Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Nardini

Problemi di magnetodinamica in un fluido conduttore soggetto a compressione crescente

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 63-70

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__63_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Problemi di magnetodinamica in un fluido conduttore soggetto a compressione crescente.

RENATO NARDINI (*)

1. Introduzione e Riassunto.

Nel 1965 M. Primicerio ha studiato [1] l'andamento del campo magnetico in un fluido omogeneo, compressibile, non viscoso ed elettricamente conduttore che occupa il dominio $\mathfrak{D}(t)$, variabile col tempo, limitato da due piani paralleli perfettamente conduttori, di cui uno Σ è fisso e l'altro Σ_1 trasla verso il primo con velocità costante perpendicolare alla giacitura comune a Σ e Σ_1; è presente inizialmente un campo magnetico $\boldsymbol{H}_0$ assegnato avente direzione costante parallela ai due piani e intensità dipendente solo dalla loro distanza. È così schematizzato un fenomeno che talvolta si utilizza in fisica del plasma per ottenere campi magnetici molto intensi: essendo infatti nullo il flusso del campo magnetico attraverso i due piani, nel volume da essi limitato e che via via si riduce, le linee di campo risulteranno sempre più compresse e quindi l'intensità aumenterà progressivamente.

Nella presente nota si studia lo stesso problema prendendo però in considerazione valori di $\boldsymbol{H}_0$ aventi simmetria assiale: scelto un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z con l'asse z perpendicolare ai piani (orientata da Σ_1 a Σ) e con l'origine sul piano fisso, indicato con $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse z, la traslazione di Σ_1 avvenga con velocità costante $w\boldsymbol{k}$ $(w > 0)$. Dopo aver introdotto il problema (n. 2), si sup-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

pone (n. 3) che $\boldsymbol{H}_0$ sia ottenuto, secondo lo schema di Biot e Savart, mediante una corrente elettrica continua di intensità costante che percorre un filo rettilineo illimitato normale a Σ e Σ_1. Si considera poi (n. 4) il caso in cui $\boldsymbol{H}_0$ è radiale.

2. Impostazione del problema.

Detto $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico, $\boldsymbol{v}$ la velocità delle particelle del fluido, ϱ la sua densità, η supposta costante la sua viscosità magnetica (è $\eta = 1/\mu\sigma$, dove μ è la permeabilità magnetica e σ la conducibilità elettrica), ci serviamo dell'equazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{H}, \tag{1}$$

che abitualmente si ricava dalle equazioni della magnetofluidodinamica galileiana nella quale, com'è noto, si trascurano la corrente elettrica di spostamento e la densità di carica elettrica spaziale. Ovviamente deve essere anche

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 . \tag{2}$$

Com'è stato fatto in [1], supponiamo che all'istante iniziale la densità del fluido sia costante ed uguale a ϱ_0 e inoltre supporremo che la compressione graduale del fluido avvenga in maniera quasi-statica, ossia attraverso successivi stati di equilibrio in modo che la densità ϱ risulti funzione solo del tempo. Allora alle (1) e (2) potremo associare soltanto l'equazione di continuità che, essendo $\varrho = \varrho(t)$, avrà la forma

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} . \tag{3}$$

Quali condizioni al contorno su Σ e Σ_1 supposti, come si è detto, perfettamente conduttori dell'elettricità, avremo [2]

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{k} = 0 , \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z} \times \boldsymbol{k} = 0 . \tag{4}$$

Quale condizione iniziale, che riguarda il campo $\boldsymbol{H}(P, t)$ con $P \in \mathfrak{D}(t)$, supporremo di assegnare

$$\boldsymbol{H}(P, 0) = \boldsymbol{H}_0(P) \qquad \text{con } P \in \mathfrak{D}(0) . \tag{5}$$

3. Caso di $\boldsymbol{H}_0$ secondo lo schema di Biot e Savart.

Supponiamo che $\boldsymbol{H}_0$ sia generato da una corrente continua che percorre con intensità costante i un filo rettilineo illimitato di raggio $\varepsilon > 0$ disposto secondo l'asse z; tale filo sarà supposto isolato elettricamente sia da Σ che da Σ_1. Detto $\boldsymbol{u}_\theta$ il versore delle linee θ, la (5) sarà specificata da

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{i}{2\pi r} \boldsymbol{u}_\theta \qquad (r > \varepsilon) . \tag{6}$$

Verifichiamo che per il problema introdotto al n. 2 è possibile la soluzione particolare per cui è

$$H_r = H_z = 0 , \qquad H_\theta = H_\theta(r, \theta, t) ; \tag{7}$$
$$v_r = v_\theta = 0 , \qquad v_z = v_z(r, \theta, z, t) .$$

Osserviamo che le (4) sono certamente soddisfatte e che la (2) diventa

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} = 0 ; \tag{8}$$

da (3) si ricava

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{d}{dt} \log \varrho$$

ossia, integrando,

$$v_z = - z \frac{d}{dt} \log \varrho + f(r, \theta, t) \tag{9}$$

con f funzione arbitraria, che deve essere identicamente nulla in quanto sul piano fisso Σ, cioè per $z = 0$, deve essere $v_z = 0$. D'altra parte su Σ_1, la cui equazione è $z = - z_0 + wt$ (con $z_0 > 0$), deve essere

$v_z = w$, per cui la (9) diventa

$$\frac{d}{dt}\log\varrho = \frac{1}{t_1 - t} \qquad (t_1 = z_0/w)\,; \tag{10}$$

tenendo conto del valore iniziale di ϱ, si ha perciò

$$\varrho = \frac{\varrho_0 t_1}{t_1 - t}, \qquad v_z = -\frac{z}{t_1 - t}. \tag{11}$$

È immediato verificare che è rot $\boldsymbol{v} = 0$, com'era prevedibile. Naturalmente il fenomeno sarà studiato solo per

$$t \in [0, t_1[\,, \qquad z \in [-z_0 + wt, 0]\,.$$

Volendo ora utilizzare la (1), osserviamo che, in base alle (2), (7), (8) e (11_2) si ha

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r H_\theta}{\partial r}\right)\boldsymbol{u}_\theta, \qquad \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = -H_\theta\frac{\partial v_z}{\partial z}\boldsymbol{u}_\theta\,.$$

Pertanto dalle tre equazioni scalari deducibili dalla (1) la sola che non si riduce ad un'identità è

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial t} = \frac{1}{t_1 - t}H_\theta + \eta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r H_\theta}{\partial r}\right) \qquad (r > \varepsilon)\,, \tag{12}$$

che va risolta con la condizione iniziale (6). Per la (12) consideriamo la soluzione particolare

$$H_\theta = \frac{1}{r}\,\Phi(t)$$

che è in accordo con le (8) e (6); quest'ultima ci dà

$$\Phi(0) = \frac{i}{2\pi},$$

mentre $\Phi(t)$ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{t_1 - t}\,\Phi(t)$$

identica alla (10). Si conclude che la soluzione particolare considerata è

$$H(r,t) = \frac{it_1}{2\pi r(t_1 - t)}\, u_\theta\,, \tag{13}$$

per cui H_θ per $t \in [0, t_1[$ ha lo stesso andamento temporale di ϱ, mentre la dipendenza da r è quella del campo di Biot e Savart. È da notare anche che la soluzione ricavata non dipende dal valore della viscosità magnetica η; osserviamo che per $\eta = 0$ la (12) si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \log H_\theta = \frac{1}{t_1 - t}$$

per la quale la (13) è l'unica soluzione possibile.

4. Caso di H_0 radiale.

Sempre supponendo

$$v_r = v_\theta = 0$$

e restando quindi valide le (11), ci limiteremo al caso in cui sia

$$H_\theta = H_z = 0\,, \qquad H_r = H_r(r, z, t)\,.$$

Dalla (2) si ottiene allora

$$\frac{\partial (r H_r)}{\partial r} = 0$$

da cui segue

$$H_r = \frac{1}{r}\,\Phi(z, t) \qquad (r > \varepsilon) \tag{14}$$

con Φ da determinare.

Detto u_r il versore delle linee r, nella (1) si ha allora

$$\nabla^2 H = \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2}\, u_r\,, \qquad \mathrm{rot}\,(v \times H) = -\frac{\partial (v_z H_r)}{\partial z}\, u_r\,. \tag{15}$$

Considereremo il caso in cui nella (5) $\boldsymbol{H}_0$ sia radiale della forma

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{1}{r}\varphi(z)\boldsymbol{u}_r \qquad (r > \varepsilon\,;\, z \in [-z_0, 0]) \tag{16}$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione assegnata. Tenendo conto delle (11_2), (14) e (15), si ha un'unica equazione scalare (dove non compare la variabile r)

$$\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{t_1 - t}\Phi(z,t) + \frac{z}{t_1 - t}\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z} + \eta\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial z^2} \tag{17}$$

con

$$t \in]0, t_1[\,, \qquad z \in]-z_0 + wt, 0[\,,$$

che va risolta con la condizione iniziale

$$\Phi(z, 0) = \varphi(z)$$

dedotta dalle (14) e (16). Per quanto riguarda le condizioni al contorno, osserviamo che la (4_1) è soddisfatta, mentre la (4_2) impone che sia

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=-z_0+wt} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0\,. \tag{18}$$

Poichè la (4_2) deve valere anche per $\boldsymbol{H}_0$ espresso dalla (16), si ha

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=-z_0+wt} = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0} = 0\,. \tag{19}$$

Una soluzione particolare immediata è fornita da $\varphi(z) = C$ (costante) che soddisfa senz'altro le (19), è compatibile con la condizione $\partial\Phi/\partial z = 0$ e quindi dà immediatamente la soluzione

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(r,t) = \frac{Ct_1}{r(t_1 - t)}\boldsymbol{u}_r\,, \tag{20}$$

valida qualunque sia la viscosità magnetica η.

Volendo invece mantenere per la Φ la dipendenza anche dalla z, seguendo [1] si può nella (17) porre

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{t_1 - t}\, U(z,t)$$

ottenendo che la nuova funzione incognita $U(z,t)$ deve soddisfare al problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{z}{t_1 - t}\dfrac{\partial U}{\partial z} + \eta \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} & z \in]-z_0 + wt, 0[;\ t \in]0, t_1[\\ \left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=-z_0+wt} = 0 & t \in]0, t_1[\\ U(z,0) = t_1 \varphi(z) & z \in]-z_0, 0[\,, \end{cases}$$

dove la $\varphi(z)$ è la funzione assegnata nella (16).

Se poi si opera anche il seguente cambiamento delle variabili indipendenti

$$z' = \frac{t_1 z}{t_1 - t} \qquad t' = \frac{t_1^2}{t_1 - t} - t_1 \qquad (t_1 = z_0/w)\,,$$

posto

$$T < t_1\,, \qquad T^* = \frac{t_1^2}{t_1 - T} - t_1\,,$$

il problema in questione si riconduce al seguente noto problema [3] di diffusione del calore relativo a un dominio non variabile col tempo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t'} = \eta \dfrac{\partial^2 U}{\partial z'^2} & z' \in]-z_0, 0[;\ t' \in]0, T^*] \\ \left(\dfrac{\partial U}{\partial z'}\right)_{z'=-z_0} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial z'}\right)_{z'=0} = 0 & t' \in]0, T^*] \\ U(z', 0) = t_1 \varphi(z') & z' \in]-z_0, 0[\,. \end{cases}$$

Nel caso infine in cui la conducibilità elettrica del fluido è tanto grande da poter essere considerata infinita nella (17) si deve porre $\eta = 0$, per cui l'equazione diventa lineare del primo ordine; in base a una nota proprietà delle equazioni di tale tipo le soluzioni della (17) sono soluzioni anche dell'equazione [1]

$$dt = \frac{t_1 - t}{\Phi}\, d\Phi\,; \tag{21}$$

da qui si ha

$$\int_0^t \frac{dt}{t_1 - t} = \int_{\Phi(z,0)}^{\Phi(z,t)} \frac{d\Phi}{\Phi}$$

e si ottiene così la soluzione

$$\Phi(z,t) = \frac{t_1}{t_1 - t}\,\varphi(z)\,, \qquad \text{con } \varphi(z) = \Phi(z,0)\,,$$

che introdotta nella (17), sempre con $\eta = 0$, per $t \to 0$ impone che sia $d\varphi(z)/dz = 0$, ossia che $\varphi(z)$ sia costante: si conclude allora che nel caso $\eta = 0$ la (20) è l'unica soluzione possibile.

[1] Nel caso particolare in questione la (21) può anche essere ottenuta direttamente dalla (17), in cui si faccia $\eta = 0$, moltiplicandola per dt e tenendo conto che per la (11_2) è

$$-\frac{z}{t_1 - t}\, dt = dz\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Primicerio, *Sulle variazioni del campo magnetico in un fluido conduttore in movimento*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **14** (1965), pp. 30-46.

[2] G. Toraldo di Francia, *Onde elettromagnetiche*, Zanichelli, Bologna, 1953, Cap. IX, § 7.

[3] H. S. Carslaw e J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Clarendon Press, 1959, § 36.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 aprile 1982.