RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Problema di Cauchy semiglobale in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 69 (1983), p. 169-179

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__169_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 69 (1983)

Problema di Cauchy semiglobale in due variabili.

GIULIANO BRATTI (*)

0. In R^2 la variabile sia (x, y). $P = P(D_x, D_y)$ sia un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti.

Se $N = (\alpha, \beta)$ è un vettore non nullo di R^2, indicherò con H il semipiano di R^2 definito dalla disequazione: $\alpha x + \beta y \leqq 0$; e con $G(H)$ il sottospazio di $C^\infty(R^2)$ definito da: f sta in $G(H)$ se e solo se la sua restrizione su H, f/H, è nulla.

Dal punto di vista dell'Analisi Funzionale, la risolubilità univoca del problema di Cauchy per P, con dati nel complementare chiuso di H, è equivalente alla richiesta che

$$P: G(H) \to G(H)$$

sia un automorfismo topologico, ovvero che P sia iperbolico rispetto ad N, come si può dedurre da (3): teoremi 5.4.1 e 5.6.4.

In questo lavoro, mi propongo di indagare su di un problema analogo a quello di Cauchy, e lo chiamerò: « *Problema di Cauchy semiglobale* », (la risolubilità del quale è tra l'altro connessa alla risolubilità di certi sistemi differenziali sovradeterminati del tipo: $Pu = f$, $Qu = 0$), relativo alla caratterizzazione di quegli operatori P per i quali per « abbastanza » aperti B di R^2 si possa avere

$$P\big(G(B)\big) = G(B)$$

dove, ormai è naturale, $G(B) = \big(f \in C^\infty(R^2): f/B = 0\big)$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35100 Padova.

Nel seguito: il paragrafo uno sarà dedicato alle notazioni ed a qualche richiamo; nel due, oltre che a riportare alcuni teoremi dell'Analisi Funzionale interessanti questo lavoro, saranno sviluppati i preliminari per la dimostrazione del risultato principale qui contenuto

TEOREMA. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) per ogni aperto B di R^2, convesso e limitato, si ha: $P(G(B)) = G(B)$;

b) per ogni aperto B di R^2, P-convesso e limitato, si ha: $P(G(B)) = G(B)$;

c) P è iperbolico rispetto ad ogni vettore di R^2 non caratteristico.

La dimostrazione di questo teorema sarà svolta nel paragrafo tre.

1. In R^n la variabile sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Se A è un aperto di R^n, per brevità porrò:

$$C_c^\infty(A) = D(A) \qquad \text{e} \qquad C^\infty(A) = E(A),$$

con le usuali topologie; $D'(A)$ ed $E'(A)$ saranno i duali (forti) rispettivi.

Se $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha D^\alpha$ è un operatore differenziale lineare, a coefficienti costanti, indicherò con

$${}^tP = {}^tP(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a^\alpha D^\alpha$$

il trasposto di P.

DEFINIZIONE 1. *A è P-convesso se e solo se ${}^tP(E'(A))$ è chiuso in $E'(A)$.*

La P-convessità di A è condizione necessaria e sufficiente al fine d'avere

$$P(E(A)) = E(A)$$

(visto che ${}^tP\colon E'(A) \to E'(A)$ è sempre iniettiva); essa si caratterizza bene, (3), pag. 90, per gli aperti di R^2: se A è un aperto di R^2, A è P-convesso se e solo se ogni linea caratteristica di P interseca A in un connesso.

Se (A, B) è una coppia di aperti di R^n, tale che la chiusura di B, B^-, è contenuta in A, porrò

$$G_A(B) = (f \in E(A) : f/B = 0)\ ; \qquad e\colon \operatorname{Ker} P/A = (f \in E(A) : Pf = 0)\,.$$

Poichè $E(A)$ è uno spazio di Fréchet-Schwartz (brevemente: è un FS-spazio), anche $G_A(A)$ e $\operatorname{Ker} P/A$, con le topologie dedotte da $E(A)$, ed $E(A)/(\operatorname{Ker} P/A) \cap G_A(B)$, con la topologia quoziente, sono FS-spazi [2], pagg. 332 e segg.

Infine: la definizione, e le proprietà degli operatori P che son iperbolici rispetto a qualche vettore di R^n, sono quelle elencate nel capitolo V di [3]; ai fini di questo lavoro, particolare interesse avranno i teoremi 5.3.3 e 5.6.3 di quel capitolo.

2. Oltre al teorema di Hahn-Banach (prolungamento continuo dei funzionali), farò uso, nel seguito, dei seguenti teoremi:

A) *E ed F sian due spazi di Fréchet; se $f: E \to F$ è lineare e continua, allora f è suriettiva se e solo se la sua trasposta ${}^t f: F' \to E'$ è iniettiva ed ha immagine chiusa;*

B) *E ed F sian due spazi vettoriali topologici, localmente convessi; se sono spazi di Fréchet, o duali forti di spazi di Fréchet, allora: se $f: E \to F$ è lineare, continua e suriettiva, f è aperta;*

C) *$(E_t, t \in A, \geq, Q_{ts}\ t \geq s)$ sia un sistema induttivo di spazi vettoriali topologici localmente convessi e di Hausdorff; $Q_{ts}: E_s \to E_t$ sia lineare e continua; F_t sia il duale topologico di E_t.*

Se si pone $P_{st}: F_t \to F_s$ definita da

$$(x_s, P_{st}(y_t)) = (Q_{ts}(x_s), y_t)$$

si ha

1) *$(F_t, t \in A, \geq, P_{st}\ t \geq s)$ è un sistema proiettivo;*

2) *il duale topologico del limite induttivo* $\lim (E_t)$, *dotato della topologia limite induttivo, è il limite proiettivo* $\lim (F_t)$, (5), pag. 150;

D) *Se E ed F sono spazi vettoriali topologici, duali forti di FS-spazi; e se $f: E \to F$ è lineare e continua, allora $f(E)$ è chiuso in F se e solo se lo è per successioni.*

Indicherò con $G'_A(B)$ il duale forte di $G_A(B)$.

LEMMA 1. *$G'_A(B)$ è isomorfo ed omeomorfo a $E'(A)/E'(B^-)$, quest'ultimo spazio dotato della topologia quoziente.*

DIMOSTRAZIONE. $\psi\colon E'(A)/E'(B^-) \to G'_A(B)$ sia l'applicazione lineare definita da

$$\psi(\bar{\mu}) = \nu$$

se $\nu \in \bar{\mu} = \mu + E'(B^-)$.

ψ è un isomorfismo suriettivo, visto che $G_A(B)$ ha la topologia dedotta da $E(A)$; dimostrerò, ora, che ψ è continua.

$\bar{\mu}_j$ sia una rete convergente a zero in $E'(A)/E'(B^-)$; se V è un intorno di zero in $G'_A(B)$, V è del tipo

$$V = V(L, \delta) = \big(\mu \in E'(A)\colon |\mu(L)| \leq \delta\big)$$

dove L è limitato in $G_A(B)$ ed δ è in R_+ (reali positivi).

V è intorno di zero anche in $E'(A)$, poichè L è limitato anche in $E(A)$; visto che la proiezione canonica $\pi\colon E'(A) \to E'(A)/E'(B^-)$, $\pi(V) = V + E'(B^-)$, è aperta, $\pi(V)$ è intorno di zero in $E'(A)/E'(B^-)$; allora: esiste j_0 tale che se $j \geq j_0$ si ha

$$\bar{\mu}_j \in V + E'(B^-)$$

e quindi: $\mu_j = \varrho_j + \sigma_j$, con $\varrho_j \in V$ e $\sigma_j \in E'(B^-)$. Ciò dimostra che la ψ è continua.

L'applicazione lineare e continua

$$\psi \circ \pi\colon E'(A) \to G'_A(B)$$

è suriettiva fra duali forti di spazi di Fréchet che son riflessivi; in base al teorema B) citato di sopra, $\psi \circ \pi$ risulta aperta, così che la stessa ψ è aperta.

La dimostrazione è conclusa.

Determinato il duale forte di $G_A(B)$, il teorema A) fornisce immediatamente il

TEOREMA 1. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) $P\big(G_A(B)\big) = G_A(B)$;

b) *se* μ *sta in* $E'(A)$ *e se* $\operatorname{supp}({}^tP\mu) \subset B^-$, *anche* $\operatorname{supp}(\mu) \subset B^-$; *ed inoltre*: ${}^tP\big(E'(A)\big) + E'(B^-)$ *è chiuso in* $E'(A)$.

DIMOSTRAZIONE.

a) implica *b*).

Poichè ${}^tP\colon E'(A)/E'(B^-) \to E'(A)/E'(B^-)$ definita da

$$ {}^tP\big(\mu + E'(B^-)\big) = {}^tP(\mu) + E'(B^-) $$

deve essere iniettiva, si ha:

se μ sta in $E'(A)$ e se ${}^tP(\mu)$ è in $E'(B^-)$, allora ${}^tP\big(\mu + E'(B^-)\big) = {}^tP(\mu) + E'(B^-)$ è lo zero di $E'(A)/E'(B^-)$; dunque $\mu + E'(B^-)$ deve esser lo zero di $E'(A)/E'(B^-)$, ovvero supp $(\mu) \subset B^-$.

${}^tP(\mu_j) + \nu_j$ sia una rete in $E'(A)$ convergente debolmente a q in $E'(A)$. In $E'(A)/E'(B^-)$ si ha:

$$ \lim_j {}^tP(\bar\mu_j) = \lim_j \big({}^tP(\mu_j)\big)^- = \bar q $$

e quindi

$$ \bar q = \big({}^tP(\mu)\big)^- $$

per qualche μ in $E'(A)$.

b) implica *a*).

La prima parte della proposizione *b*) implica che ${}^tP$ è iniettiva.

${}^tP(\bar\mu_j)$ sia una rete convergente a $\bar q$ in $E'(A)/E'(B^-)$; dimostrerò che q sta in $E'(A) + E'(B^-)$; dopo di che la dimostrazione è conclusa.

Infatti: poiché ${}^tP\big(E'(A)\big) + E'(B^-)$ è chiuso in $E'(A)$, se q non appartenesse a quello spazio, in base al teorema di Hahn-Banach esisterebbe f in $E(A)$ tale che

$$ \text{(a)} \qquad q(f) \neq 0\,; \qquad \text{e:} \quad Pf = 0 \quad \text{e} \quad f/B = 0\,. $$

(a) è assurda, poichè $q(f) = \lim_j \big({}^tP(\mu_j)(f)\big) = 0$.

La dimostrazione è conclusa.

OSSERVAZIONI.

A) Si supporrà sempre che A sia connesso; è immediato allora verificare che la condizione $P\big(G_A(B)\big) = G_A(B)$ esclude che P possa esser ellittico.

B) Se $P(G_A(B)) = G_A(B)$, e se B è limitato, usando lo stesso ragionamento di [3], teorema 3.5.4, pag. 81, è facile dimostrare che A deve esser P-convesso.

C) Nel caso in cui $(A, B) \subset R^2 \times R^2$, la condizione $P(G_A(B)) = G_A(B)$ mostra che B « vicino » all'esser P-convesso, senza esserlo certamente come dimostra il facile esempio seguente

sia $P = D_x$; sia $A = R^2$ e $B = ((x, y) \in R^2 \colon |x| < 1$ e $|y| < 1) \sim ((0, y) \colon y \geq 0)$. Si ha, ovviamente

$$P(G^{R^2}(B)) = G^{R^2}(B),$$

e B non è D_x-convesso.

D) Se (A, B) sono aperti di R^2, si può dimostrare che: la condizione $P(G_A(B)) = G_A(B)$ implica che: se r è una retta caratteristica di P; se $(\xi_1, \xi_2) \subset r \cap (B \sim \xi_3)$, e se $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) \cap (R^2 \sim B)$, allora ξ_3 sta sulla frontiera di B.

E) Se $P = P(D_x, D_y)$ non è ellittico, e se $B \subset R^2$ è P-convesso, allora vale per P e B la prima parte della proposizione *b*) del teorema 1: la verifica è immediata.

3. $P = P(D_x, D_y)$ sia un operatore differenziale lineare, in due variabili, a coefficienti costanti.

Se B è un aperto di R^2, per brevità porrò

$$G_{R^2}(B) = G(B).$$

TEOREMA 2. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *per ogni aperto* B *di* R^2, *limitato e convesso, si ha*: $P(G(B)) = G(B)$;

b) *per ogni aperto* B *di* R^2, *limitato e* P-*convesso, si ha*: $P(G(B)) = G(B)$;

c) P *è iperbolico rispetto ad ogni vettore di* R^2 *non caratteristico.*

DIMOSTRAZIONE.

a) implica *c*).

In base all'osservazione A del paragrafo due, P non può esser ellittico. Sia N' un vettore caratteristico di P, e sia N un vettore non caratteristico di P; si può supporre direttamente che sia $N = (0, 1)$, e che P abbia solo N' come vettore caratteristico: negli altri casi la dimostrazione è una leggera variante di questa.

Dimostrerò che: se H è il semipiano di R^2 dei punti con ordinata non positiva, allora l'ipotesi $P(G(B)) = G(B)$, per ogni B di R^2, aperto limitato e convesso, implica che

$$P(G(H)) = G(H)$$

dopo di che l'iperbolicità di P rispetto al vettore $(0, 1)$ è conseguenza della dimostrazione del teorema 5.4.1 di [3].

Sia B_n il parallelogramma con lati paralleli all'asse x, ed ortogonali al vettore N', di vertici $(-n, 0)$, $(n, 0)$ ecc., contenuto in H. Posto

$$L_n = \big(G(B_n) \cap \operatorname{Ker} P\big)\,; \qquad \text{e:} \quad M_n = E(R^2)/L_n$$

e posto

$$j_{n+1}\colon M_{n+1} \to M_n$$

definita da $j_{n+1}(f + L_{n+1}) = f + L_n$, il sistema $(M_n, j_n, n \in N)$ è un sistema (di FS-spazi) proiettivo.

Posto

$$M = \varprojlim (M_n) \subset \Pi_n(M_n)$$

M limite proiettivo algebrico, si considerino le

$$\pi_n\colon M \to M_n$$

e si ponga su M la topologia limite proiettivo definita dagli M_n dalle π_n. È facile verificare che con tale topologia, M risulta un sottospazio chiuso del prodotto $\Pi_n(M_n)$. Dimostrerò, ora, che l'applicazione lineare

$$j\colon E(R^2) \to M$$

definita da $j(f) = \big((f + L_n)\big)$ è un isomorfismo ed un omeomorfismo (suriettivo). Risulterà quindi, che anche la trasposta ${}^tj$ della j

$${}^tj\colon \big(\varprojlim (M_n)\big)' \to E'(R^2)$$

è un isomorfismo ed un omeomorfismo; e poichè: M_n è un FS-spazio; ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B_n^-)$ è il suo duale, in base a C) del paragrafo due, si avrà

$$ {}^tj(M)' = {}^tj(\underrightarrow{\lim}(M_n')) = \bigcup_n \left({}^tP(E'(R^2)) + E'(B_n^-)\right) = $$
$$ = {}^tP(E'(R^2)) + E'(H) = E'(R^2). $$

In definitiva: poiché H è convesso, se $\mu \in E'(R^2)$ e supp $({}^tP(\mu)) \subset H$, anche supp (μ) è contenuto in H; ${}^tP(E'(R^2)) + E'(H)$ è chiuso in $E'(R^2)$, sicchè $P(G(H)) = G(H)$, ovvero P è iperbolico rispetto a $(0, 1)$.

A) Che j sia continua segue dal fatto che $\pi_n \circ j : E(R^2) \to M_n$ è la proiezione canonica.

B) Che j sia iniettiva dipende dal fatto che la frontiera di H non è caratteristica. Infatti: se $j(f) = 0$, si ha

$$ f \in L_n, \quad n \in N; \qquad \text{ovvero:} \quad Pf = 0 \quad \text{e} \quad f \in G(B_n), \quad n \in N; $$

in base al corollario 5.3.1 di (3), segue che $f = 0$.

C) j è suriettiva. Infatti: se $((f_n + L_n)) \in \underleftarrow{\lim}(M_n)$, in base alla definizione di limite proiettivo risulta

$$ f_{n+1} = f_1 + g_1 + \dots + g_n $$

con $g_i \in L_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Poichè g_i è nulla su B_i e $P(g_i) = 0$ su R^2, in base al teorema 5.3.3 di [3], g_i risulta nulla su tutta la striscia S_i generata dal parallelogramma B_i (dalle rette ortogonali a N' e passanti per il segmento $[-n, n]$). Allora la funzione $fE(R^2)$ definita da

$$ f = f_i $$

nella striscia S_i risolve l'equazione $j(f) = ((f_n + L_n))$.

Basta dimostrare, ora, che c) implica b) per concludere, visto che ogni convesso è P-convesso.

c) implica b).

Poichè B è P-convesso, in base al teorema 1 ed all'osservazione D) del paragrafo due, per dimostrare la b) basterà dimostrare, in base al teorema D) del paragrafo due, che ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B^-)$ è chiuso per successioni in $E'(R^2)$ (¹).

A) Se $\lim_n {}^tP(\mu_n) + \nu_n = q$ in $E'(R^2)$, per n abbastanza grande si ha supp $({}^tP(\mu_n) + \nu_n) \subset K$, con K intorno limitato del supporto di q; per la P-convessità di R^2, si può supporre che supp $(\mu_n) \subset K'$, con K' aperto e limitato.

B) p sia un punto della frontiera di B: $p \in \partial B$. Per ogni $p \in \partial B$, esiste un cono aperto e convesso, Γ_p, con vertice in $(0, 0)$, tale che:

i) $p + \Gamma_p \cap B = \emptyset$;

ii) esiste $E_p \in D'(R^2)$ tale che

$$PE_p = \delta_p\,; \qquad \text{e} \quad \operatorname{supp}(E_p) \subset \Gamma_p^-\,,$$

in base a [3], teorema 5.6.1.

Si ha: $\bigcup(\Gamma_p, p \in \partial B) = R^2/B^-$; inoltre: se $\varphi \in D(p + \Gamma_p)$, poichè supp $(E_p * \varphi)$ è contenuto in $(p + \Gamma_p)$, risulta

$$\lim_n \langle \mu_n \cdot \varphi \rangle = \lim_n \langle \mu_n \cdot P(E_p * \varphi) \rangle = \lim_n \langle {}^tP(\mu_n) + \nu_n \cdot E_p \rangle = \langle q \cdot E_p \rangle\,;$$

in base a (8), teorema XIII, esiste λ_p in $D'(p + \Gamma_p)$ tale che

$$\lim_n \mu_n = \lambda_p$$

in $D'(p + \Gamma_p)$.

Si osservi che: in base ad A) di sopra, si ha: supp $(\lambda_p) \subset (p + \Gamma_p) \cap K'$; ed inoltre: se $p' \in \partial B$, e se, con le notazioni di sopra, si ha

$$\lim_n \mu_n = \lambda_{p'}$$

in $D'(p' + \Gamma_{p'})$, allora non appena $Z = (p + \Gamma_p) \cap (p' + \Gamma_{p'}) \neq \emptyset$, le

(¹) Il teorema D) si applica così: ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B^-)$ è l'immagine, in $E'(R^2)$, dell'applicazione lineare e continua

$$({}^tP, i): E'(R^2) \times E'(B^-) \to E'(R^2)\,, \qquad ({}^tP, i)(\mu, \nu) = {}^tP(\mu) + \nu\,.$$

Gli spazi indicati sono duali forti di FS-spazi ($E'(B^-)$ è chiuso in $E'(R^2)$, ed è, quindi, il duale di $E(R^2)/G(B)$).

restrizioni di λ_p e di $\lambda_{p'}$ su $D(Z)$ coincidono. In base al « Principio di incollamente » [8], pag. 27, esiste λ in $D'(R^2/B^-)$ tale che: $\lim_n \mu_n = \lambda$. Indicata con q_1 la restrizione di q su $D(R^2/B^-)$, si può scrivere, allora

$$q_1 = {}^tP(\lambda)$$

con supp(λ) contenuto in $R^2/B^- \cap K'$.

Se si dimostra che esiste λ_0 in $E'(R^2)$ tale che $\lambda = \lambda_0/(R^2/B^-)$, la dimostrazione è conclusa.

(φ_n) sia una successione in $D(R^2/B^-)$ convergente a zero nella topologia indotta da $G(B)$. $\Gamma_{p_1}, \ldots, \Gamma_{p_n}$ siano n coni tali che

$$(R^2/B^-) \cap K' \subset \bigcup (\Gamma_{p_i})\,;$$

se α_i sta in $D(\Gamma_{p_i})$, e se $\sum_i \alpha_i = 1$, si ha

$$\lim_n \langle \lambda \cdot \varphi_n \rangle = \lim_n \Big(\sum_i \langle \lambda_{p_i} \cdot \alpha_i \varphi_n \rangle \Big)\,;$$

poichè λ_{p_i} è continua su $D(Z)$, dove $Z = (p_i + \Gamma_{p_i}) \cap \operatorname{supp}(\alpha_i)$, con la topologia indotta da $G(B)$, risulta $\lim_n \langle \lambda \cdot \varphi_n \rangle = 0$ (2).

La dimostrazione è conclusa.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Analytic convexity*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. di Sc., Serie IV, **7**, no. 2 (1980).

[2] A. GROTENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Publ. de Soc. de Matemática de São Paulo, 1958.

[3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

[4] L. HÖRMANDER, *On the characteristic Cauchy problem*, Ann. Math. (1968).

[5] J. L. KELLEY - I. NAMIOKA and co-authors, *Linear topological spaces*, D. Van Nostrand Comp., 1963.

(2) La chiusura di $D(p + \Gamma_p)$ in $G(B)$ è un FS-spazio; e la successione (μ_n) è limitata nel duale di quella chiusura.

[6] B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolutions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **6** (1955-56).
[7] A. Martineau, *Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*, Journ. An. Math. Jérusalem (1963).
[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 ottobre 1981.