RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

R. BALLI
A. C. GRIOLI

Sulle precessioni semiregolari ad asse non verticale del solido pesante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 71-78
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__71_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Sulle precessioni semiregolari ad asse non verticale del solido pesante.

R. BALLI - A. C. GRIOLI (*)

1. Il problema della possibilità dinamica di precessioni non regolari ad asse verticale del solido pesante fissato senza attrito per un suo punto O, è stato risolto [1] riconoscendo che le uniche precessioni di questo tipo (oltre a quelle degeneri nelle rotazioni non uniformi di Mlodzeevskii [2]) sono quelle determinate da G. Grioli [3]. Si tratta di moti di precessione semiregolare con velocità di precessione costante e velocità di rotazione propria variabile nel tempo (II specie [4]) e costituiscono una classe di moti alla Hess.

Nella presente nota ci si propone di esaminare la possibilità dinamica, per il solido pesante, di moti di precessione semiregolare di II specie senza fare ipotesi restrittive sull'asse di precessione.

Si riconosce che moti di questo tipo sono dinamicamente possibili solo se l'asse di precessione è verticale; si può quindi concludere che le classi di moto sopra citate esauriscono la classe delle precessioni semiregolari di II specie per il solido pesante. Eventuali precessioni ad asse non verticale, che non siano quelle regolari determinate in [5], vanno quindi ricercate tra le precessioni semiregolari di I specie, o nella classe più ampia delle precessioni non regolari.

2. Si fissi in tutta generalità un riferimento $T(0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ in cui $\boldsymbol{i}_3$ sia parallelo all'asse di figura e rispetto al quale l'omografia d'inerzia

(*) Indirizzo degli AA.: R. BALLI: Istituto Matematico dell'Università - Perugia; A. C. GRIOLI: Istituto di Analisi e Meccanica dell'Università - Padova.

del solido assuma la forma ridotta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

I moti di precessione semiregolare di II specie sono caratterizzati dalla seguente forma della velocità angolare:

$$\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{\gamma} + \mu \boldsymbol{i}_3 \tag{2.2}$$

con ν velocità di precessione costante, μ velocità di rotazione propria variabile nel tempo, $\boldsymbol{\gamma}$ direzione dell'asse di precessione invariabile nello spazio. Le equazioni che regolano il moto sono le seguenti:

$$\sigma \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \sigma \boldsymbol{\omega} = MgOG \times \boldsymbol{c} \tag{2.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.5}$$

in cui si è indicata con M la massa totale del solido, con G il suo baricentro, con g l'accelerazione di gravità e con $\boldsymbol{c}$ il versore della verticale. Tenendo conto di (2.1) e (2.2), le (2.3), (2.4) e (2.5) e gli integrali primi che il sistema ammette, danno il seguente sistema differenziale:

$$\dot{\mu} = \frac{A-B}{C} \nu^2 \gamma_1 \gamma_2 + \frac{A'}{C} \nu^2 \gamma_1 \gamma_3 - \frac{B'}{C} \nu^2 \gamma_2 \gamma_3 + \frac{\xi_1}{C} c_2 - \frac{\xi_2}{C} c_1 \tag{2.6}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \mu \gamma_2 \tag{2.7}$$

$$\dot{\gamma}_2 = -\mu \gamma_1 \tag{2.8}$$

$$\dot{c}_1 = c_2 \mu + \nu(\gamma_3 c_2 - \gamma_2 c_3) \tag{2.9}$$

$$\dot{c}_2 = -c_1 \mu + \nu(\gamma_1 c_3 - \gamma_3 c_1) \tag{2.10}$$

$$\dot{c}_3 = \nu(\gamma_2 c_1 - \gamma_1 c_2) \tag{2.1\tau}$$

e il sistema di equazioni:

$$\gamma_3 = \text{cost.} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &-B'C\mu^2 + B'C\nu^2\gamma_1^2 + C(A-B-C)\nu\mu\gamma_1 + \\ &+ A'(B-A+C)\nu^2\gamma_1\gamma_2 - 2B'C\nu\gamma_3\mu + \\ &+ [A'^2 + C(A-C)]\nu^2\gamma_3\gamma_1 + A'B'\nu^2\gamma_3\gamma_2 + \\ &+ (A'\xi_2 - C\xi_3)c_1 - A'\xi_1 c_2 + C\xi_1 c_3 - B'C\nu^2\gamma_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} &A'C\mu^2 - A'C\nu^2\gamma_2^2 + C(A-B+C)\nu\mu\gamma_2 + \\ &+ B'(B-A-C)\nu^2\gamma_1\gamma_2 + 2A'C\nu\gamma_3\mu + \\ &+ [B'^2 + C(C-B)]\nu^2\gamma_3\gamma_2 - A'B'\nu^2\gamma_3\gamma_1 + \xi_2 B'c_1 + \\ &+ (-B'\xi_1 + C\xi_3)c_2 - C\xi_2 c_3 + A'C\nu^2\gamma_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &C\mu^2 + A\nu^2\gamma_1^2 + B\nu^2\gamma_2^2 - 2B'\nu\mu\gamma_1 - 2A'\nu\mu\gamma_2 + \\ &+ 2C\nu\gamma_3\mu - 2B'\nu^2\gamma_3\gamma_1 - 2A'\nu^2\gamma_3\gamma_2 + 2\xi_1 c_1 + \\ &+ 2\xi_2 c_2 + 2\xi_3 c_3 + C\nu^2\gamma_3^2 - E_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &A\nu\gamma_1 c_1 + B\nu\gamma_2 c_2 - B'\nu\gamma_1 c_3 - A'\nu\gamma_2 c_3 - B'\mu c_1 - \\ &- A'\mu c_2 + C\mu c_3 - B'\nu\gamma_3 c_1 - A'\nu\gamma_3 c_2 + C\nu\gamma_3 c_3 - k_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - 1 = 0 \tag{2.17}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0 \tag{2.18}$$

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 - \lambda = 0\,. \tag{2.19}$$

Si è usata la notazione

$$c_i = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{i}_i; \quad \gamma_i = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{i}_i; \quad \xi_i = MgOG\cdot\boldsymbol{i}_i\,.$$

Le (2.13), ..., (2.19) costituiscono un sistema Σ di sette relazioni in termini finiti nelle sei variabili di moto $\mu(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ e rappresentano nello spazio proiettivo $R^6(\mu, \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2, c_3, z)$ altrettante ipersuperficie algebriche. La possibilità dinamica di un moto di precessione semiregolare di II specie implica l'esistenza di almeno una curva reale propria comune alle dette ipersuperficie. Il sistema Σ delle dette equazioni deve dunque definire in R^6 delle varietà algebriche V_k di dimensione $k \geqslant 1$, ad almeno una delle cui parti reali proprie apparterrà la curva. Le varietà V_k hanno intersezioni V_{k-1} con ogni iperpiano di R^6 e in particolare con l'iperpiano improprio π_∞. L'intersezione V_{k-1}^∞ della varietà V_k con detto iperpiano è rappresentata dal sistema:

$$-B'C\mu^2 + B'C\nu^2\gamma_1^2 + C(A-B-C)\nu\mu\gamma_1 + A'(B-A+C)\nu^2\gamma_1\gamma_2 = 0$$

$$A'C\mu^2 - A'C\nu^2\gamma_2^2 + C(A-B+C)\nu\mu\gamma_2 + B'(B-A-C)\nu^2\gamma\gamma_1\gamma_2 = 0$$

$$C\mu^2 + A\nu^2\gamma_1^2 + B\nu^2\gamma_2^2 - 2B'\nu\gamma_1\mu - 2A'\nu\gamma_2\mu = 0$$

$$A\nu\gamma_1c_1 + B\nu\gamma_2c_2 - B'\nu\gamma_1c_3 - A'\nu\gamma_2c_3 - B'\mu c_1 - A'\mu c_2 + C\mu c_3 = 0$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$$

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = 0$$

$$z = 0\,.$$

Nell'eventualità che non sia verificata nessuna delle condizioni strutturali o di moto:

i) $C(A-B) - B'^2 = 0,\ A' = 0;$

ii) $A = B,\ A' = B' = 0.$

che saranno esaminate in seguito, si riconosce che V_{k-1}^∞ è costituita dalle seguenti varietà:

$$V_1^\infty\ z = \gamma_1 = \gamma_2 = \mu = 0,\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0;$$

$$V_0^\infty\ z = \gamma_1 = \gamma_2 = \mu = 0,\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0,\ -B'c_1 - A'c_2 + Cc_3 = 0\,.$$

È agevole verificare che V_1^∞ è una componente di V_k interamente contenuta nell'iperpiano improprio π_∞ e non è traccia di una V_2 avente parti reali proprie. Con un calcolo diretto si riconosce infatti che l'intersezione delle varietà tangenti alle ipersuperficie del sistema Σ in un generico punto di V_1^∞ ha dimensione 1, e quindi la varietà tangente a V_1^∞ (essendo contenuta in detta intersezione) ha al più dimensione 1. L'eventuale varietà definita dal sistema Σ con parte reale propria non costituita da un numero finito di punti è dunque al più di dimensione 1 avendo come traccia su π_∞ la V_0^∞. Questa V_1 non potendo essere interamente contenuta nel sottospazio di R^6 $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, deve proiettarsi nel sottospazio $R^2(\gamma_1, \gamma_2, z)$ sulla circonferenza di equazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2$.

La curva proiezione in R^2 deve quindi passare per i punti ciclici J e $\tilde{J}$ di R^2. Poichè i punti J e $\tilde{J}$ appartengono alla retta impropria di R^2 essi devono essere proiezioni di punti impropri della V_1 e quindi dei punti V_0^∞. Dal momento che V_0^∞ appartiene al supporto della proiezione, la condizione precedente si verifica solo se J e $\tilde{J}$ appartengono all'elemento proiettante che contiene la varietà tangente a Σ in uno dei punti V_0^∞. Questo però non è possibile perchè, come si dimostra con un calcolo diretto, detti punti non appartengono all'intersezione delle varietà tangenti alle ipersuperficie del sistema Σ. Ci si riconduce quindi al solo esame dei casi i) ed ii).

3. Caso i)

$$C(A - B) - B'^2 = 0 , \qquad A' = 0 .$$

In questo caso la V_{k-1}^∞ intersezione di V_k con π_∞ è costituita oltre che da V_0^∞ (nelle cui equazioni si sia posto $A' = 0$) anche dalla

$$W_1^\infty \colon\ z = 0;\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0;\ c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = 0;\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0;$$

$$C\mu - \nu B'\gamma_1 = 0$$

che contiene V_1^∞.

Come nel caso generale si riconosce che i punti V_0^∞ non sono traccia di una V_1 non appartenente all'R^4: $\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = 0$. Analogamente a quanto fatto per la V_1^∞ nel caso precedente, si riconosce che W_1^∞ è una componente di V_k interamente contenuta nell'iperpiano π_∞, in quanto anche l'intersezione delle varietà tangenti alle ipersuperficie del sistema Σ nel punto di W_1 di coordinate $(\nu B'/C, 1, i, 1, i, 0, 0)$ ha dimensione 1 a meno che non sia $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Sotto questa ulteriore condizione W_1^∞ ha varietà tangente che non appartiene a π_∞ e quindi se è traccia di una V_2 ne è traccia con molteplicità 1. La V_2 ha quindi una intersezione pari al suo ordine con lo spazio R^4 di equazioni $z = 0$, $C\mu - \nu B'\gamma_1 = 0$ e quindi appartiene ad uno degli spazi lineari che hanno R^4 per supporto. In conclusione deve appartenere ad uno spazio di equazione:

$$C\mu - \nu B'\gamma_1 = \text{cost.} \tag{3.1}$$

La (2.15) nelle condizioni in esame assume la forma semplificata

$$2\xi_3 c_3 = -\left[\frac{1}{C}(C\mu - B'\nu\gamma_1)^2 + 2\nu\gamma_3(C\mu - B'\nu\gamma_1) + \bar{E}\right]$$

con $\bar{E} = C\nu^2\gamma_3^2 - B\nu^2(1-\gamma_3^2) - E_0$.

Stante la (3.1) da questa equazione si riconosce che è

$$c_3 = \text{costante} .$$

Si è così riconosciuto che se sono verificate le condizioni:

$$C(A-B) - B'^2 = 0 ; \qquad A' = 0 ; \qquad \xi_1 = \xi_2 = 0 ,$$

le uniche precessioni possibili sono ad asse verticale e sono quindi quelle determinate in [3].

4. Caso ii)

$$A = B , \qquad A' = B' = 0 .$$

Si può assumere in tutta generalità $\xi_1 = 0$.

Le equazioni (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) assumono la forma semplificata

$$\gamma_1[-C\nu\mu + (A-C)\nu^2\gamma_3] = \xi_3 c_1 \tag{4.1}$$

$$\gamma_2[-C\nu\mu + (A-C)\nu^2\gamma_3] = \xi_3 c_2 - \xi_2 c_3 \tag{4.2}$$

$$C\mu^2 + 2C\nu\gamma_3\mu + 2\xi_2 c_2 + 2\xi_3 c_3 + \bar{\bar{E}} = 0 \tag{4.3}$$

con $\bar{\bar{E}} = A\nu^2(1-\gamma_3^2) + C\nu^2\gamma_3^2 - E_0$

$$C\mu c_3 + (C-A)\nu\gamma_3 c_3 - \bar{k} = 0 \tag{4.4}$$

con $\bar{k} = k_0 - A\nu\lambda$.

Da (4.3) e (4.4) si ottengono:

$$c_3 = c_3(\mu) = \frac{\bar{k}}{C\mu + (C - A)\nu\gamma_3} \tag{4.5}$$

$$c_2 = c_2(\mu) = \frac{a_1\mu^3 + a_2\mu^2 + a_3\mu + a_4}{2\xi_2\,[C\mu + (C - A)\nu\gamma_3]} \tag{4.6}$$

con

$$a_1 = -C^2$$

$$a_2 = \nu\gamma_3(A - 3C)$$

$$a_3 = -2C\nu^2\gamma_3^2(C - A) - \bar{\bar{E}}C$$

$$a_4 = -2\xi_3\bar{k} - \bar{\bar{E}}\nu\gamma_3(C - A)\,.$$

Eliminando da (4.1), (4.2) e (2.18) γ_1 e γ_2 e utilizzando (4.5) e (4.6), si ottiene un polinomio del quarto ordine in μ che deve essere verificato al variare di $\mu = \mu(t)$; devono quindi essere identicamente nulli i suoi coefficienti. Poichè il coefficiente di μ^4 è $C^4\nu^2(1 - \gamma_3^2)$ il suo annullarsi implica:

$$\nu = 0 \qquad \text{oppure } \gamma_3^2 = 1\,,$$

e quindi precessioni degeneri in rotazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Balli, *Precessioni ad asse verticale del solido pesante,* Rend. Sem. Mat. Padova, **55** (1976).

[2] E. Leimanis, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point,* Springer tracts in Natural Philosophy, **7** (1965).

[3] G. Grioli, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione,* Atti Univ. Ferrara, sez. **7**, **3** (1954).

[4] E. Pucci, *Esistenza e determinazione delle precessioni semiregolari ad asse verticale di un corpo rigido in un campo di forze newtoniano,* Rend. Sem. Mat. Padova, **54** (1975).

[5] G. Grioli, *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico*, Annali di Matematica, serie IV, **26** (1947).

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 Aprile 1982.