G. FERRARESE

Introduzione alla meccanica relativistica dei continui con struttura scalare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 31-47
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__31_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Introduzione alla Meccanica relativistica dei continui con struttura scalare.

G. FERRARESE (*)

Introduzione.

Al di là della realizzazione del contesto naturale per la descrizione dei fenomeni meccanici ed elettromagnetici, la Relatività speciale costituisce, già nell'ambito puramente meccanico, una significativa tappa di quel processo di unificazione concettuale che corrisponde alla massima aspirazione del pensiero scientifico. Questo processo ha inizio nella dinamica delle particelle con struttura scalare, attraverso la duplice unificazione della *massa* con l'*energia* (cinetica), e dell'*azione meccanica* con quella *termica* (cfr. ad es. [I], cap. IX.2). Di qui si estende, in modo naturale, alla Meccanica dei continui, nei termini che appaiono evidenti da questa breve introduzione, la quale prende le mosse dalla situazione classica, e procede via via con i ritocchi indispensabili per una teoria relativistica. Ne risulta un quadro profondamente modificato, sia per le correzioni relativistiche degli ingredienti fisici tradizionali (sforzi meccanici, potenza delle forze intime, energia interna, ecc.), sia per la diversa invarianza strutturale di questi. Tuttavia, l'approccio classico ne viene meglio illuminato, specie per quanto riguarda il I principio della termodinamica (n. 6), il quale viene sostanzialmente a costituire la correzione di ordine c^{-2} (c velocità della luce nel vuoto) del principio di conservazione della massa (cfr. Pham Mau Quan [2], n. 22).

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Città Universitaria, 00185 Roma.

Per brevità viene qui esaminato, dal punto di vista generale, il solo caso dei *continui non polari*, caratterizzati, nello schema ordinario, dalla condizione che il tensore proprio degli sforzi meccanici sia simmetrico (la rimozione di questa ipotesi non può essere disgiunta dall'introduzione dei momenti di sforzo e di massa: cfr. G. Grioli [3] e, dal punto di vista geometrico-cinematico, dall'ampliamento della struttura scalare mediante direttori: cfr. [4], cap. III). In questo caso, il flusso termico non è indipendente dalla velocità, e si riassume in un termine d'« inerzia termica » che si accoppia, in modo naturale, con l'« inerzia di pura materia », come accade per i fluidi (cfr. A. Lichnerowicz [5], cap. IV, e Pham Mau Quan [2]).

1. Equazioni generali della Meccanica Classica dei Continui.

Esaminiamo brevemente il quadro delle *equazioni generali* della Meccanica classica dei continui nell'ambito dei riferimenti galileiani (1). Siano: S il solido galileiano, riferito a coordinate interne di tipo cartesiano, arbitrariamente prefissate, cioè brevemente: $T \equiv 0\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ la terna *di riferimento*; C la *configurazione attuale* (in S) del sistema continuo; x^i $(i = 1, 2, 3)$ le coordinate del generico punto $P \in C$; $\boldsymbol{n}\,d\sigma$ un arbitrario elemento di superficie orientato per P, e $\boldsymbol{\phi}_n\,d\sigma$ il *relativo sforzo meccanico*.

Innanzitutto, il principio di conservazione della massa (in S), tradotto in *termini euleriani*, dà luogo all'*equazione di continuità*:

$$\partial_t\mu + \partial_i(\mu v^i) = 0\,, \tag{1}$$

essendo $\mu(x/t)$ la *densità di massa* e $\boldsymbol{v}(x/t)$ la *velocità*. Inoltre le equazioni cardinali della Meccanica, adattate alla generica porzione del campo C, danno luogo, per via di limite, a tre ulteriori condizioni locali. Si vuol dire:

I) *il teorema di Cauchy*, il quale precisa la dipendenza degli sforzi da $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{\phi}_n = n_i\boldsymbol{\phi}^i \Rightarrow \boldsymbol{\phi}^i = (\boldsymbol{\phi}_n)_{n=c_i}\,; \tag{2}$$

(1) Il passaggio ad un riferimento solido qualunque si realizza aggiungendo, nell'equazione di moto, le forze specifiche di trascinamento e di Coriolis a quella di inerzia.

II) la *1ª equazione indefinita*:

(3) $$\mu\dot{\boldsymbol{v}} = \mu\boldsymbol{F} - \partial_i \boldsymbol{\phi}^i ,$$

essendo $\boldsymbol{F}$ la *forza di massa specifica* e $(\ )^\bullet$ la *derivata sostanziale*:

(4) $$(\ )^\bullet \equiv \partial_t(\ ) + \partial_i(\ )v^i ;$$

III) la *2ª equazione indefinita*, ovvero le relazioni di reciprocità per gli sforzi:

(5) $$\boldsymbol{\phi}_n \cdot \boldsymbol{n}' = \boldsymbol{\phi}_{n'} \cdot \boldsymbol{n} \qquad \forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}' .$$

Infine, il teorema dell'energia si traduce sostanzialmente (cfr. [6], Cap. II.3) nel

IV) *1º principio della termodinamica*:

(6) $$\dot{\varepsilon} = q - \frac{1}{\mu} w^{(i)} ,$$

essendo ε l'*energia interna specifica* (cioè per unità di massa), q la *potenza termica specifica* (²), e $w^{(i)}$ la *potenza specifica delle forze di contatto*:

(7) $$w^{(i)} \equiv \boldsymbol{\phi}^i \cdot \partial_i \boldsymbol{v} .$$

Introdotto il *tensore euleriano degli sforzi* X^{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ mediante la decomposizione $\boldsymbol{\phi}^i = X^{ik}\boldsymbol{c}_k$, la (5) si traduce nelle proprietà di simmetria

(5′) $$X^{ik} = X^{ki} ,$$

e la (7) assume la forma

(7′) $$w^{(i)} = X^{ik} k_{ik} ,$$

(²) Essa comprende generalmente due termini, uno di *irraggiamento*, ed uno di *conduzione*: $q = r - 1/\mu \operatorname{div} \boldsymbol{q}$, essendo $\boldsymbol{q}$ il *vettore di conduzione termica* (cfr. ad es. [7], p. 295).

essendo k_{ik} il tensore *velocità di deformazione*:

$$k_{ik} \equiv \tfrac{1}{2}(\partial_i v_k + \partial_k v_i)\,. \tag{8}$$

Nell'ambito delle deformazioni finite, il punto di vista lagrangiano assume carattere prioritario rispetto a quello euleriano, e ad esso fa capo, sia in sede classica che relativistica, un'espressione della potenza delle forze intime significativa ai fini della precisazione delle variabili interne; ma di ciò non ci occuperemo in questa sede. Qui ci limiteremo ad osservare che, nel quadro classico:

a) ci sono *vari ingredienti dinamici separati di fatto*: massa ed energia interna — forze esterne di massa e azione termica (attraverso il termine di potenza q);

b) *le equazioni sono invarianti, sia formalmente* che *sostanzialmente*, rispetto alla scelta del riferimento galileiano, cioè verificano il principio galileiano di relatività in senso forte.

Come si modifica il quadro nella situazione relativistica?

2. Estensione relativistica.

Consideriamo il punto di vista della Relatività ristretta (3), ponendoci nello spazio tempo di Minkowski M_4, di segnatura $-+++$. Supponiamo M_4, orientato, e munito altresì di uno dei due semiconi luce, diciamo C^+; cioè dotato delle sole *basi cartesiane* $\{\boldsymbol{c}_\alpha\}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$:

$$\boldsymbol{c}_\alpha \cdot \boldsymbol{c}_\beta = m_{\alpha\beta} \qquad (m_{00} = -1,\ m_{0i} = 0,\ m_{ik} = \delta_{ik})\,, \tag{9}$$

concordi e con asse temporale appartenente a C^+.

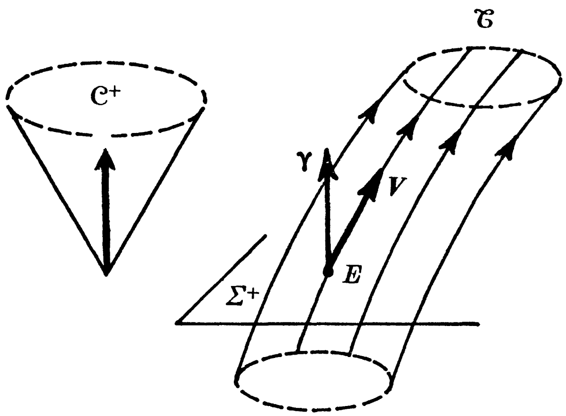
In termini intrinseci, ciò equivale a considerare in M_4 la sola classe ∞^3 dei *riferimenti galileiani* $\{S\}$ *equiorientati, sia nel tempo che nello spazio.*

Nel seguito porremo anche $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{\gamma}$ $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = -1)$ per sottolineare *il ruolo diverso di* $\boldsymbol{c}_0$ *dai vettori spaziali* $\boldsymbol{c}_i$, nell'ambito del riferimento galileiano S associato alla base cartesiana $\{\boldsymbol{c}_\alpha\}$. Si vuol dire che S è caratterizzato dal versore $\boldsymbol{c}_0 \in C^+$; laddove i versori $\boldsymbol{c}_i$ sono definiti,

(3) Il passaggio alla Relatività generale (cioè ad uno spazio tempo curvo V_4) è automatico, attraverso la regola di trascrizione.

nel 3-piano orientato Σ^+ normale a γ, a meno di una arbitraria rotazione spaziale.

Nella situazione relativistica, bisogna innanzitutto distinguere la *formulazione assoluta* (invariante per traslazioni e rotazioni nello spazio tempo: trasformazioni di Lorentz) *da quella relativa ad un arbitrario riferimento galileiano* (invariante solo per le traslazioni del tempo, traslazioni e rotazioni spaziali). Quest'ultima — la più significativa dal punto di vista fisico — è *formalmente invariante* rispetto alla scelta del riferimento galileiano (*principio di relatività*), *ma non lo è sostanzialmente*, nel senso che fa intervenire *grandezze relative*, per le quali occorre precisare il modo di variare rispetto ad un cambiamento del riferimento galileiano.



Cominciamo col considerare il *punto di vista assoluto*: il continuo è rappresentato da una congruenza ∞^3 di *linee orientate del genere tempo*, le quali riempiono un tubo di universo $\mathcal{T} \subseteq M_4$ (per $\forall$ punto $E \in \mathcal{T}$ passa una ed una sola linea della congruenza [4]). Sia $V(E)$ la 4-velocità locale del continuo ed $A(E)$ il vettore derivato rispetto al tempo proprio particellare (4-accelerazione). Insieme ai 4-vettori V ed A (l'uno del genere tempo e di norma $-c^2$, l'altro del genere spazio), sono definiti in $\mathcal{T}$ due *scalari fondamentali, entrambi positivi*: $\mathfrak{D}_0(E)$ e $\mu_0(E)$, aventi rispettivamente il significato di « *densità numerica propria* » delle particelle, e *densità propria di massa propria*. Questi scalari discendono dal punto di vista relativo ad un arbitrario riferimento

[4] La supposta regolarità del moto esclude ogni tipo di urto o lacerazione.

galileiano $\boldsymbol{\gamma}$ (5). Invero questo, insieme al legame

$$V = \eta(\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{\gamma}) = \text{inv.}\,, \qquad \eta \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}\,, \tag{10}$$

dà luogo alle *relazioni di invarianza locale* (rispetto alla scelta del riferimento ($\mathfrak{D}$ = Jacobiano delle x^i rispetto a coordinate lagrangiane):

$$\eta\mathfrak{D} = \text{inv.} = \mathfrak{D}_0\,; \qquad \mu/\eta^2 = \text{inv.} = \mu_0\,, \tag{11}$$

le quali precisano il significato degli scalari $\mathfrak{D}_0$ e μ_0 in relazione al riferimento proprio.

Per quanto riguarda gli *sforzi relativi* $\boldsymbol{\phi}_n$ ($\boldsymbol{n} \in S$), essi andranno sostituiti dai *4-sforzi* $\boldsymbol{T}_N$, con $\boldsymbol{N} \in M_4$, dato che questi devono aver significato in ogni riferimento galileiano, e pertanto in ogni sezione spaziale Σ per $E \in \mathcal{C}$. Naturalmente si ammetterà che i $\boldsymbol{T}_N$ soddisfino le proprietà analoghe a quelle classiche (2) e (3):

$$\boldsymbol{T}_N = N_\alpha \boldsymbol{T}^\alpha\,, \qquad \boldsymbol{T}_N \cdot \boldsymbol{N}' = \boldsymbol{T}_{N'} \cdot \boldsymbol{N} \qquad \forall \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'\,. \tag{12}$$

Si tratta ora di *precisare l'estensione relativistica* dell'equazione di Cauchy, la quale va naturalmente postulata. L'estensione più naturale è ancora suggerita dal quadro classico (1)-(3), interpretando queste come componenti temporale e spaziale rispettivamente di una medesima equazione 4-vettoriale. Più precisamente, essendo, in virtù delle (1) e (4):

$$\mu\dot{\boldsymbol{v}} \equiv (\mu\boldsymbol{v})^{\boldsymbol{\cdot}} - \dot{\mu}\boldsymbol{v} = \partial_t(\mu\boldsymbol{v}) + \partial_i(\mu\boldsymbol{v})v^i + \mu\boldsymbol{v}\,\partial_i v^i = \partial_t(\mu\boldsymbol{v}) + \partial_i(\mu v^i \boldsymbol{v})\,,$$

il sistema (1)-(3) si può scrivere nella forma

$$\partial_t\mu + \partial_i(\mu v^i) = 0\,, \qquad \partial_t(\mu\boldsymbol{v}) + \partial_i(\mu v^i\boldsymbol{v}) + \partial_i\boldsymbol{\phi}^i = \mu\boldsymbol{F}\,.$$

Pertanto, tenuto conto delle $(10)_1$ e $(11)_2$, esso equivale (almeno in $\Sigma \oplus \Theta$) all'equazione

$$\partial_\alpha(\mu_0 V^\alpha \boldsymbol{V}) + \partial_i\boldsymbol{\phi}^i = \mu_0\boldsymbol{f} \qquad (\boldsymbol{f} \equiv \eta^2\boldsymbol{F})\,;$$

(5) Il passaggio ad un riferimento fluido generale non presenta alcuna difficoltà (cfr. [8]).

di qui l'*estensione relativistica* più naturale:

$$\partial_\alpha(\mu_0 V^\alpha \boldsymbol{V} + \boldsymbol{T}^\alpha) = \mu_0 \boldsymbol{f}. \tag{13}$$

3. Sforzi meccanici propri ed energia termica propria (di conduzione).

Alla (13) si può dare una forma più espressiva, spezzando i 4-sforzi $\boldsymbol{T}^\alpha$, per $\forall\alpha = 0, 1, 2, 3$, nelle due parti *parallela* e *normale* alla 4-velocità $\boldsymbol{V}$ (*sforzi meccanici propri* e di *conduzione termica*):

$$\boldsymbol{T}^\alpha = \boldsymbol{\varphi}^\alpha + Q^\alpha \boldsymbol{V}, \tag{14}$$

con

$$\boldsymbol{\varphi}^\alpha \cdot \boldsymbol{V} = 0\,. \tag{15}$$

Naturalmente, trattandosi di un continuo ordinario (non polare), *ammetteremo che anche gli sforzi meccanici propri* $\boldsymbol{\varphi}_N$ *soddisfino gli assiomi* (12):

$$\boldsymbol{\varphi}_N = N_\alpha \boldsymbol{\varphi}^\alpha\,, \qquad \boldsymbol{\varphi}_N \cdot \boldsymbol{N}' = \boldsymbol{\varphi}_{N'} \cdot \boldsymbol{N} \qquad \forall \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'\,; \tag{16}$$

sì che la (15) diviene

$$\boldsymbol{\varphi}_V \equiv V_\alpha \boldsymbol{\varphi}^\alpha = 0\,. \tag{17}$$

Ciò posto, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{V}$ la (14), e tenendo conto della (15), si ha successivamente

$$-c^2 Q^\alpha = \boldsymbol{T}^\alpha \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}_V \cdot \boldsymbol{c}^\alpha = \boldsymbol{\varphi}_V \cdot \boldsymbol{c}^\alpha + V_\beta Q^\beta V^\alpha$$

cioè, come dalla (17):

$$\boxed{Q^\alpha = \frac{1}{c^2}\varepsilon_{0,c} V^\alpha}\,, \tag{18}$$

essendo $\varepsilon_{0,c}$ l'*energia termica propria* (di conduzione):

$$\boxed{\varepsilon_{0,c} = -\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}}\,. \tag{19}$$

Naturalmente introdurremo anche la *densità di conduzione termica propria*:

(20) $$\mu_{0,c} \equiv \varepsilon_{0,c}/c^2\,;$$

sì che la (18) diviene più semplicemente

(18′) $$Q^\alpha = \mu_{0,c} V^\alpha\,.$$

In definitiva, con l'intervento degli sforzi meccanici propri di cui alla (14), l'equazione di Cauchy relativistica (13) assume la forma seguente:

(21) $$\boxed{\partial_\alpha(\tilde{\mu}_0 V^\alpha \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\varphi}^\alpha) = \mu_0 \boldsymbol{f}}$$

essendo $\tilde{\mu}_0$:

(22) $$\tilde{\mu}_0 \equiv \mu_0 + \mu_{0,c}\,,$$

la *densità propria totale*, somma delle densità di pura materia e di conduzione termica.

Si noti esplicitamente che *la proprietà di parallelismo tra il 4-vettore di conduzione termica* $\boldsymbol{Q}$ *e la 4-velocità* $\boldsymbol{V}$ *è conseguenza diretta dell'ipotesi di simmetria degli sforzi meccanici propri* di cui alla (16). Si tratta di una *proprietà caratteristica dei continui ordinari* non polari. Per i continui a caratteristiche di tensione *non simmetriche* (ciò che porta ad un allargamento dello schema, sia dal punto di vista geometrico, che dinamico) la (18′) non sussiste e, dal punto di vista energetico, la situazione è presumibilmente analoga a quella di un campo elettromagnetico.

In ogni caso, *in termini euleriani*, introdotte le componenti V^α della 4-velocità, nonchè le *caratteristiche di tensione* $X^{\alpha\beta}$ con la decomposizione

(23) $$\boldsymbol{\varphi}^\alpha = X^{\alpha\beta}\boldsymbol{c}_\beta\,,$$

la (21) assume l'aspetto tipico delle *equazioni di conservazione con sorgente*; invero essa è del tipo

(21′) $$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \mu_0 f^\beta \qquad (\beta = 0, 1, 2, 3)\,,$$

essendo

$$T^{\alpha\beta} \equiv \tilde{\mu}_0 V^\alpha V^\beta + X^{\alpha\beta}, \tag{24}$$

nonchè

$$V^\alpha V_\alpha = -c^2, \qquad X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}, \qquad X^{\alpha\beta} V_\beta = 0. \tag{25}$$

Naturalmente il *campo di tensori simmetrici* $T^{\alpha\beta}$, di base $\mathcal{C}$, *riassume lo schema materiale* del continuo, subordinatamente alla sola condizione di ammettere un autovettore del genere tempo ($\boldsymbol{V}$) ed autovalore corrispondente negativo ($\tilde{\mu}_0 > 0$). Si vuol dire che la conoscenza di $T^{\alpha\beta}$ equivale a quella di $\tilde{\mu}_0$, V^α e $X^{\alpha\beta}$, compatibilmente con la (25).

4. Formulazione relativa.

L'equazione vettoriale (21), o la sua equivalente scalare (21′), è del tutto soddisfacente dal punto di vista assoluto, dato il suo carattere invariantivo rispetto alla scelta delle coordinate cartesiane x^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$).

Tuttavia essa non fa direttamente trasparire il suo contenuto fisico, in relazione ad un arbitrario riferimento galileiano S. Per precisare tale aspetto fondamentale occorre:

i) fissare la direzione temporale $\boldsymbol{\gamma}$ che caratterizza il riferimento, e decomporre localmente tutte le grandezze tensoriali in gioco secondo $\boldsymbol{\gamma}$ e la giacitura normale Σ (*decomposizione naturale*);

ii) definire correttamente [6] le grandezze relative;

iii) ricavare la legge di variazione di tutte le grandezze relative, in un arbitrario cambiamento del riferimento.

Per quanto riguarda gli sforzi meccanici $\boldsymbol{\varphi}^\alpha$, posto che $\boldsymbol{\varphi}_V \equiv V_\alpha \boldsymbol{\varphi}^\alpha = 0$, si ha innanzitutto, tenuto conto della decomposizione (10):

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}^0 = \frac{1}{c} v_i \boldsymbol{\varphi}^i}\ ; \tag{26}$$

[6] Sia dal punto di vista matematico che fisico.

ciò che vale ad esprimere $\boldsymbol{\varphi}^0$ mediante i tre vettori $\boldsymbol{\varphi}^i$. D'altra parte, la decomposizione naturale di $\boldsymbol{\varphi}^i$: $\boldsymbol{\varphi}^i = \boldsymbol{\phi}^i - \boldsymbol{\varphi}^i \cdot \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}$, con

$$\boldsymbol{\phi}^i \equiv X^{ik}\boldsymbol{c}_k \in \Sigma \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{27}$$

essendo $\boldsymbol{\varphi}^i \cdot \boldsymbol{V} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}^i \cdot \boldsymbol{v} + c\boldsymbol{\varphi}^i \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$, non differisce da

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}^i = \boldsymbol{\phi}^i + \frac{1}{c}\boldsymbol{\phi}^i \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{\gamma}}\,. \tag{28}$$

Pertanto: *gli sforzi meccanici* $\boldsymbol{\varphi}^\alpha$ *sono funzioni ben determinate degli sforzi relativi* $\boldsymbol{\phi}^i$ (oltre che di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{\gamma}$).

Proiettiamo ora la (21) su Σ e su $\boldsymbol{\gamma}$, cominciando col decomporre $\partial_\alpha(\tilde{\mu}_0 V^\alpha \boldsymbol{V})$. Tenendo conto della (10) e ponendo

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \eta^2\,, \tag{29}$$

si ha successivamente

$$\partial_\alpha(\tilde{\mu}_0 V^\alpha \boldsymbol{V}) = \partial_i[\tilde{\mu} v^i(\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{\gamma})] + \frac{1}{c}\,\partial_t[\tilde{\mu} c(\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{\gamma})] =$$
$$= \partial_i(\tilde{\mu} v^i \boldsymbol{v}) + \partial_t(\tilde{\mu}\boldsymbol{v}) + [\partial_i(\tilde{\mu} v^i) + \partial_t \tilde{\mu}]c\boldsymbol{\gamma}\,;$$

di qui, esplicitando le derivate spaziali ed utilizzando la (4), nonchè l'identità cinematica (cfr. ad es. [1], p. 514):

$$\partial_i v^i \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\mathfrak{D}}\dot{\mathfrak{D}}\,, \tag{30}$$

segue la decomposizione

$$\partial_\alpha(\tilde{\mu}_0 V^\alpha \boldsymbol{V}) = \frac{1}{\mathfrak{D}}\,[(\tilde{\mu}\mathfrak{D}\boldsymbol{v})^\bullet + (\tilde{\mu}\mathfrak{D})^\bullet c\boldsymbol{\gamma}]\,.$$

Analogamente si ha, come dalle (28) e (26),

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}^\alpha = \partial_i \boldsymbol{\phi}^i + \frac{1}{c}\,\partial_i(\boldsymbol{\phi}^i \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{c^2}\,\partial_t(v_i \boldsymbol{\phi}^i) + \frac{1}{c^3}\,\partial_t(v_i \boldsymbol{\phi}^i \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{\gamma}\,;$$

sì che, introdotta la *forza di massa relativa*

(31) $$\mu \boldsymbol{F} \equiv \mu_0 \boldsymbol{f}_\Sigma = \mu_0(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}),$$

la (21) dà luogo rispettivamente al *teorema della quantità di moto*:

(32) $$\boxed{\frac{1}{\mathfrak{D}}(\tilde{\mu}\mathfrak{D}\boldsymbol{v})^{\bullet} = \mu \boldsymbol{F}_{\text{tot}} \equiv \mu\boldsymbol{F} - \partial_i \boldsymbol{\phi}^i - \frac{1}{c^2}\partial_t(v_i\boldsymbol{\phi}^i)}$$

e al teorema dell'energia:

$$\frac{1}{\mathfrak{D}}(\tilde{\mu}\mathfrak{D}c^2)^{\bullet} = -\mu_0 c\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \partial_i(\boldsymbol{\phi}^i\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{1}{c^2}\partial_t(v_i\boldsymbol{\phi}^i\cdot\boldsymbol{v}).$$

A differenza della (32), quest'ultima equazione non si presenta ancora in forma espressiva; tuttavia essa si trasforma facilmente tenendo conto della (10): $-c\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}/\eta$, e sviluppando le derivate spaziali. Più precisamente, introducendo le seguenti *grandezze relative specifiche* (per unità di volume relativo):

(33) $$\begin{cases} \mu\varepsilon \equiv \tilde{\mu}c^2 & (\textit{energia interna}) \\ \mu q \equiv -\mu_0\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}/\eta & (\textit{potenza termica}) \\ w^{(i)} \equiv \boldsymbol{\phi}^i\cdot\left(\partial_i\boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2}v_i\partial_t\boldsymbol{v}\right) & (\textit{potenza delle forze intime}), \end{cases}$$

si ha il *teorema dell'energia* nella forma tipica

(34) $$\frac{1}{\mu\mathfrak{D}}(\mu\mathfrak{D}\varepsilon)^{\bullet} = \boldsymbol{F}_{\text{tot}}\cdot\boldsymbol{v} + q - \frac{1}{\mu}w^{(i)}.$$

5. Leggi di variazione delle grandezze relative fondamentali.

Le equazioni generali (32) *e* (34) *soddisfano il principio di relatività,* in quanto sono formalmente invarianti rispetto alla scelta del riferimento galileiano S; tuttavia non sono invarianti in modo sostanziale (e non può essere altrimenti nel contesto relativistico), dato il carattere relativo delle grandezze in gioco.

In ogni caso, *tutte le grandezze relative introdotte*, in particolare ε, q e $w^{(i)}$, *hanno un reale contenuto fisico*, cioè non sono evanescenti (come le forze apparenti del moto relativo), nel senso che non possono sparire con un semplice cambiamento del riferimento. Più precisamente, contrassegnando con l'indice $_0$ le grandezze proprie, valgono le seguenti *proprietà di invarianza locale* (formale e sostanziale):

$$(35)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\varepsilon = c^2\tilde{\mu}_0/\mu_0 = \text{inv.} = \varepsilon_0 \\ &\eta^3 q = -\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V} = \text{inv.} = q_0 \\ &\eta w^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}^\alpha\cdot\partial_\alpha\boldsymbol{V} = \text{inv.} = w_0^{(i)} \end{aligned}}\ ;$$

di qui, tenuto conto del legame generale (cfr. [1], p. 570):

$$(36)\qquad \eta'/\eta = \sigma/\alpha\,,$$

con

$$(37)\qquad \alpha \equiv \sqrt{1-u^2/c^2}\,,\qquad \sigma \equiv 1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}/c^2\,,$$

seguono le leggi di variazioni di q e $w^{(i)}$ nel passaggio da S ad S':

$$(38)\qquad \boxed{w'^{(i)} = w^{(i)}\alpha/\sigma\,,\qquad q' = q(\alpha/\sigma)^3}\ .$$

Naturalmente, nella situazione classica ($c\to\infty$), le (38) si riducono ad altrettante relazioni di invarianza.

Per quanto invece riguarda le *forze di massa* di cui alla (31), la relativa legge di trasformazione si desume direttamente dal caso del punto con struttura scalare interna, salvo l'adattamento conseguente alla presenza della densità $\mu = \mu_0\eta^2$. Invero si ha (cfr. [1], p. 571):

$$(39)\qquad \boxed{\boldsymbol{F}' = [\alpha\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w} - q)\boldsymbol{u}/c^2]\alpha/\sigma^2}\ ,$$

con l'intervento della potenza termica q di cui alla $(33)_2$ e del vettore $\boldsymbol{w}$:

(40) $$\boldsymbol{w} \equiv \frac{1}{1+\alpha}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\,.$$

Infine, non resta che la *legge di variazione degli sforzi meccanici* (relativi) $\boldsymbol{\phi}^i \equiv X^{ik}\boldsymbol{c}_k$, ovvero dei $\boldsymbol{\phi}_n = n_i\boldsymbol{\phi}^i$. Per questa, si tratta di:

i) partire dagli sforzi meccanici propri $\boldsymbol{\varphi}^\alpha$:

(41) $$\boldsymbol{\varphi}^\alpha \equiv X^{\alpha\beta}\boldsymbol{c}_\beta\,,$$

ovvero dal tensore associato $X^{\alpha\beta}$;

ii) tener conto delle trasformazioni di Lorentz (in coordinate x^1-standard):

(42) $$x'^0 = (x^0 - \beta x^1)/\alpha\,, \quad x'^1 = (x^1 - \beta x^0)/\alpha\,, \quad x'^{2,3} = x^{2,3}\,, \quad \beta \equiv u/c^2\,;$$

iii) esplicitare le componenti $X'^{ik} = A^{\prime i}_{\alpha} A^{\prime k}_{\beta} X^{\alpha\beta}$, con

$$A^{\prime i}_{\alpha} \equiv \begin{Vmatrix} -\beta/\alpha & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Si hanno innanzitutto i legami diretti:

$$\begin{cases} X'^{11} = (\beta^2 X^{00} - 2\beta X^{10} + X^{11})/\alpha^2 \\ X'^{12} = (X^{12} - \beta X^{02})/\alpha \\ X'^{13} = (X^{13} - \beta X^{03})/\alpha \\ X'^{22} = X^{22}\,, \quad X'^{23} = X^{23}\,, \quad X'^{33} = X^{33} \end{cases}$$

e di qui, tenuto conto che le $X^{\alpha\beta}$ si esprimono in termini delle sole X^i mediante le (26) e (28):

$$X^{0k} = \frac{1}{c} v_i X^{ik}\,, \qquad X^{00} = \frac{1}{c^2} v_i v_k X^{ik}\,,$$

i vettori $\boldsymbol{\phi}'^i \equiv X'^{ik}\boldsymbol{c}_k$ in funzione dei vettori $\boldsymbol{\phi}^i$:

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}'^i = \left(\delta^i_k + \frac{1}{\alpha c^2} u^i w_k\right)\left(\boldsymbol{\phi}^k + \frac{1}{\alpha c^2}\boldsymbol{\phi}^k\cdot\boldsymbol{wu}\right)}\,. \tag{43}$$

6. Teorema dell'energia e 1° principio della termodinamica.

L'equazione generale (34) conferma l'interpretazione del *1° principio della termodinamica quale principio sostitutivo del teorema dell'energia* (cfr. [6], Cap. II.3). Si tratta di eliminare nella (34) la potenza meccanica $\mu\boldsymbol{F}_{\text{tot}}\cdot\boldsymbol{v}$, utilizzando l'equazione di Cauchy relativistica (32). Più precisamente da questa, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{v}$ e tenendo conto che $v^2 \equiv c^2(1-1/\eta^2)$, si ricava successivamente

$$\mu\boldsymbol{F}_{\text{tot}}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mathfrak{D}}(\tilde{\mu}\mathfrak{D})^{\bullet}v^2 + \frac{1}{2}\tilde{\mu}(v^2)^{\bullet} = \frac{1}{\mathfrak{D}}(\tilde{\mu}c^2\mathfrak{D})^{\bullet} - \frac{1}{\mathfrak{D}\eta^2}(\tilde{\mu}c^2\mathfrak{D})^{\bullet} + \frac{1}{\eta^3}\tilde{\mu}c^2\dot{\eta}\,.$$

Pertanto la (34) diviene

$$\frac{1}{\mathfrak{D}\eta^2}(\tilde{\mu}c^2\mathfrak{D})^{\bullet} - \frac{1}{\eta^3}\tilde{\mu}c^2\dot{\eta} = \mu q - w^{(i)}$$

ovvero, in virtù delle $(35)_{2,3}$ e $(11)_1$:

$$\frac{\eta^2}{\mathfrak{D}_0}(\tilde{\mu}c^2\mathfrak{D})^{\bullet} - \tilde{\mu}c^2\dot{\eta} = \mu q_0 - \eta^2 w_0^{(i)}\,.$$

Questa, a sua volta, avuto riguardo alla (29), non differisce da $(\tilde{\mu}_0 c^2\mathfrak{D}_0)^{\bullet}\eta/\mathfrak{D}_0 = \mu_0 q_0 - w_0^{(i)}$, e traduce pertanto, in conformità della $(35)_1$, il *1° principio della termodinamica*:

$$\boxed{\eta(\mu_0\mathfrak{D}_0\varepsilon)^{\bullet}/\mu_0\mathfrak{D}_0 = q_0 - w_0^{(i)}/\mu_0}\,. \tag{44}$$

Si tratta ovviamente del teorema dell'energia (34), quale esso risulta nel riferimento galileiano (locale) di moto incipiente per il generico elemento del continuo. Da questo punto di vista, essendo

$$(45)\qquad \eta(\ )^{\bullet} \equiv d/d\tau = V^{\alpha}\,\partial_{\alpha},$$

l'identità cinematica

$$(30')\qquad \frac{1}{\mathfrak{D}_0}\frac{d\mathfrak{D}_0}{d\tau} = \partial_{\alpha}V^{\alpha}$$

consente di trasformare la (44) nella "equazione di continuità" per l'energia interna propria:

$$(44')\qquad \partial_{\alpha}(\mu_0\,\varepsilon\,V^{\alpha}) = \mu_0 q_0 - w_0^{(i)};$$

ciò che risulta direttamente dalla (21) moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{V}$.

7. Continui privi di struttura materiale interna.

La (44) si può ulteriormente trasformare tenendo conto che $\mu_0\varepsilon \equiv \equiv \tilde{\mu}_0 c^2$ *riassume*, come dalla (22), *l'energia propria di pura materia e l'energia termica propria*:

$$(46)\qquad \mu_0\,\varepsilon = \mu_0 c^2 + \varepsilon_{0,c}\,.$$

Più precisamente, essa si scrive nella forma

$$(47)\qquad \frac{\eta}{\mu_0\,\mathfrak{D}_0}(\mu_0\,\mathfrak{D}_0)^{\bullet} = \frac{1}{c^2}\left[q_0 - \frac{1}{\mu_0}w_0^{(i)} - \frac{\eta}{\mu_0\,\mathfrak{D}_0}(\mathfrak{D}_0\varepsilon_{0,c})^{\bullet}\right],$$

o anche dalla (44'):

$$(47')\qquad \partial_{\alpha}(\mu_0 V^{\alpha}) = \frac{1}{c^2}\left[\mu_0 q_0 - w_0^{(i)} - \partial_{\alpha}(\varepsilon_{0,c}V^{\alpha})\right];$$

ciò che vale a precisare le *sorgenti complessive per la sola energia materiale*.

In ogni caso, le (32) e (47) fanno riscontro, nell'ambito dei continui non polari, alle equazioni dinamiche di una particella a massa propria variabile (cfr. [1], p. 570). Esse costituiscono pertanto le *equazioni generali della Meccanica relativistica dei continui* (non polari) *con strut-*

tura materiale interna. Si tratta di *quattro equazioni scalari in dieci incognite*: μ, v^i e $X^{ik} = X^{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ se, come è naturale, si intendono *assegnate le leggi di tutte le sorgenti*: $\boldsymbol{F}$, q e $\varepsilon_{0,c}$; quest'ultima direttamente o indirettamente [attraverso il vettore di conduzione termica di cui alla (14), come dalla (19)], mediante l'« equazione » del calore.

Ai fini del pareggiamento, almeno nello schema meccanico, basterà aggiungere, come nel caso classico, le sei equazioni costitutive.

La (47)-(47′) mette bene in evidenza che, *nella situazione classica, viene meno l'accoppiamento termodinamico*, e vale l'ordinaria equazione di conservazione della massa; con il risultato che il 1° principio della termodinamica deve essere postulato a parte.

Nella situazione relativistica, invece, particolare importanza assumono i *continui privi di struttura materiale*, caratterizzati dal *vincolo interno*:

$$\mu_0 \mathfrak{D}_0 = \text{cost.} \qquad \forall \text{ elemento del continuo}. \tag{48}$$

Per siffatti continui la (47) si traduce nella seguente *limitazione per le sorgenti*:

$$\frac{\eta}{\mu_0 \mathfrak{D}_0} (\mathfrak{D}_0 \varepsilon_{0,c})^{\bullet} = q_0 - \frac{1}{\mu_0} w_0^{(i)} ; \tag{49}$$

limitazione che corrisponde più propriamente al contenuto classico del 1° principio della termodinamica (6).

La (49), intesa valida per $\forall$ trasformazione del sistema, apre la strada ai continui reversibili, sia in senso assoluto che relativo; ma ciò porterebbe ben oltre questa breve introduzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FERRARESE, *Lezioni di Meccanica razionale*, voll. 1 e 2, Pitagora Editrice, Bologna, 1980.

[2] PHAM MAU QUAN, *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques*, Annali di Matematica, (IV), **38** (1955), pp. 121-204.

[3] G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, Annali di Matematica, **50** (1960), pp. 389-417.

[4] G. FERRARESE, *Lezioni di Meccanica superiore*, Veschi, Roma, 1967-1968.

[5] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme,* Masson, Paris, 1955.
[6] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite,* Annali di Matematica, (IV), **22** (1943), pp. 33-143.
[7] C. TRUESDELL - W. NOLL, *The non linear field Theories of Mechanics,* Handbuch der Physik, III/3, Springer-Verlag, 1965.
[8] G. FERRARESE, *Sul moto di una particella rispetto ad un riferimento fluido: analogie tra Meccanica classica e Relatività generale,* Rendic. Accademia Nazionale Lincei, (VIII), **34** (1963), pp. 385-389, 517-526.

Manoscritto pervenuto alla redazione il 7 aprile 1982.