ ogni punto P è definito da un ideale con $n-1$ generatori e quindi risulta sottoinsieme intersezione completa (s.i.c.) di $\mathcal{F}$. A questo proposito si può inoltre osservare che,

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7, 35100 Padova.

essendo le superficie cubiche di $\mathbb{P}_k^3$ a curve s.i.c., determinate in [4], non coni, per il risultato qui ottenuto anche ogni loro punto è loro s.i.c. e perciò sono, dopo i piani ed i coni quadrici, esempi di superficie tali che ogni loro sottovarietà algebrica è loro s.i.c.: algebricamente ciò corrisponde al fatto che, nell'anello delle coordinate omogenee di ogni tale superficie, ogni ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$ non irrilevante è il radicale di un numero di elementi pari all'altezza (uno o due) di $\mathfrak{p}$. Non ci si pone in questa nota il problema della molteplicità minima con cui è possibile intersecare su $\mathcal{F}$ un suo punto P mediante una curva $\mathcal{C}$, eventualmente anche non piana, tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{C} = \{P\}$. Il caso della caratteristica 2 è stato tralasciato poichè avrebbe coinvolto problemi di classificazione di ipersuperficie cubiche in caratteristica 2, nonchè questioni correlate al secondo teorema di Bertini in caratteristica positiva.

1. – In questo paragrafo si stabiliscono alcuni fatti relativi a curve piane cubiche irriducibili e singolari. Questi fatti, nel caso di cubiche piane non singolari, sono noti (cfr. [2], Lemma 3.1, per le seguenti Prop. 1) e 3), e Prop. 2), per la seguente Prop. 2); si veda anche [1], Vol. I, pp. 277-278).

Le dimostrazioni sono accennate, tralasciando ciò che riveste un carattere di verifica.

PROPOSIZIONE 1). *Sia $\mathcal{C}$ una cubica irriducibile singolare di $\mathbb{P}_k^2$. Sia P un flesso di $\mathcal{C}$. A sia un punto di $\mathcal{C}$ tale che la tangente in A a $\mathcal{C}$ passi per P. Allora esiste una conica C tale che $C\cdot\mathcal{C} = 6P$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A = P$, basta prendere per C la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P, contata due volte. Se $A \neq P$, allora $\mathcal{C}$ ha un nodo D e, a meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{P}_k^2$, non è restrittivo supporre che sia $\mathcal{C} = \{X_0^2X_1 - (X_0 + X_1)X_2^2 = 0\}$, $D = (0, 1, 0)$, $P = (0, 0, 1)$ ed $A = (1, 0, 0)$. Allora la conica richiesta è $C = \{X_1^2 + X_2^2 - X_1X_0 = 0\}$.

PROPOSIZIONE 2). *Sia $\mathcal{C}$ una cubica irriducibile singolare di $\mathbb{P}_k^2$. A_1, A_2 e A_3 siano tre punti semplici distinti di $\mathcal{C}$ tali che le tangenti a $\mathcal{C}$ in A_1, A_2 e A_3 passino rispettivamente per A_2, A_3 e A_1. Allora esistono tre cubiche $\mathcal{C}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ tali che si abbia*

$$\mathcal{C}\cdot\mathcal{C}_i = 9A_i \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si può supporre $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$ e che $\mathcal{C} = \{X_1X_2^2 + X_1^2X_0 + X_2X_0^2 + bX_0X_1X_2 = 0\}$. La cubica $\mathcal{C}_1$ è allora

$$\mathcal{C}_1 = \{X_0 X_1 X_2 + X_1^3 - X_2^3 + bX_0 X_2^2 + 2bX_1^2 X_2 + b^2 X_1 X_2^2 = 0\}$$

e, permutando circolarmente X_0, X_1, X_2, si ottengono le equazioni di $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

PROPOSIZIONE 3). *Sia $\mathcal{C}$ una cubica irriducibile singolare di $\mathbb{P}^2_k$. P sia un flesso di $\mathcal{C}$. A sia un punto semplice di $\mathcal{C}$, diverso da P, tale che la tangente in A a $\mathcal{C}$ passi per P. B sia un altro punto di $\mathcal{C}$, diverso da A, tale che la tangente a $\mathcal{C}$ in B passi per A. Allora esiste una quartica $\mathcal{Q}$ tale che $\mathcal{C}\cdot\mathcal{Q} = 12B$.*

DIMOSTRAZIONE. Si può supporre (cfr. Prop. 1)) che $\mathcal{C} = \{X_0^2 X_1 - (X_0 + X_1)X_2^2 = 0$, $P = (0, 0, 1)$, $A = (1, 0, 0)$ e inoltre $B = (1, -1/2, i)$, ove $i^2 = -1$. Tenendo presente la Prop. 1), si può allora vedere che la quartica cercata è

$$\mathcal{Q}' = (X_0^2 - X_2^2 + 6iX_2X_0 - 12X_1X_0)^2 - 64X_1^3(X_1 + X_0) - \\ - 16iX_1X_2(X_0^2 + 6iX_2(X_1 + X_0) - 12X_1(X_1 + X_0) = 0\,.$$

2. – Le considerazioni di questo paragrafo si svolgono nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_k$; serviranno, nel paragrafo seguente, per dimostrare che ogni superficie irriducibile cubica di $\mathbb{P}^3_k$, che non sia un cono, è a punti sottoinsieme intersezione completa. Le dimostrazioni non vengono fornite poichè, pur non essendo immediate, non sono però difficili.

PROPOSIZIONE 1). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile ed α un piano che intersechi $\mathcal{F}$ in tre rette distinte e non concorrenti: $\mathcal{F}\cdot\alpha = a + b + c$. Allora un piano per una qualsiasi delle tre rette, ad esempio c, tranne al più un numero finito di casi, taglia $\mathcal{F}$, oltre che in c, in una conica C che interseca c in due punti distinti.*

PROPOSIZIONE 2). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile che non sia un cono. Sia α un piano che taglia $\mathcal{F}$ in due rette coincidenti in una retta a ed in una terza retta b distinta da a: $\mathcal{F}\cdot\alpha = 2a + b$. Sia Q il punto comune ad a e b. Sia poi β ($\beta \neq \alpha$) un piano per b tale che $\mathcal{F}\cdot\beta = 2b + c$, ove c è una retta distinta da b e passante per Q. Allora i piani per c, con l'eccezione di al più un numero finito di essi, tagliano $\mathcal{F}$ in c ed in una ulteriore conica C che incontra c in due punti distinti: Q ed $S \neq Q$.*

Proposizione 3). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica con una retta doppia d ed α sia un piano, $\alpha \not\ni d$, tale che $\alpha \cdot \mathcal{F} = 2a + b$, con a e b rette distinte intersecantisi su d: allora $\mathcal{F}$ è un cono di vertice il punto comune ad α e d.*

3. – Scopo di questo paragrafo è quello di dimostrare che ogni superficie cubica irriducibile dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_k$, che non sia un cono, è a punti sottoinsieme intersezione completa; ogni cono cubico di $\mathbb{P}^3_k$, d'altra parte, non è a punti sottoinsieme intersezione completa se il corpo k è di caratteristica zero e più che numerabile (cfr. Proposizione 7)).

Proposizione 1). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile e D un suo punto doppio. Esiste allora una retta r per D tale che $r \cdot \mathcal{F} = 3D$.*

Dimostrazione. Infatti certamente esisterà un piano α per D che interseca $\mathcal{F}$ secondo una cubica piana irriducibile $\mathcal{C}$ avente in D un punto doppio. Basta allora scegliere per r una delle tangenti principali in D a $\mathcal{C}$: sarà $r \cap \mathcal{C} = r \cap \mathcal{F} = \{P\}$, e quindi anche $r \cdot \mathcal{F} = 3P$.

Proposizione 2). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile e P un suo punto semplice. Sia α il piano tangente in P. α intersechi $\mathcal{F}$ secondo uno dei seguenti modi:*

1) $\alpha \cdot \mathcal{F} = \mathcal{C}$, *con $\mathcal{C}$ cubica piana irriducibile;*
2) $\alpha \cdot \mathcal{F} = a + C$, *con a retta e C conica irriducibile, non tangente ad a;*
3) $\alpha \cdot \mathcal{F} = a + C$, *con a retta a C conica irriducibile, tangente ad a;*
4) $\alpha \cdot \mathcal{F} = a + b + c$, *con a, b, c rette (distinte o coincidenti) per P.*

Allora o esiste una retta r per P tale che $r \cdot \mathcal{F} = 3P$, oppure esiste una conica C' tale che $C' \cdot \mathcal{F} = 6P$.

Dimostrazione. Infatti, nei casi 1), 2) e 4), si scelga la retta r in guisa che, rispettivamente, r sia una tangente principale a $\mathcal{C}$ in P, r sia la retta tangente a C in P ed infine r una retta per P diversa da a, b, c: in tutti questi casi è chiaro che $r \cap (\alpha \cap \mathcal{F}) = (r \cap \alpha) \cap \mathcal{F} = r \cap \mathcal{F} = \{P\}$, e quindi anche $r \cdot \mathcal{F} = 3P$. Nel caso 3), sia C' una conica irriducibile iperosculatrice a C in P: anche in tal caso si ha $C' \cap (\alpha \cap \mathcal{F}) = (C' \cap \alpha) \cap \mathcal{F} = C' \cap \mathcal{F} = \{P\}$, e quindi anche $C' \cdot \mathcal{F} = 6P$.

PROPOSIZIONE 3). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile e P un suo punto semplice. Il piano tangente α ad $\mathcal{F}$ in P intersechi $\mathcal{F}$ in due rette, distinte o coincidenti, a e b ed in una terza retta c, diversa da a e b e non contenente P. Siano Q ed R i punti tali che $a \cap c = \{Q\}$ e $b \cap c = \{R\}$. Sia poi β un piano per c che intersechi $\mathcal{F}$ in uno dei seguenti modi:*

1) *$\beta \cdot \mathcal{F} = c + C$, con C conica irriducibile, secante su c due punti distinti di cui almeno uno, S, diverso da Q ed R;*

2) *$\beta \cdot \mathcal{F} = c + u + v$, con u e v rette, distinte o coincidenti, tali che $u \cap v \cap c = \{S\}$, con S punto di c diverso da Q ed R (una delle due rette u o v potendo, eventualmente, anche coincidere con c);*

3) *$\beta \cdot \mathcal{F} = 3c$.*

Allora esiste sempre una conica C', irriducibile, tale che $C' \cdot \mathcal{F} = 6P$.

DIMOSTRAZIONE. Nel primo caso t denoti la tangente a C in S; nel secondo una retta qualunque di β per S diversa da u, v e c; nel terzo caso una retta qualunque di β diversa da c per un qualunque punto S di c diverso da Q e da R. Sia γ il piano per P e t. Poichè in ogni caso S è punto semplice per $\mathcal{F}$, il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in S è il piano β. Chiaramente $\alpha \neq \gamma \neq \beta$. γ taglia su $\mathcal{F}$ una cubica piana $\mathcal{C}$ che risulta irriducibile: infatti, se s fosse una componente lineare di $\gamma \cap \mathcal{F}$, s dovrebbe incontrare la retta PS in punti di $\mathcal{F}$ e perciò o in P o in S; essendo ovviamente $PS \neq s \neq t$, ciò porta ad un assurdo, perchè $P \in s$ o $S \in s$ implicherebbero, rispettivamente, che P o S sia un punto multiplo per $\mathcal{F}$. Inoltre, poichè i piani tangenti in P ed S a $\mathcal{F}$ sono, rispettivamente, α e β, P ed S sono punti semplici per $\mathcal{C}$: in caso contrario, infatti, sarebbe γ il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in P o in S. Avendosi allora

$$t \cap \mathcal{C} = t \cap (\gamma \cap \mathcal{F}) = (t \cap \gamma) \cap \mathcal{F} = t \cap \mathcal{F} = (t \cap \beta) \cap \mathcal{F} = \\ = t \cap (\beta \cap \mathcal{F}) = \{S\},$$

si conclude che S è punto di flesso per le (cfr. Figura 1). Inoltre la tangente a $\mathcal{C}$ in P è l'intersezione di γ con il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in P, che è α: dunque la tangente a $\mathcal{C}$ in P è la retta $\alpha \cap \gamma = PS$. Possiamo quindi applicare a $\mathcal{C}$, S e P la Proposizione 1), § 1) o la sua analoga, se $\mathcal{C}$ è non singolare: se C' è la conica tale che $C' \cdot \mathcal{C} = 6P$, risulta anche ovviamente $C' \cdot \mathcal{F} = 6P$.

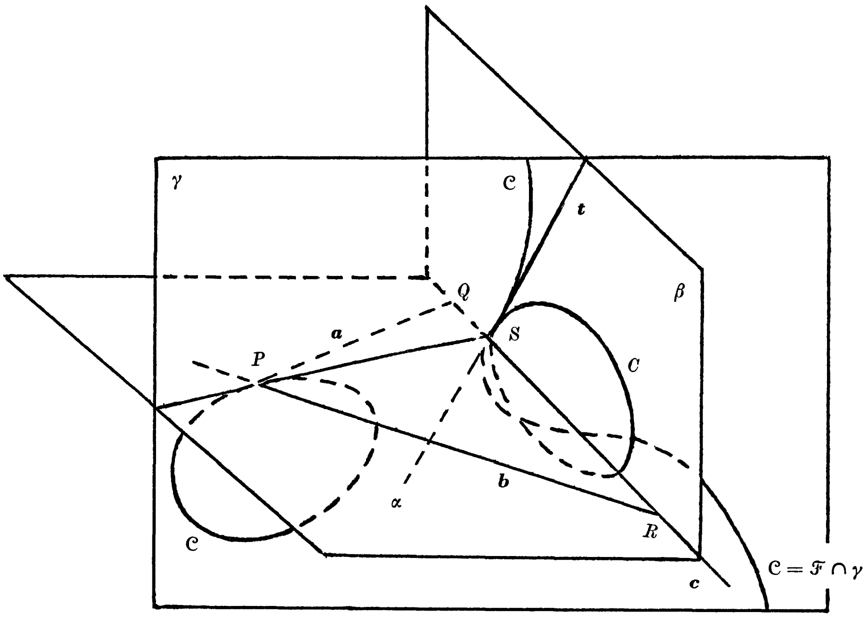

Fig. 1.

PROPOSIZIONE 4). *Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile e P un suo punto semplice. Il piano α, tangente in P a $\mathcal{F}$, intersechi $\mathcal{F}$ in due rette, distinte o coincidenti, a e b ed in una terza retta c, diversa da a e b, non passante per P. Siano Q ed R i punti tali che $a \cap c = \{Q\}$ e $b \cap c = \{R\}$. Sia poi β un piano, diverso da α, passante per c che tagli $\mathcal{F}$ nella retta c, contata due volte ed in un'altra retta d, diversa da c, passante per uno dei due punti Q, R, ad esempio Q: $\beta \cdot \mathcal{F} = 2c + d$. Infine sia γ un piano, diverso da α e β, per d, che intersechi $\mathcal{F}$ in uno dei seguenti modi:*

1) $\gamma \cdot \mathcal{F} = d + C$, *con C conica irriducibile secante d in due punti distinti, Q ed un altro punto $S \neq Q$,*

2) $\gamma \cdot \mathcal{F} = 2d + s$, *con s retta secante d in un punto $S \neq Q$,*

allora esiste una curva piana del quarto ordine $\mathcal{Q}$, tale che $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{F} = 12P$.

DIMOSTRAZIONE. Nel primo caso t denoti la tangente a C in S; nel secondo una qualunque retta di γ diversa da d per il punto S. Sia δ il piano per P e t. Essendo in ogni caso S punto semplice per $\mathcal{F}$, il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in S sarà γ. δ è diverso da α, β e γ. Il piano δ interseca la retta c in un punto $T \neq Q, R$, come è facile verificare. T è dunque un punto semplice di $\mathcal{F}$ appartenente a c e perciò il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in T è il piano β. Il piano δ interseca su $\mathcal{F}$ una cubica piana irriducibile $\mathfrak{C}$, come si dimostra analogamente a quanto si è fatto in Dim. di Prop. 3). Inoltre P, S e T sono punti semplici per $\mathfrak{C}$, altrimenti in almeno uno di essi il piano tangente ad $\mathcal{F}$ sarebbe $\delta \neq \alpha, \beta, \gamma$. Ora si ha $t \cap \mathfrak{C} = t \cap (\delta \cap \mathcal{F}) = (t \cap \delta) \cap \mathcal{F} = t \cap \mathcal{F} = (t \cap \gamma) \cap \mathcal{F} = t \cap (\gamma \cap \mathcal{F}) = \{S\}$; dunque S è un punto di flesso per $\mathfrak{C}$. La tangente alla $\mathfrak{C}$ in T è $\delta \cap \beta = TS$, quindi passa per S; infine la tangente in P a $\mathfrak{C}$ è $\alpha \cap \delta = PT$ e quindi passa per T. Possiamo quindi applicare alla cubica piana $\mathfrak{C}$ ed ai suoi punti S, T e P la Proposizione 3), § 1), o la sua analoga, se $\mathfrak{C}$ è non singolare, concludendo nel senso voluto.

PROPOSIZIONE 5). *Se la caratteristica del corpo k è diversa da 2 ed $\mathcal{F}$ è una qualunque superficie irriducibile cubica rigata che non sia un cono, per ogni punto $P \in \mathcal{F}$ o esiste una retta r tale che $r \cdot \mathcal{F} = 3P$, oppure esiste una conica C tale che $C \cdot \mathcal{F} = 6P$.*

DIMOSTRAZIONE. In virtù delle Proposizioni 1) e 2) di questo paragrafo, possiamo limitarci a dimostrare la Proposizione in esame limitatamente a quei punti semplici $P \in \mathcal{F}$ tali che il piano tangente α ad $\mathcal{F}$ in P, intersechi $\mathcal{F}$ in uno dei seguenti modi:

1) $\alpha \cdot \mathcal{F} = a + b + c$, con $a \neq b$, a e b passanti per P e c non passante per P;
2) $\alpha \cdot \mathcal{F} = 2a + b$, con a passante per P e $b \neq a$ e non passante per P.

Nel primo caso, uno dei due punti Q, R, con $\{Q\} = a \cap c$ ed $\{R\} = a \cap b$, deve essere doppio per $\mathcal{F}$ e per esso deve passare la direttrice doppia di $\mathcal{F}$, d $(d \not\subset \alpha)$: sia, per esempio, Q questo punto. $\mathcal{F}$ è allora una rigata generale con direttrice doppia d e direttrice semplice la retta PR. Ora il generico piano β per la retta QR deve intersecare $\mathcal{F}$ nella retta QR ed in una conica residua C_β irriducibile, intersecante a sua volta la retta QR in due punti: Q ed un altro punto $S_\beta \neq Q$. Anzitutto C non può essere sempre degenere, perchè una sua componente lineare dovrebbe sempre passare per Q, che risulta certamente multiplo per il ciclo sezione di β con $\mathcal{F}$, e dunque per Q passarebbero infinite rette di $\mathcal{F}$ nel qual caso $\mathcal{F}$ sarebbe un cono di vertice Q, contro l'ipotesi. Per la Proposizione 1) di § 2), la generica conica C_β taglia la retta QR in due punti distinti: Q ed un altro punto $S \neq Q$. Sia β_1 un piano tale che C_{β_1} sia irriducibile e $C_{\beta_1} \cap QR = \{Q, S_{\beta_1}\}$, con $S_{\beta_1} \neq Q$. Applicando ad $\mathcal{F}$ la Proposizione 3) si conclude che esiste una conica C tale che $C \cdot \mathcal{F} = 6P$.

Nel secondo caso la retta doppia di $\mathcal{F}$, d, deve intersecare la retta a in un punto D diverso dal punto Q comune ad a e b, altrimenti $\mathcal{F}$ sarebbe un cono di vertice Q (cfr. Proposizione 3), § 2)). $\mathcal{F}$ è anche in tal caso una rigata generale con direttrice semplice la retta b. Ora (cfr. Osservazione 2) seguente) se la caratteristica del corpo k è diversa da 2, esistono esattamente due piani distinti per b, taglianti $\mathcal{F}$ in b ed in una coppia di rette coincidenti, diverse da b. Uno di essi è il piano α. Sia β l'altro con $\beta \cdot \mathcal{F} = b + 2c$, con $c \neq b$ e sia S il punto comune a b e c. Ovviamente $S \neq Q$. Applicando ancora ad $\mathcal{F}$ la Proposizione 2), si conclude ancora che esiste una conica C tale che $C \cdot \mathcal{F} = 6P$.

Osservazione 2). Se il coropo k è algebricamente chiuso e di caratteristica 0, le superficie cubiche irriducibili rigate che non siano coni sono di due specie:

1) *le rigate cubiche generali*, tutte linearmente equivalenti alla superficie di equazione

$$X_0 X_1^2 + X_2 X_3^2 = 0;$$

2) *le rigate cubiche di Cayley*, tutte linearmente equivalenti alla superficie di equazione

$$X_3^3 + X_0 X_2 X_3 + X_1 X_0^2 = 0\,.$$

Per le argomentazioni che permettono di concludere con questa classificazione delle superficie cubiche irriducibili rigate e non coni si veda, ad esempio, il trattato [3], p. 487. Si può osservare qui, comunque, che queste stesse argomentazioni valgono in effetti anche quando il corpo k è algebricamente chiuso e di caratteristica diversa da 2. Osserviamo che, in quest'ultima ipotesi, le rigate del primo tipo presentano tutte una retta doppia d ed una direttrice semplice r, sghemba con d; i piani per r intersecano una rigata di questo tipo, oltre che in r, in una coppia di rette distinte o coincidenti; queste due rette sono in effetti coincidenti in corrispondenza a due piani distinti per r; in ogni caso le due rette, distinte o coincidenti che siano, si appoggiano in uno stesso punto alla retta doppia d. Nel caso della caratteristica 2, non mi è nota una classificazione delle rigate cubiche; osserviamo però che in tal caso la classificazione si presenta subito diversa da quella riferita sopra. Infatti consideriamo, ad esempio, la rigata $\{X_3^2X_2 + X_0X_1X_3 + X_0X_1^2 = 0\}$: la sua retta doppia d e la $\{X_1 = X_3 = 0\}$, la direttrice semplice r è la $\{X_0 = X_2 = 0\}$, ma esiste un solo piano per r che interseca questa rigata, oltre che in r, in una coppia di rette coincidenti, ed è il piano $\{X_0 = 0\}$, tale superficie non potendo rientrare quindi nè fra quelle linearmente equivalenti alla $\{X_0X_1^2 + X_2X_3^2 = 0\}$, per le quali accade che ogni piano per la direttrice semplice r interseca la superficie in r ed in una coppia di rette coincidenti, nè fra quelle linearmente equivalenti alla rigata $\{X_3^3 + X_0X_2X_3 + X_1X_0^2 = 0\}$, la quale non possiede una direttrice semplice. Questa situazione non permette di adottare, nel caso della caratteristica 2, l'argomentazione usata nel caso 2) della Proposizione 5).

PROPOSIZIONE 6). *Se $\mathcal{F}$ è una qualunque superficie cubica irriducibile e non rigata, per ogni punto $P \in \mathcal{F}$ o esiste una retta r tale che $r \cdot \mathcal{F} = 3P$, o esiste una conica C tale che $C \cdot \mathcal{F} = 6P$, o esiste una cubica piana $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{C} \cdot \mathcal{F} = 9P$, o, infine, esiste una quartica piana $\mathcal{Q}$ tale che $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{F} = 12P$.*

DIMOSTRAZIONE 2). In virtù delle Proposizioni 1) e 2), possiamo limitarci a dimostrare la nostra Proposizione limitatamente a quei punti semplici P di $\mathcal{F}$ tali che il piano tangente α in P ad $\mathcal{F}$ intersechi $\mathcal{F}$ in uno dei seguenti modi:

1) $\alpha \cdot \mathcal{F} = a + b + c$, con a e b due rette distinte per P e c retta diversa da a e b e non passante per P;

2) $\alpha \cdot \mathcal{F} = 2a + c$, con a retta per P, e c retta non passante per P.

Supponiamo di essere nel caso 1) e che non esista nessun piano β per c che soddisfi ad una delle condizioni 1), 2), 3), della Proposizione 3). Allora, per la Proposizione 1), § 2), esiste solo un numero finito di piani per c i quali intersecano $\mathcal{F}$, oltre che in c, in una conica residua che non intersechi c in due punti distinti. Inoltre è chiaro anche che esistono solo un numero finito di piani che intersecano $\mathcal{F}$, oltre che in c, in una conica residua degenere, altrimenti $\mathcal{F}$ risulterebbe rigata. Sia allora β uno degli infiniti piani per c, intersecanti $\mathcal{F}$, oltre che in c, in una conica residua, intersecante c in due punti distinti che, per l'ipotesi fatta sopra, devono essere i due punti Q ed R tali che $\{Q\} = a \cap c$ ed $\{R\} = b \cap c$. È chiaro che Q ed R risultano così punti doppi per $\mathcal{F}$. Inoltre il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in uno qualunque dei punti semplici di c, non può che essere fisso in un piano β_0 il quale interseca $\mathcal{F}$ in due rette coincidenti in c ed in una terza retta $d \neq c$ e passante per Q o per R (e ciò sempre per l'ipotesi fatta sopra). Sia, per esempio $Q \in d$. Supponiamo ora che non esista nessun piano γ per d soddisfacente le condizioni 1) o 2) della Proposizione 4). Per renderci meglio conto della situazione attuale, trasformiamo linearmente $\mathcal{F}$ mediante un isomorfismo lineare τ tale che

$$\tau(P) = (1, 0, 0, 0),\ \tau(Q) = (0, 0, 1, 0),\ \tau(R) = (0, 1, 0, 0),$$

$$\tau(\alpha) = \{X_3 = 0\},\ \tau(\beta_0) = \{X_0 = 0\},\ \tau(d) = \{X_0 = 0\} \cap \{X_1 = 0\}.$$

Assunto $\{X_0 = 0\}$ come piano all'infinito, l'equazione affine di $\tau(\mathcal{F})$ sarà del tipo

$$\mathrm{a}Z + XY + \mathrm{b}XZ + \mathrm{c}YZ + \mathrm{d}Z^2 + \mathrm{e}XZ^2 = 0 \qquad (\text{con } \mathrm{a} \neq 0)$$

come non è difficile verificare, tenendo conto di tutte le ipotesi. Ma tenendo conto dell'ultima supposizione fatta, si ha che il piano generico per $\tau(d)$ deve intersecare $\tau(\mathcal{F})$, oltre che in $\tau(d)$, in una conica residua irriducibile e tangente a $\tau(d)$ in $\tau(Q) = Y_\infty$, il che implica $\mathrm{c} = 0$.

Dunque è $\tau(\mathcal{F}) = \{\mathrm{a}Z + XY + \mathrm{b}XZ + (\mathrm{d} + \mathrm{e}X)Z^2 = 0\}$. Chiaramente il piano tangente a $\tau(\mathcal{F})$ lungo $\tau(d)$ (cioè tangente a $\tau(\mathcal{F})$ in ogni punto semplice di $\tau(\mathcal{F})$ su $\tau(d)$) è il piano di equazione affine $X = -\mathrm{d}/\mathrm{e}$: esso interseca $\tau(\mathcal{F})$ all'infinito in due rette coincidenti nella $\tau(d)$, e inoltre nella retta s di equazioni affini $\{X = -\mathrm{d}/\mathrm{e},\ (\mathrm{a} - (\mathrm{bd})/\mathrm{e})Z - \mathrm{d}/\mathrm{e},\ Y = 0\}$. La retta s, per quanto supposto, deve passare per $Y_\infty = \tau(Q)$, e questo implica $\mathrm{d} = 0$. Il piano tangente in ogni punto della retta $\tau(d)$ a $\tau(\mathcal{F})$ è così γ_0': $\{X = 0\}$. Poniamo $\tau^{-1}(\gamma_0') = \gamma_0$. Riassumiamo la situazione: abbiamo che

1) $\alpha \cdot \mathcal{F} = a + b + c$, con a e b rette distinte per P, c retta non passante per P;
2) $\beta_0 \cdot \mathcal{F} = 2c + d$, con d retta distinta da c per il punto Q, comune ad a e c;
3) $\gamma_0 \cdot \mathcal{F} = 2d + a$.

Scegliamo allora un piano δ per P e non passante nè per Q nè per R. Indichiamo con C il punto comune a δ e c e con D il punto comune a δ

e d. C e D sono due punti semplici per $\mathcal{F}$ ed in essi i piani tangenti ad $\mathcal{F}$ sono rispettivamente $\beta_0 \neq \delta$ e $\gamma_0 \neq \delta$. δ interseca $\mathcal{F}$ in una cubica piana $\mathcal{C}$ irriducibile. Inoltre P, C e D sono punti semplici per la cubica $\mathcal{C}$, altrimenti in almeno uno di questi punti il piano tangente ad $\mathcal{F}$ sarebbe δ e non rispettivamente α, β_0 e γ_0. Infine la tangente alla $\mathcal{C}$ in P è chiaramente la retta PC, la tangente alla $\mathcal{C}$ in C è la retta CD e la tangente in D alla $\mathcal{C}$ è la retta DP. Possiamo quindi applicare alla cubica piana $\mathcal{C}$ ed ai suoi punti P, C e D la Proposizione 2), § 1), o la sua analoga se $\mathcal{C}$ è non singolare: esiste quindi una cubica piana $\mathcal{C}'$ tale che $\mathcal{C}' \cdot \mathcal{C} = 9P$ (l'intersezione essendo eseguita nell'ambito del piano δ), e sarà anche $\mathcal{C}' \cdot \mathcal{F} = 9P$.

Supponiamo ora di trovarci nel caso 2). Supponiamo anche qui che non esista nessun piano β per c soddisfacente le condizioni 1), 2) o 3) della Proposizione 3). Allora il generico piano per c deve intersecare $\mathcal{F}$, oltre che in c, in una conica irriducibile e tangente c nel punto Q, con $\{Q\} = a \cap c$: questo implica che il piano tangente a $\mathcal{F}$ in ogni punto di c diverso da Q è fisso in un piano β_0, il quale interseca $\mathcal{F}$ in due rette coincidenti in c ed in una retta $d \neq c$, con d passante per Q. La Proposizione 2), § 2), assicura, poichè $\mathcal{F}$ non è un cono, perchè non rigata, l'esistenza di un piano per c soddisfacente alle condizioni 1) o 2) della Proposizione 4), il che consente di concludere affermando che esiste una quartica piana $\mathcal{Q}$ tale che $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{F} = 12F$.

La Prop. 5), la Prop. 6) e il fatto che in $\mathbf{P}_k^3$ ogni curva piana è intersezione completa di due superficie permettono di stabilire il

Teorema 1). *Ogni superficie cubica irriducibile $\mathcal{F}$ di $\mathbf{P}_k^3$, ove k e un corpo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2, che non sia un cono, è a punti sottoinsieme intersezione completa: più precisamente, per ogni punto $P \in \mathcal{F}$, o esiste una retta r tale che $r \cdot \mathcal{F} = 3P$, o esiste una conica C tale che $C \cdot \mathcal{F} = 6P$, o esiste una cubica piana $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{C} \cdot \mathcal{F} = 9P$, o esiste una quartica piana $\mathcal{Q}$ tale che $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{F} = 12P$.*

Nel caso in cui k sia un corpo di caratteristica zero e più che numerabile il Teorema 1) può essere completato dalla seguente

Proposizione 7). *Ogni cono cubico irriducibile Γ di $\mathbf{P}_k^3$, ove k è un corpo di caratteristica zero, algebricamente chiuso e più che numerabile, non è a punti sottoinsieme intersezione completa: vi sono cioè su Γ dei punti P tali che per ogni curva $\mathcal{C}$ dello spazio non è mai $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{P\}$.*

Dimostrazione. Scegliamo un piano α che non passi per il vertice V di Γ. $\alpha \cap \Gamma = \mathcal{C}$ è una cubica piana irriducibile. Nelle ipotesi fatte sul corpo k, esistono sempre su $\mathcal{C}$ punti che non sono sottoinsieme intersezione completa di $\mathcal{C}$ con nessuna curva algebrica contenuta in α (cfr. [5], p. 173). Sia Q uno di questi punti e sia g la retta VQ. Nessun punto della retta g, diverso da V può essere sottoinsieme intersezione completa di Γ. Supponiamo infatti che esista una curva $\mathcal{C}^*$ dello spazio $\mathbb{P}_k^3$ tale che $\mathcal{C}^* \cap \Gamma = P$. Consideriamo allora il cono $\Gamma(V, \mathcal{C}^*)$ che proietta $\mathcal{C}^*$ da V. È chiaro che $\Gamma(V, \mathcal{C}^*) \cap \Gamma = g$. Sia ora $\mathcal{C}'$ la curva intersezione di $\Gamma(V, \mathcal{C}^*)$ con α. Si ha allora $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C} = (\alpha \cap \Gamma(V, \mathcal{C}^*)) \cap \mathcal{C} = (\alpha \cap \Gamma(V, \mathcal{C}^*)) \cap (\alpha \cap \Gamma) = \alpha \cap (\Gamma(V, \mathcal{C}^*) \cap \Gamma) = \alpha \cap g = \{Q\}$ il che, per la scelta di Q, risulta impossibile.

4. – Ci occuperemo ora di estendere il Teorema 1), § 3), alle ipersuperficie cubiche negli spazi $\mathbb{P}_k^n$. Allo scopo sarà utile stabilire alcuni fatti. Supponiamo $n \geqslant 4$. Sia $\mathcal{F}$ una qualunque ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{P}_k^n$. A norma del 2º Teorema di Bertini sulla irriducibilità della generica sezione iperpiana, esiste un iperpiano π di $\mathbb{P}_k^n$ tale che $\pi \cdot \mathcal{F} = \mathcal{S}$, con $\mathcal{S}$ varietà irriducibile di dimensione $n-2$. Questo implica che, se P è un qualunque punto di $\mathcal{F}$, esiste un iperpiano π_P per P tale che $\pi_P \cdot \mathcal{F} = \mathcal{S}_P$, con $\mathcal{S}_P$ varietà irriducibile di dimensione $n-2$. Infatti, se π non passa già per P, consideriamo il teorema di Bertini applicato, questa volta, alla varietà $\mathcal{S} = \pi \cap \mathcal{F}$ pensata come ipersuperficie irriducibile di π, considerato come spazio proiettivo di dimensione $n-1 \geqslant 3$. Esisterà quindi una sottovarietà lineare $L_{n-2} \subset \pi$ la quale interseca $\mathcal{S}$ secondo una sottovarietà $\mathcal{S}_{n-3}$ irriducibile. Allora, posto $\pi_P = (P, L_{n-2})$, si ha che $\pi_P \cdot \mathcal{F}$ è irriducibile (e ridotta) perchè nell'ambito di π_P, ha la sezione iperpiana con L_{n-2} che è $\mathcal{S}_{n-3}$, irriducibile (e ridotta). Inoltre il Teorema di Bertini sull'irriducibilità della generica sezione iperpiana assicura che l'insieme degli iperpiani dello spazio $\mathbb{P}_k^n$ intersecanti $\mathcal{F}$ secondo una varietà S di dimensione $n-2$ irriducibile costituisce un aperto dello spazio duale di $\mathbb{P}_k^n$. Gli iperpiani passanti per P ed intersecanti $\mathcal{F}$ secondo una varietà irriducibile $\mathcal{S}_P$ saranno quindi un aperto non vuoto, per quanto appena visto, del chiuso di tutti gli iperpiani passanti per P.

Sia $\mathcal{F}$ allora una ipersuperficie cubica irriducibile dello spazio $\mathbb{P}_k^n$, $V(\mathcal{F})$ sia il suo vertice, e sia $\dim(V(\mathcal{F})) < n-3$. Sia P un punto di $\mathcal{F}$, con $P \notin V(\mathcal{F})$. Vogliamo riconoscere che l'iperpiano generico per P, π_P, interseca $\mathcal{F}$ in una varietà (irriducibile, come è stato sopra visto) che, interpretata come ipersuperficie di π_P, risulta una cubica il cui vertice ha dimensione minore di $(n-3)-1 = n-4$: $\dim(\mathcal{F} \cap \pi_P) < n-4$. Distinguiamo due casi: $V(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ e $V(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Nel primo caso, $V(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, ogni sezione $\mathcal{S}$ di $\mathcal{F}$ con un iperpiano π_P per P, è una varietà che, interpretata come ipersuperficie di π_P, a sua volta interpretato come spazio proiettivo $(n-1)$-dimensionale, risulta una ipersuperficie cubica irriducibile il cui vertice $V(\mathcal{S})$ ha dimensione minore di $n-4$. Infatti, poichè $\pi_P \not\supset V(\mathcal{F})$ $(P \notin V(\mathcal{F}))$ esisterà almeno un punto triplo di $\mathcal{F}$, T, con $T \notin \pi_P$. $\mathcal{F}$ è un cono di vertice T e sezione iperpiana $\mathcal{S}$, non passante per T; è allora chiaro che, se S è un qualunque punto di $V(\mathcal{S})$, la retta TS è luogo di punti tripli per $\mathcal{F}$. Se $\dim V(\mathcal{S}) = n-4$, lo spazio lineare L congiungente $V(\mathcal{S})$ con T avrebbe dimensione $n-3$: siccome $L \subset V(\mathcal{F})$, ne seguirebbe che $\dim V(\mathcal{F}) = n-3$, contro l'ipotesi.

Nel secondo caso, $V(\mathcal{F}) = \emptyset$, distinguiamo due sottocasi $n > 4$ ed $n = 4$.

Nel primo sottocaso, $n > 4$, per il 1° Teorema di Bertini sulla generica sezione iperpiana di $\mathcal{F}$, quest'ultima risulta priva di punti tripli. Ne segue che, se $P \in \mathcal{F}$, anche la generica sezione $\mathcal{S}$ di $\mathcal{F}$ con un iperpiano π_P per P, pensata come ipersuperficie di π_P, ha un vertice $V(\mathcal{S})$ che, in $\mathbb{P}_k^n$, ha dimensione minore di $n-4$. Infatti, per successive applicazioni del 1° e 2° Teorema di Bertini di cui sopra, si trae che la sezione di $\mathcal{F}$ con un generico spazio lineare L_3 di dimensione 3 risulta, se riguardata come ipersuperficie di L_3, una cubica irriducibile e priva di punti tripli. Scelto allora un generico iperpiano π_P per P ed in esso un generico L_3, e posto $\sigma = L_3 \cap \mathcal{F}$ ed $\mathcal{S} = \pi_P \cap \mathcal{F}$, risulta che σ, in L_3, è priva di punti tripli, poichè L_3 risulta generico anche in $\mathbb{P}_k^n$. Se ora fosse $\dim V(\mathcal{S}) = n-4 = (n-1)-3$, certamente sarà $L_3 \cap V(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, e poichè è $\sigma = L_3 \cap \mathcal{S}$ un punto $T \in L_3 \cap V(\mathcal{S})$ sarà certo triplo per σ e questa contraddizione prova l'asserto.

Nel secondo sottocaso, $n = 4$, ci limiteremo a considerare la questione nell'ipotesi che la caratteristica di k sia diversa da 2. In tale situazione si può ancora provare che, se $P \in \mathcal{F}$, la generica sezione di $\mathcal{F}$ con un iperpiano π_P per P è priva di punti tripli. Supponiamo infatti che sia vero il contrario. Allora la generica sezione $\mathcal{S} = \pi_P \cap \mathcal{F}$ ha un unico punto triplo, o sarebbe riducibile, contro quanto osservato in precedenza; questo punto triplo della sezione $\pi_P \cap \mathcal{F}$, al variare di π_P per P, descrive una varietà algebrica $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, la quale non può avere dimensione < 3, poichè per ogni punto di $\mathcal{F}$ vi sono al massimo due iperpiani la cui sezione con $\mathcal{F}$ ha in quel punto un punto triplo e, se quel punto varia su di una sottovarietà propria di $\mathcal{F}$, gli iperpiani con questa proprietà che si ottengono non potranno in alcun modo costituire un aperto o contenere un aperto dell'insieme di tutti gli iperpiani per P, che ha dimensione 3. Questo implica che il piano tangente nel punto generico di $\mathcal{F}$ passa per P. Ora quest'ultima conseguenza è assurda come risulta dalla seguente

PROPOSIZIONE 1). *Se la caratteristica del corpo k e diversa da 2, data in $\mathbb{P}_k^4$ una ipersuperficie cubica irriducibile $\mathcal{F}$ priva di punti tripli non è possibile che l'iperpiano tangente nel punto generico di $\mathcal{F}$ passi per un punto fisso $P_0 \in \mathcal{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che basta dimostrare la proposizione per una ipersuperficie affine che, a meno di un isomorfismo lineare, si può supporre di equazione

$$aW + B_2(X, Y, Z, W) + B_3(X, Y, Z, W) = 0$$

ove $P_0 = (0, 0, 0, 0)$, B_2 e B_3 sono omogenei di grado 2 e 3 rispettivamente, $B_3 \neq 0$, e o $a \neq 0$ oppure $B_2 \neq 0$. Se allora $P = (x_P, y_P, z_P, w_P)$ è un punto generico, e quindi semplice di $\mathcal{F}$, l'iperpiano tangente ad $\mathcal{F}$ in P è

$$\pi_P = \{[B_{2_X} + B_{3_X}]_P(x_P - X) + [B_{2_Y} + B_{3_Y}]_P(y_P - Y) + \\ + [B_{2_Z} + B_{3_Z}](z_P - Z) + [B_{2_W} + B_{3_W} + a]_P(w_P - W) = 0$$

ove $[\ ]_P$ indica che il polinomio argomento della parentesi è calcolato in P. La condizione che π_P passi per $P_0 = O$ per P generico su $\mathcal{F}$ implica, essendo

$$[B_{i_X}]x_P + [B_{i_Y}]_P y_P + [B_{i_Z}]_P z_P + [B_{i_W}]_P w_P = iB_i(x_P, y_P, z_P, w_P)\,, \qquad i = 2, 3,$$

$$aw_P + 2B_2(x_P, y_P, z_P, w_P) + 3B_3(x_P, y_P, z_P, w_P) = 0$$

per P generico su $\mathcal{F}$, e ciò implica che l'ipersuperficie

$$\mathcal{F}' = \{aW + 2B_2(X, Y, Z, W) + 3B_3(X, Y, Z, W) = 0\}$$

coincida con $\mathcal{F}$, il che è impossibile se la caratteristica di k è diversa da 2.

Siamo ora in grado di provare il seguente

TEOREMA 1). *Ogni ipersuperficie cubica irriducibile $\mathcal{F}$ di $\mathbb{P}_k^n$, con $n \geqslant 3$ e k corpo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2, che non sia un cono il cui vertice $V(\mathcal{F})$ abbia dimensione $n-3$, è a punti sottoinsieme intersezione completa: più precisamente, per ogni punto $P \in \mathcal{F}$, o esiste una retta r tale che $r \cdot \mathcal{F} = 3P$, o esiste una conica C tale che $C \cdot \mathcal{F} = 6P$, o esiste una cubica piana $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{C} \cdot \mathcal{F} = 9P$, o esiste una quartica piana $\mathcal{Q}$ tale che $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{F} = 12P$.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che ogni punto di $\mathcal{F}$ sia suo s.i.c. è dovuto al fatto che, in $\mathbb{P}_k^n$, ogni curva piana è intersezione completa di $n-1$ ipersuperficie; quanto all'esistenza della curva piana di cui nell'enunciato essa sarà provata per induzione sulla dimensione dello spazio nella maniera seguente. Per quanto riguarda lo spazio $\mathbb{P}_k^3$ la verità dell'enunciato è assicurata dal Teorema 1), § 3. Procediamo allora per induzione, supponendo di aver dimostrato l'enunciato per le ipersuperficie cubiche irriducibili di $\mathbb{P}_k^{n-1}$, con $n-1 \geqslant 3$ (e quindi anche per le varietà irriducibili di grado 3 e dimensione $n-2$ contenute in un qualunque iperpiano di $\mathbb{P}_k^n$, ove per retta, conica, cubica piana e quartica piana si intendano curve contenute nell'iperpiano considerato) e andiamo a dimostrare che, se $\mathcal{F}$ è una qualunque ipersuperficie cubica irriducibile di $\mathbb{P}_k^n$, tale che $\dim V(\mathcal{F}) < n-3$, ogni punto $P \in \mathcal{F}$ è sottoinsieme intersezione completa di $\mathcal{F}$ con una curva piana, con le precisazioni esposte nell'enunciato. Se P è un punto triplo di $\mathcal{F}$ la cosa è ovvia. Se $P \notin V(\mathcal{F})$ consideriamo un generico iperpiano π per P: in virtù delle considerazioni fatte all'inizio di questo paragrafo, risulterà che l'intersezione di π_P con $\mathcal{F}$ è una varietà che, interpretata come ipersuperficie di π_P, è una ipersuperficie cubica $\mathcal{F}'$ irriducibile di π_P il cui vertice $V(\mathcal{F}')$ ha dimensione minore di $n-4 = (n-1)-3$; in virtù dell'ipotesi induttiva, applicabile ad $\mathcal{F}'$, esisterà quindi una curva piana $\mathcal{T}$ di π_P che interseca su $\mathcal{F}'$ solo P, curva per cui valgono le precisazioni esposte nell'enunciato. Essendo $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \mathcal{T} \cap \pi_P \cap \mathcal{F} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}' = \{P\}$, ne segue la tesi.

Concludiamo avvertendo che, nel caso in cui k sia un corpo di caratteristica zero e più che numerabile, si può dimostrare per induzione, a partire dalla Prop. 7), § 3), la seguente proposizione, di cui tralasciamo la dimostrazione

PROPOSIZIONE 2). *Ogni cono cubico irriducibile Γ, tale che $V(\Gamma)$ abbia dimensione $n-3$, in $\mathbb{P}_k^n$, ove k è un corpo di caratteristica zero, algebricamente chiuso e più che numerabile, non è a punti s.i.c.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, N. Zanichelli Editore, Bologna, 1924.
[2] R. Gattazzo, *Punti di tipo 9 di una cubica ellittica*, Rend. del Sem. Mat. di Padova, 1979, pp. 285-301.
[3] G. Salmon, *A Treatise on the Analytic Geometry of three dimensions*, Dublino, 1882, p. 487.
[4] E. Stagnaro, *Le superficie cubiche di* $\mathbf{P}^3$ *a curve sottoinsieme intersezione completa*, Atti Acc. Lig. Sc. Lett., **31** (1974), pp. 138-148.
[5] E. Stagnaro, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 158-179.
[6] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 Marzo 1982.