RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

**Premesse alla cosmologia razionale**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 68 (1982), p. 295-324

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__295_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

# Premesse alla cosmologia razionale (*).

DIONIGI GALLETTO (**)

## 1. Introduzione.

Nel lavoro [7] è stata presentata una rielaborazione e sistemazione organica di vari risultati di natura cosmologica conseguiti in precedenti lavori e operando puramente nell'ambito della meccanica newtoniana. Da questa rielaborazione è emersa una teoria dei riferimenti fisici che, a differenza di quanto accade per i riferimenti inerziali i quali costituiscono una pura astrazione che non trova riscontro nella realtà fisica, tiene conto delle indicazioni fornite dall'esperienza. Inoltre, essendo i riferimenti fisici individuati da corpi che mutuamente si attraggono, è evidente che detta teoria risulta necessariamente connessa alla teoria newtoniana della gravitazione.

L'osservazione astronomica indica che su larga scala l'Universo si presenta omogeneo e che, risultando trascurabili i movimenti irregolari locali delle galassie rispetto al movimento d'insieme dell'Universo, il suo comportamento rispetto a un riferimento $\mathcal{T}_0$ individuato dalla nostra galassia e da tre galassie lontane ad essa non complanari è tale che le velocità delle generiche galassie risultano radiali rispetto a detto riferimento.

Da queste semplici indicazioni segue che i riferimenti individuati da quaterne di generiche galassie non complanari (riferimenti naturali) si muovono tra loro di moto traslatorio e che rispetto ad ognuno di essi l'Universo (che è ritenuto esteso a tutto lo spazio) presenta il medesimo

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'A.: Istituto di Fisica Matematica « J.-L. Lagrange », Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino.

comportamento cinematico, espresso dalla legge di Hubble, la quale, stabilita per via empirica da Hubble nel 1929 (1), è in realtà una diretta conseguenza delle suddette indicazioni, assunte come ipotesi unitamente a quella che lo spazio fisico sia euclideo.

Una volta stabilita l'equivalenza dal punto di vista cinematico dei riferimenti naturali (nel senso che l'Universo presenta dal punto di vista cinematico il medesimo comportamento rispetto ad essi), in [7] se ne è provata l'equivalenza anche dal punto di vista dinamico. Per ottenere questo risultato si è però assegnato al riferimento naturale $\mathscr{T}_0$, almeno inizialmente, un carattere di riferimento privilegiato che, anche se *a posteriori* viene poi rimosso, non elimina affatto l'impressione che alla base dell'intera costruzione, almeno per quanto concerne l'aspetto dinamico, vi sia ancora l'intervento determinante di un riferimento assoluto.

Inoltre, nella suddetta esposizione, partendo dalle medesime ipotesi, si è giunti alla conclusione che la forza che si esercita tra due galassie qualsiasi è proprio espressa dalla legge di gravitazione universale. Tale risultato è stato però ottenuto considerando il caso in cui l'Universo è esteso a tutto lo spazio come caso limite del caso in cui esso sia limitato, caso in cui il suddetto risultato si può provare, senza dubbi di sorta, partendo dalle medesime ipotesi (con al più, eventualmente, quella aggiuntiva che la forza che si esercita tra due galassie ammetta un polo al tendere a zero della distanza) (2).

È evidente che un simile modo di procedere per acquisire il suddetto risultato può dare adito a perplessità ed è quindi anche per questa ragione che si è ritenuto opportuno riesaminare *ex novo* l'intera teoria dei riferimenti naturali con le relative conseguenze cosmologiche, completate con un cenno alle implicazioni che ne derivano non appena si tenga conto del comportamento della velocità della luce.

Nel presente lavoro si è così pervenuti a stabilire, tra l'altro, l'equivalenza dinamica dei riferimenti naturali evitando di assegnare ad alcuno di essi il benché minimo carattere di riferimento privilegiato. E per quanto concerne la legge di gravitazione universale, senza affatto considerare il caso in cui l'Universo è esteso a tutto lo spazio come caso limite, si è pervenuti al risultato che a determinare il moto di una generica galassia rispetto a un qualsiasi riferimento naturale inter-

(1) Cfr. [15].

(2) Si veda in proposito quanto esposto al § 7 del presente lavoro. Si tenga anche conto di quanto detto nella nota (19).

vengono soltanto le forze a distanza espresse dalla legge di gravitazione universale (il che, naturalmente, non è però sufficiente per poter asserire che dette forze siano le uniche che si esercitano tra le galassie, a meno che, come già si è detto, non si consideri il caso in cui l'Universo è esteso a tutto lo spazio come caso limite). Quanto sopra basta per provare l'inconsistenza della convinzione pressoché generale che non sia possibile applicare la teoria newtoniana della gravitazione al caso di un fluido omogeneo esteso a tutto lo spazio.

Si è inoltre posta nella dovuta evidenza l'impossibilità di distinguere per detti riferimenti tra forze di trascinamento e forze effettive (forze gravitazionali), impossibilità che discende in ultima analisi dall'indistinguibilità tra massa inerziale e massa gravitazionale, indistinguibilità che a sua volta, schematizzando l'Universo in un fluido omogeneo, viene ad essere imposta addirittura dall'omogeneità, senza affatto dover far ricorso a quanto indica al riguardo l'esperienza.

Il lavoro si conclude con un cenno, come già si è detto, alle implicazioni che discendono dalla costanza della velocità della luce rispetto ai riferimenti naturali. Da questa proprietà segue che la metrica dello spazio-tempo è proprio quella introdotta da Einstein e de Sitter nel 1932 operando nell'ambito della relatività generale e che l'energia meccanica delle galassie nelle ipotesi sopra elencate è necessariamente nulla. E infine segue che, nel contesto di questa metrica, la forma intrinseca delle equazioni della cosmologia newtoniana, che discendono unicamente dalle ipotesi sopra elencate senza affatto far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione, si traduce proprio e necessariamente nelle equazioni della teoria einsteiniana della gravitazione.

## 2. Equivalenza dal punto di vista cinematico dei riferimenti naturali.

Le ipotesi su cui si fondano le considerazioni che seguono sono:

$\alpha$) lo spazio fisico è l'ordinario spazio euclideo a tre dimensioni;

$\beta$) l'Universo, almeno su grande scala, è omogeneo ed è esteso a tutto lo spazio;

$\gamma$) il comportamento dell'Universo rispetto alla nostra galassia è isotropo, nel senso che, considerato il riferimento individuato da una terna di assi avente l'origine nel baricentro della nostra galassia e gli assi diretti verso tre galassie lontane ad essa non complanari, rispetto a tale riferimento le velocità delle galassie risultano puramente radiali.

Le ipotesi $\beta$) e $\gamma$) sono suggerite dalle indicazioni osservazionali. Assumendo come schema per l'Universo quello della materia disgregata, l'Universo verrà pertanto rappresentato mediante un fluido (3) (fluido cosmologico) — che nel seguito verrà indicato con $\mathscr{U}$ —, in cui siano assenti gli sforzi interni ed esteso a tutto lo spazio, fluido che, stante l'ipotesi $\beta$), si riterrà omogeneo. In proposito, soprattutto in vista delle considerazioni che verranno svolte nel seguito, è il caso di rilevare esplicitamente che l'omogeneità per il fluido $\mathscr{U}$ si può definire prescindendo dal concetto di densità, dopodiché quest'ultimo si può far discendere da quello di omogeneità.

L'ipotesi $\gamma$) implica poi che esista un riferimento $\mathscr{T}_O$ con l'origine in un elemento $O$ di $\mathscr{U}$ rispetto al quale $\mathscr{U}$ abbia comportamento isotropo.

Indicata con $\mu(t)$ la densità di $\mathscr{U}$ e posto

$$h(t) = -\frac{1}{3}\frac{\dot{\mu}}{\mu}, \tag{1}$$

dall'equazione di continuità e dal principio di conservazione della materia si ottiene (4)

$$\frac{dOP}{dt} = h(t)OP, \tag{2}$$

dove $P$ è un qualsiasi elemento di $\mathscr{U}$.

Comunque si consideri poi l'elemento $O'$ di $\mathscr{U}$ e il riferimento $\mathscr{T}_{O'}$ con l'origine in $O'$ e in moto traslatorio rispetto a $\mathscr{T}_O$, la velocità di $P$ rispetto a $\mathscr{T}_{O'}$ risulta ancora espressa da

$$\frac{dO'P}{dt} = h(t)O'P, \tag{2'}$$

(3) È questo lo schema che usualmente viene adottato nelle trattazioni di cosmologia. Al riguardo è il caso di osservare che il rapporto tra il diametro di una generica galassia (stimato oggi in circa $10^5$ anni luce) e il diametro della parte dell'Universo oggi accessibile all'indagine astronomica (ritenendo ovviamente lo spazio fisico euclideo) è dell'ordine di $5 \cdot 10^{-6}$.

(4) Cfr. [7], 2. È il caso di osservare che la legge (2) necessariamente implica che la funzione $h(t)$ abbia l'espressione (1): si veda in proposito la nota (6) di [7].

con la stessa funzione $h(t)$ che compare in (2). Conformemente alla terminologia introdotta in [7], chiamati *naturali* i riferimenti $\mathcal{T}_O$ e $\mathcal{T}_{O'}$, si può quindi affermare che:

I. *Il fluido* $\mathcal{U}$ *presenta il medesimo comportamento cinematico, espresso dalla legge* (2), *rispetto a tutti i riferimenti naturali.*

Il riferimento $\mathcal{T}_O$, dal punto di vista cinematico, è quindi assolutamente indistinguibile da ogni altro riferimento naturale.

Da (2) si deduce poi subito l'espressione dell'accelerazione di $P$ rispetto a $\mathcal{T}_O$:

$$\frac{d^2 OP}{dt^2} = (\dot{h} + h^2)OP\,, \tag{3}$$

espressione che, come subito segue da (2′), risulta ovviamente avere la stessa forma in ogni riferimento naturale:

$$\frac{d^2 O'P}{dt^2} = (\dot{h} + h^2)O'P\,.$$

### 3. Equivalenza dal punto di vista dinamico dei riferimenti naturali.

In accordo con quanto indica l'osservazione astronomica, salvo diverso esplicito avviso, si riterrà che l'accelerazione di $P$ rispetto a $\mathcal{T}_O$ (e quindi rispetto a ogni riferimento naturale) risulti diversa da zero ([5]).

Ciò premesso, si osservi che in tutto l'intervallo di tempo, eventualmente infinito, in cui la funzione $h(t)$ è di segno costante (ad esempio positivo: caso in cui $\mathcal{U}$ si espande, che è il caso in accordo con la realtà quale oggi si presenta) la densità $\mu(t)$ risulta funzione monotòna di $t$ in senso stretto e quindi funzione invertibile di $t$, che si può pertanto esprimere in detto intervallo in funzione di $\mu$. L'eguaglianza (3), dove

([5]) Il parametro di decelerazione $q$, definito da

$$q = -\frac{\dot{h} + h^2}{h^2}\,,$$

è ancora oggi assai mal conosciuto. Comunque le indicazioni astronomiche forniscono per esso sistematicamente valori positivi, il che comporta $\dot{h} + h^2 < 0$, ossia, stante (3), un processo di decelerazione per il fluido $\mathcal{U}$ e quindi per l'Universo.

ora, stante quanto osservato al § precedente, il riferimento $\mathscr{T}_0$ è un qualsiasi riferimento naturale, si può pertanto scrivere

$$\frac{d^2OP}{dt^2} = F(\mu)OP\,, \tag{4}$$

con la funzione $F(\mu)$ continua non appena si ritenga continua, come d'altronde è implicito nelle considerazioni sino ad ora svolte, la funzione $\dot{h} + h^2$. La suddetta considerazione potendosi ripetere per ogni intervallo in cui $h(t)$ è di segno costante [6], l'eguaglianza (4) sussiste, con $F(\mu)$ continua, in tutto l'intervallo in cui $\dot{h} + h^2$, intesa ovviamente come funzione di $t$, è continua.

L'equaglianza (4) indica che è la presenza della materia che costituisce il fluido $\mathscr{U}$ — come appunto esprime la comparsa in essa della densità $\mu$ — a dare origine all'accelerazione di $P$ rispetto a $\mathscr{T}_0$ (e quindi rispetto a ogni altro riferimento naturale), accelerazione che risulta specificata non appena sia nota la funzione $F(\mu)$.

Intendendo per forza che agisce su $P$ considerata rispetto al riferimento $\mathscr{T}_0$ tutto ciò che può produrre per $P$ un'accelerazione rispetto a $\mathscr{T}_0$, l'eguaglianza (4), in base alla precisazione fatta sopra, rappresenta l'*equazione fondamentale della dinamica* scritta nel riferimento $\mathscr{T}_0$ per l'elemento $P$ e riferita all'unità di massa, nel senso che $F(\mu)OP$ rappresenta il risultante delle forze specifiche (forze per unità di massa) [7] che agiscono su $P$, considerate rispetto al riferimento $\mathscr{T}_0$.

Comunque considerato un valore della densità $\mu$ nel suo intervallo di variabilità (che è l'intervallo in cui è definita $F(\mu)$), valore che verrà ancora indicato con $\mu$, e comunque considerata una sua decomposizione in due addendi $\mu_1$ e $\mu_2$ soggetti alla sola condizione di essere positivi, le accelerazioni $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ che si otterrebbero per $P$ in corrispondenza ai valori, $\mu, \mu_1, \mu_2$ per la densità di $\mathscr{U}$ risulterebbero espresse da

$$\boldsymbol{a} = F(\mu)OP\,, \qquad \boldsymbol{a}_1 = F(\mu_1)OP\,, \qquad \boldsymbol{a}_2 = F(\mu_2)OP\,,$$

ed è pertanto sufficiente fare ricorso al principio di sovrapposizione delle

(6) È ovvio che il numero di detti intervalli è superiore a uno se e solo se $\mathscr{U}$ non si espande indefinitamente.

(7) Per ulteriori eventuali precisazioni si veda il § 4.

forze simultanee [8], ossia al principio del parallelogrammo delle accelerazioni, per dedurre che deve risultare

$$F(\mu) \equiv F(\mu_1 + \mu_2) = F(\mu_1) + F(\mu_2) \, .$$

Questa eguaglianza, dovendo sussistere per ogni possibile scelta di $\mu_1$ e $\mu_2$, oltre che di $\mu$, stante la supposta continuità della funzione $F(\mu)$ implica a sua volta, come è ben noto:

$$F(\mu) = \varkappa\mu \, , \tag{5}$$

con $\varkappa$ costante $\big(\varkappa = F(1)\big)$.

Posto

$$k = -\frac{3\varkappa}{4\pi} \, ,$$

la sostituzione di (5) in (4) dà luogo a

$$\frac{d^2 OP}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi k \mu OP \tag{6}$$

che è l'*equazione esplicita del moto di $P$ rispetto al riferimento naturale $\mathcal{T}_O$*.

Detta equazione coincide con l'equazione che si sarebbe ottenuta ritenendo il riferimento $\mathcal{T}_O$ inerziale, nullo il risultante delle forze specifiche a distanza esercitate su $P$ dalla parte di $\mathcal{U}$ esterna alla sfera materiale $\mathcal{S}_{OP}$ di centro $O$ e raggio $|OP|$ e le forze a distanza espresse dalla legge di gravitazione universale (con $k$ costante di gravitazione universale). Nulla però autorizza, *a priori*, un tale modo di procedere che è quello che sino ad oggi è stato seguito nelle trattazioni di cosmologia fatte in termini newtoniani [9]. L'equazione (6) è stata invece qui ottenuta senza imporre *a priori* alcuna limitazione al riferimento $\mathcal{T}_O$ e soprattutto senza far ricorso alla legge di gravitazione universale, ricorrendo invece unicamente alle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$, ipotesi che sono suggerite dall'osservazione astronomica.

Va inoltre detto che, conformemente a quanto indica l'osservazione

[8] Il comune istante in cui le forze agiscono simultaneamente è ovviamente quello in cui la densità di $\mathcal{U}$ assume il valore $\mu$. Detto istante è univocamente determinato soltanto se $\mathcal{U}$ si espande indefinitamente.

[9] Si veda in proposito [7], 13.

astronomica (10) (e in accordo con quanto suggerisce il fatto che le forze a distanza hanno carattere attrattivo), il segno della costante $k$ non può che essere positivo. Introducendo il parametro di decelerazione:

$$q = -\frac{\dot{h} + h^2}{h^2},$$

si ottiene anzi

$$k = \frac{3}{4\pi}\frac{h^2 q}{\mu},$$

relazione esprimente che dalla conoscenza dei valori attuali di $h$, $\mu$, $q$ si può risalire al valore della costante $k$, con la possibilità (sia pure al momento ancora teorica, stante la grande difficoltà che ancora oggi sussiste nel determinare i suddetti valori attuali, specialmente quello di $q$) di effettuare un confronto di tale valore con il valore della costante di gravitazione universale quale viene determinato per via sperimentale. Ulteriori considerazioni e precisazioni al riguardo, specialmente per quanto concerne $q$, verranno svolte al § 11 e in particolare nella nota (33).

Va poi esplicitamente osservato, come d'altra parte è implicito nelle considerazioni che hanno condotto a (6), che, analogamente all'eguaglianza (2), l'equazione (6) conserva immutata la sua forma in ogni riferimento naturale, nel senso che, comunque considerato un altro riferimento naturale $\mathscr{T}_{O'}$, l'equazione del moto di $P$ rispetto a detto riferimento risulta espressa da

$$\frac{d^2 O'P}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi k\mu O'P\,. \tag{6'}$$

È il caso anzi di osservare in proposito che (6′) segue direttamente da (6) ed è quindi sufficiente ottenere (6) rispetto ad un assegnato riferimento naturale per dedurre l'equazione analoga in ogni altro riferimento naturale. Infatti da

$$\frac{d^2 O'P}{dt^2} = \frac{d^2 OP}{dt^2} - \frac{d^2 OO'}{dt^2},$$

(10) Si tenga presente quanto ricordato in nota (5).

tenendo presente (6), segue

$$\frac{d^2 O'P}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi k\mu OP + \frac{4}{3}\pi k\mu OO',$$

che corrisponde appunto a (6′).

Osservando anche che il caso in cui l'accelerazione di $P$ rispetto a $\mathscr{T}_O$, e quindi rispetto a ogni riferimento naturale, risulti nulla rientra come caso particolare (caso caratterizzato da $k = 0$) nella presente esposizione, si ha pertanto:

II. *Il fluido* $\mathscr{U}$ *presenta il medesimo comportamento dinamico, espresso dall'equazione* (6), *rispetto a tutti i riferimenti naturali.*

Ricordando il risultato I si può quindi affermare che:

III. *Tutti i riferimenti naturali sono tra loro equivalenti, nel senso che* $\mathscr{U}$ *ha, sia dal punto di vista cinematico che da quello dinamico, il medesimo comportamento rispetto ad essi.*

È infine il caso di osservare che, indicata con $\varphi(r)$ $\big($con $r = |OP|\big)$ una qualsiasi funzione il cui gradiente risulti uguale al secondo membro di (6), si ha che $\varphi(r)$ soddisfa all'equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = -4\pi k\mu .$$

Dal confronto di (6) con (3) segue poi l'*equazione di evoluzione* per il fluido $\mathscr{U}$:

$$\dot{h} + h^2 = -\frac{4}{3}\pi k\mu , \tag{7}$$

da cui segue

$$h = \sqrt{\frac{8}{3}\pi k\mu + a\mu^{2/3}}, \tag{8}$$

con $a$ costante di integrazione, ecc., conformemente a quanto esposto in [7], 4.

## 4. Digressione sulle forze gravitazionali.

Premesso che si possono sempre immaginare esperienze e dispositivi, sia pure soltanto ideali, atti a fornire una valutazione autonoma, ossia indipendente da ogni considerazione di natura dinamica, delle forze a distanza (forze gravitazionali, che l'esperienza indica essere di tipo attrattivo) ([11]) — esperienze e dispositivi atti quindi a misurare l'intensità di dette forze —, le considerazioni svolte ai nn. 1, 2, 3 di [7], App. I, opportunamente adattate, si possono ripetere per due qualsiasi elementi di $\mathscr{U}$. Esse, facendo ricorso al principio di sovrapposizione delle forze simultanee (al quale nel caso delle suddette forze, per quanto sopra osservato, si può dare una formulazione che prescinde da ogni considerazione dinamica) e al principio di azione e reazione, portano all'introduzione per gli elementi di $\mathscr{U}$ delle masse gravitazionali attiva e passiva ed alla loro identificazione — la massa gravitazionale per detti elementi — non appena si assuma la stessa unità di misura per dette masse (ossia uno stesso «campione» a cui si attribuisca massa gravitazionale attiva e massa gravitazionale passiva unitarie).

D'altra parte l'introduzione delle forze è stata fatta al § 3 per via dinamica, il che comporta l'introduzione, accanto alla massa gravitazionale, della massa inerziale, la cui identificazione con la precedente, in generale, può essere legittimata soltanto dall'esperienza. È sufficiente però tenere presente l'omogeneità di $\mathscr{U}$ perché per i suoi elementi non soltanto si vengano ad identificare le masse gravitazionali attiva e passiva, come accade in generale non appena si assuma la stessa unità di misura per dette masse, ma anche la massa gravitazionale con la massa inerziale, non appena, scelta opportunamente l'unità di misura per le forze (naturalmente nella loro valutazione fatta in modo indipendente da considerazioni dinamiche), si assuma per le suddette masse ancora una volta la stessa unità di misura. In altri termini, nel caso di un mezzo continuo omogeneo, per l'identificazione delle masse inerziali dei suoi elementi con le rispettive masse gravitazionali non è affatto necessario far ricorso al principio che sancisce l'identità tra le suddette masse.

Pertanto, nel caso di un continuo omogeneo, come appunto è il caso del fluido $\mathscr{U}$, si può semplicemente parlare di massa dei suoi elementi e, conseguentemente, come si è fatto sino ad ora, si può parlare semplicemente della sua densità $\mu(t)$, senza distinzioni, in pieno accordo con quanto si è osservato al § 2 parlando dell'omogeneità e della densità di $\mathscr{U}$. E resta così anche eliminata ogni perplessità che poteva esser sorta nel momento in cui al § 3 si è parlato di forze specifiche.

([11]) Come già è stato implicitamente escluso sino a questo momento, si esclude anche ora l'eventualità che i punti o elementi materiali considerati nel presente § possano essere elettrizzati.

Inoltre, tenendo presenti le considerazioni e precisazioni ora fatte, le considerazioni svolte in [7], App. I pongono chiaramente in evidenza che, non appena si ritenga (come, almeno a livello locale, indica l'esperienza) che la grandezza della forza che si esercita tra due elementi $P$ e $Q$ di $\mathscr{U}$ dipenda unicamente da detti elementi e dalla loro distanza, essa risulta uguale al prodotto della massa dei due elementi per una funzione positiva $f(|PQ|)$ della sola loro distanza $|PQ|$. La forza che $Q$ esercita su $P$ ha poi, per motivi di simmetria, la direzione di $PQ$ e, stante il carattere attrattivo delle forze a distanza, ne ha anche il verso.

Pertanto, considerato un qualsiasi dominio limitato $\mathscr{C}$ dello spazio, il risultante riferito all'unità di massa delle forze gravitazionali esercitate nell'istante $t$ su un qualunque elemento $P$ di $\mathscr{U}$ dagli elementi $Q$ di $\mathscr{U}$ che nell'istante $t$ sono contenuti in $\mathscr{C}$ risulta espresso da

$$\mu(t)\int_{\mathscr{C}} f(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C}, \tag{9}$$

dove, come già in precedenza, si sono usati gli stessi simboli per indicare sia gli elementi del continuo che le posizioni da questi occupate nell'istante considerato. È poi ovvio che in (9) l'integrazione si intende effettuata rispetto a $Q$.

Stante il suo significato fisico, la funzione $f(|PQ|)$ risulta ovviamente definita per ogni $P \neq Q$. Essa nel seguito, al pari di ogni altra funzione sin qui considerata, verrà ritenuta continua nel suo intervallo di definizione. Inoltre, stante il suo significato fisico, è evidente che l'integrale (9) va ritenuto convergente nel senso usuale del termine, ossia nel senso che, nell'ipotesi che nell'istante $t$ $P$ sia contenuto in $\mathscr{C}$, comunque considerata una successione di aperti $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n, \ldots$, contenenti $P$ e tali che risulti $\mathscr{A}_n \supset \mathscr{A}_{n+1}$ per ogni $n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} \mathscr{A}_n = 0$, e posto $\mathscr{D}_n = \mathscr{C} - \mathscr{C} \cap \mathscr{A}_n$, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{D}_n} f(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C}$$

esista finito (con ovvio significato del termine) ed indipendente dalla successione di aperti considerata. È pertanto sufficiente calcolare detto limite in corrispondenza a una particolare successione per ottenere il valore dell'integrale.

Analogamente, con le debite precisazioni che verranno fatte in seguito, anche nel caso in cui il dominio $\mathscr{C}$ sia l'ordinario spazio euclideo $\mathscr{R}^3$ l'integrale (9) va inteso convergente nel senso usuale del termine, risultando ormai ovvio che cosa si debba intendere con questo.

## 5. Considerazioni sul moto di $P$ rispetto ai riferimenti naturali.

Le considerazioni svolte al § 3 si possono riassumere, come si è visto, nel seguente risultato:

IV. *Dalle ipotesi fatte su $\mathscr{U}$ segue l'equazione esplicita del moto di $P$ rispetto a ogni riferimento naturale, senza far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione.*

Il fatto poi che questa equazione, espressa da (6), conservi immutata la sua forma rispetto a ogni riferimento naturale comporta, come è stato messo in evidenza, che anche dal punto di vista dinamico tutti i riferimenti naturali siano tra loro equivalenti.

Ciò premesso, la possibilità di parlare di un riferimento assoluto, o più semplicemente di un riferimento inerziale $\mathscr{T}$ — riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto al riferimento assoluto —, comporterebbe la possibilità di associare ad ogni elemento $P$ del fluido $\mathscr{U}$ un'accelerazione assoluta, l'accelerazione $\boldsymbol{a}_P$ di $P$ rispetto a $\mathscr{T}$. Ma il riferimento $\mathscr{T}$ non è affatto reperibile (reperibili risultano soltanto i riferimenti naturali e, ovviamente, ogni altro riferimento per il quale sia noto il moto rispetto a un riferimento naturale) e pertanto il campo di accelerazioni costituito dalle accelerazioni assolute degli elementi di $\mathscr{U}$ risulta indeterminato: ritenendo, come d'altra parte indica il risultato III, che i riferimenti naturali si muovano di moto traslatorio rispetto a $\mathscr{T}$, si ha che, dati due elementi qualsiasi $O$ e $P$ di $\mathscr{U}$, risulta determinata la differenza $\boldsymbol{a}_P - \boldsymbol{a}_O$, espressa, ricordando (6), da

$$\boldsymbol{a}_P - \boldsymbol{a}_O \equiv \frac{d^2 OP}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi k \mu OP\,, \tag{10}$$

ma non risultano determinate le singole accelerazioni $\boldsymbol{a}_P$ e $\boldsymbol{a}_O$, e nessuna esperienza di tipo meccanico è tale da permettere di determinare il suddetto campo, ossia tale da poter individuare il riferimento inerziale $\mathscr{T}$ ([12]).

([12]) Almeno fino a quando non sopraggiungano fatti nuovi, che possono essere forniti unicamente da scoperte nell'ambito dell'astronomia extragalattica, scoperte essenzialmente collegate alla radiazione di fondo.

Tale campo permane pertanto completamente indeterminato (per poterlo determinare occorrerebbe poter determinare, stante (10), l'accelerazione di un elemento, sia pure qualsiasi, di $\mathscr{U}$) e la perfetta equivalenza sia dal punto di vista cinematico sia, soprattutto, da quello dinamico che sussiste tra i riferimenti naturali e che deve essere rispettata non permette di assegnare il ruolo di riferimento privilegiato a nessun riferimento naturale, a meno che, assegnando inizialmente tale ruolo a uno di questi riferimenti, tutto accada in modo tale da permettere di assegnare contemporaneamente detto ruolo a tutti i riferimenti naturali.

Assegnando il suddetto ruolo al riferimento naturale $\mathscr{T}_O$ ritenendo $\boldsymbol{a}_O = \mathbf{0}$, ossia ritenendo $\mathscr{T}_O$ inerziale, l'accelerazione di $P$ rispetto a $\mathscr{T}_O$ risulta determinata dal risultante delle forze effettive agenti su $P$, forze effettive che nella presente trattazione si riducono alle forze gravitazionali esercitate su $P$ dagli altri elementi di $\mathscr{U}$. Detto risultante, riferito all'unità di massa, risulta espresso, stante (6), da $-\frac{4}{3}\pi k\mu OP$.

D'altra parte, assegnando invece il suddetto ruolo di riferimento inerziale al riferimento naturale $\mathscr{T}_{O'}$, si ha che il risultante delle forze gravitazionali specifiche agenti su $P$ risulta espresso da $-\frac{4}{3}\pi k\mu O'P$, che è quanto basta per poter affermare — come d'altronde era già implicito nelle considerazioni svolte per le accelerazioni assolute — che, come nel caso di queste, anche i risultanti delle forze gravitazionali agenti sugli elementi di $\mathscr{U}$ risultano indeterminati.

D'altronde ciò appare naturale non appena si osservi che, ricordando anche quanto osservato alla fine del § 4 sulle forze gravitazionali, il risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su $P$ dagli altri elementi $Q$ di $\mathscr{U}$ risulta espresso dall'integrale generalizzato

$$\mu(t)\int_{\mathscr{R}^3} f(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C},$$

integrale che, così come è scritto, risulta, come si può facilmente constatare, affatto indeterminato.

Occorre però osservare che, non appena si assegni a $\mathscr{T}_O$ il ruolo di riferimento inerziale, il suddetto risultante viene ad essere espresso dal secondo membro di (6), il che comporta che per il suddetto integrale generalizzato debba risultare

$$\int_{\mathscr{R}^3} f(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C} = -\frac{4}{3}\,\pi k OP,$$

eguaglianza che, ricordando quanto precisato alla fine del § 4 circa la convergenza, equivale ad affermare che deve essere

$$(11)\qquad \lim_{r\to\infty}\int_{\mathscr{S}_r} f(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C} = -\frac{4}{3}\,\pi k OP\,,$$

dove con $\mathscr{S}_r$ si è indicato il dominio sferico di centro $O$ e di raggio $r \geqslant |OP|$.

Considerata pertanto la differenza

$$(12)\qquad f_1(|PQ|) = f(|PQ|) - \frac{k}{|PQ|^2}\,,$$

e ricordando che, qualunque sia $r \geqslant |OP|$, risulta

$$(13)\qquad \int_{\mathscr{S}_r} \frac{PQ}{|PQ|^3}\,d\mathscr{C} = -\frac{4}{3}\,\pi OP\,,$$

da (11) segue

$$(14)\qquad \lim_{r\to\infty}\int_{\mathscr{S}_r} f_1(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C} = \mathbf{0}\,,$$

che è quanto basta per poter asserire che la funzione $f(|PQ|)$ risulta indeterminata. La relazione (14), tenendo presente (12), precisa però che la totalità delle funzioni che soddisfano a (11) è costituita dalle funzioni ottenute aggiungendo a $k/|PQ|^2$ una qualsiasi funzione $f_1(|PQ|)$ che soddisfi a (14) e per la quale inoltre risulti [13], ricordando che deve essere $f(|PQ|) > 0$:

$$(15)\qquad f_1(|PQ|) + \frac{k}{|PQ|^2} > 0\,.$$

Stante (11) e (6), una funzione $f_1(|PQ|)$ che soddisfi a (14) non dà però alcun contributo al moto di $P$ rispetto al riferimento $\mathscr{T}_0$ (e quindi rispetto a ogni altro riferimento naturale) e si può quindi concludere che:

[13] Tale è, ad esempio, ogni funzione $f(r)$ che sia infinitesima di ordien superiore a $1/r^2$ al tendere di $r$ ad infinito e che soddisfi a (15).

V. *Nell'ipotesi che il riferimento $\mathcal{T}_O$ sia inerziale, a determinare il moto di $P$ rispetto ad esso contribuiscono soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale (con $k$ costante di gravitazione universale).*

Pertanto, tenendo presente, come d'altronde già risulta da (13), che è

$$\int_{\mathcal{S}_{OP}} \frac{PQ}{|PQ|^3}\, d\mathcal{C} = -\frac{4}{3}\pi OP\,, \tag{16}$$

dove con $\mathcal{S}_{OP}$ si è indicato il dominio sferico di centro $O$ e raggio $|OP|$, il fatto che a determinare il moto di un qualsiasi elemento $P$ di $\mathcal{U}$ rispetto a $\mathcal{T}_O$ contribuiscano soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale implica che risulti, con il significato di $\mathcal{S}_{OO'}$ ormai ovvio:

$$\frac{d^2O'P}{dt^2} = \frac{d^2OP}{dt^2} - \frac{d^2OO'}{dt^2} = k\mu \int_{\mathcal{S}_{OP}} \frac{PQ}{|PQ|^3}\, d\mathcal{C} - k\mu \int_{\mathcal{S}_{OO'}} \frac{O'Q}{|O'Q|^3}\, d\mathcal{C}\,,$$

da cui, osservando che quest'ultima differenza è proprio uguale a

$$k\mu \int_{\mathcal{S}_{O'P}} \frac{PQ}{|PQ|^3}\, d\mathcal{C}\,,$$

si può affermare che anche rispetto al riferimento naturale $\mathcal{T}_{O'}$, qualunque esso sia, a determinare il moto di $P$ rispetto a detto riferimento contribuiscono soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale. Con ciò, stante il carattere di forze effettive rivestito da dette forze, segue che anche $\mathcal{T}_{O'}$ si comporta come se fosse inerziale.

Pertanto non sussiste alcuna incompatibilità con quanto visto sino ad ora [14] se le considerazioni svolte per il riferimento naturale $\mathcal{T}_O$ si ripetono per il riferimento naturale $\mathcal{T}_{O'}$. L'assegnare ad esso il ruolo di riferimento inerziale comporta che debba essere

$$\int_{\mathcal{R}^3} f(|PQ|)\, \frac{PQ}{|PQ|}\, d\mathcal{C} = -\frac{4}{3}\pi k O'P\,,$$

[14] Si veda anche, al riguardo, quanto osservato all'inizio del § 6.

con il significato da attribuire all'integrale generalizzato ormai ovvio, ecc., da cui segue, come d'altronde si è già visto sopra, il risultato V, ecc. Inoltre le funzioni $f_1(|PQ|)$ in corrispondenza alle quali risulta, analogamente a (14):

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathscr{S}'_r} f_1(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C}=\mathbf{0}\,,$$

dove $\mathscr{S}'_r$ è il dominio sferico di centro $O'$ e raggio $r\geqslant|O'P|$, essendo indipendenti dal riferimento, non differiscono dalle funzioni $f_1(|PQ|)$ che soddisfano a (14).

Con quanto ora visto si ha quindi che quel ruolo di riferimento privilegiato inizialmente assegnato a $\mathscr{T}_O$ risulta in definitiva posseduto da ogni riferimento naturale, risultato che pertanto rispetta e conserva l'assoluta equivalenza tra tutti i riferimenti naturali.

Si può quindi concludere che:

VI. *I riferimenti naturali si comportano come se fossero inerziali e a determinare il moto degli elementi di $\mathscr{U}$ rispetto ad essi contribuiscono soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale.*

## 6. Ulteriori considerazioni sui riferimenti naturali e sulle forze gravitazionali.

La conclusione contenuta nel risultato VI che agli effetti del moto di $P$ i riferimenti naturali si comportino come inerziali non sta affatto a significare che, considerati due siffatti riferimenti, $\mathscr{T}_O$ e $\mathscr{T}_{O'}$, essi siano in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro. Infatti l'accelerazione di $O'$ rispetto a $\mathscr{T}_O$ non è affatto nulla, in quanto è data, ricordando (6), da $-\frac{4}{3}\pi k\mu OO'$. L'apparente paradosso si spiega tenendo presente che il fatto che l'equazione del moto di $P$ conservi immutata la sua forma, espressa da (6), in ogni riferimento naturale, non sta affatto a significare che detta equazione sia la medesima in ognuno di essi: cambiando riferimento cambia il termine $-\frac{4}{3}\pi k\mu OP$, ossia cambia il risultante delle forze specifiche agenti su $P$, risultante che invece si dovrebbe mantenere immutato se detti riferimenti fossero in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro.

Il fatto che i riferimenti naturali si comportino, agli effetti del moto di $P$, come inerziali sta in sostanza a significare, come ampiamente si è visto al § 5, che, comunque considerato il riferimento naturale $\mathscr{T}_O$, il risultante delle forze specifiche rispetto ad esso che agiscono su $P$, dato da $-\frac{4}{3}\pi k\mu OP$, si può interpretare come il risultante delle forze specifiche effettive (ossia delle forze gravitazionali specifiche) che agiscono su $P$, risultante che in effetti è invece indeterminato, come indeterminato è l'integrale generalizzato che esprime detto risultante:

$$\int_{\mathscr{R}^3} f(|PQ|)\,\frac{PQ}{|PQ|}\,d\mathscr{C}\,,$$

ossia l'integrale (15)

$$\int_{\mathscr{R}^3} \frac{PQ}{|PQ|^3}\,d\mathscr{C}\,,$$

stante il fatto che a determinare il moto di $P$ contribuiscono soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale.

La suddetta indeterminazione è conseguenza, come si è visto, dell'impossibilità di parlare di un riferimento assoluto, o più semplicemente di un riferimento inerziale, che si traduce nell'impossibilità di determinare il campo delle accelerazioni assolute, e, conseguentemente, nell'impossibilità di determinare il campo dei risultanti delle forze gravitazionali agenti sugli elementi di $\mathscr{U}$ (16). Tale impossibilità si tra-

(15) È proprio l'indeterminazione di tale integrale che ha generato in passato l'erronea convinzione, risalente a C. Neumann (cfr. [24], Cap. I, Introduzione), e da C. Neumann in poi sistematicamente ripresa (cfr., ad es., [18], 87, 89 e, per maggiori dettagli di carattere storico e critico, [7], 13 e [10]), che un universo infinito e omogeneo sia in conflitto con la legge di gravitazione universale.

(16) L'impossibilità di determinare il campo delle accelerazioni assolute (a cui già accenna Synge in [28], 2) è già stata considerata da Milne in una breve nota del 1942 (cfr. [23]), in cui al riguardo enuncia chiaramente un principio di impotenza che si può aggiungere a quelli elencati da Whittaker in [30], 25. Va però detto che le poche considerazioni svolte al riguardo da Milne si fondano sui lavori [22] e [20] per i quali valgono le considerazioni critiche qui svolte al § 3 a commento dell'equazione (6).

Cenni su detta impossibilità erano già stati adombrati in precedenza da Maxwell in [19], dove al § 102 parla di «relatività della conoscenza dinamica». Si veda, per maggiori indicazioni al riguardo, [10], 11.

L'argomento relativo alla suddetta impossibilità e al conseguente paraduce in definitiva nell'impossibilità di distinguere tra forze di trascinamento e risultanti delle forze gravitazionali: qualunque sia il riferimento naturale $\mathscr{T}_0$ rispetto al quale si considera il moto di $P$, della forza di trascinamento e del risultante delle forze gravitazionali esercitate da $\mathscr{U}$ su $P$ si conosce, e si può conoscere [17], soltanto il risultante, dato dal risultante delle forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale esercitate su $P$ dalla parte di $\mathscr{U}$ costituita dalla sfera materiale $\mathscr{S}_{OP}$.

Questa impossibilità di distinguere tra forze di trascinamento e risultanti delle forze gravitazionali, ossia tra forze apparenti e forze effettive — conseguenza, come si è ampiamente sottolineato, dell'impossibilità di determinare il campo delle accelerazioni assolute —, deriva in ultima analisi dall'indistinguibilità tra massa gravitazionale e massa inerziale, indistinguibilità che per il fluido $\mathscr{U}$, come è stato diffusamente rilevato al § 4, discendendo necessariamente dal fatto che esso è omogeneo, è addirittura indipendente dalle indicazioni fornite al riguardo dall'esperienza.

In conclusione si può quindi affermare che [18]:

VII. *La forza specifica di trascinamento e il risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate da $\mathscr{U}$ su $P$ si presentano inscindibili e ammettono come risultante, qualunque sia il riferimento naturale $\mathscr{T}_0$ rispetto al quale si considera il moto di $P$, il risultante delle forze gravitazionali specifiche espresse dalla legge di gravitazione universale esercitate su $P$ dalla parte di $\mathscr{U}$ costituita dalla sfera materiale $\mathscr{S}_{OP}$.*

Il risultato ora stabilito, come d'altronde tutta la trattazione sino ad ora svolta, in analogia con quanto accade per la relatività generale,

dosso che ne deriva (qui chiarito all'inizio del § 6) è stato ripreso da McCrea in [21], dove tra l'altro stabilisce un risultato che presenta aspetti analoghi a quello qui stabilito sull'equivalenza dei riferimenti naturali; McCrea, sotto l'influenza delle critiche rivolte da Layzer in [17] ai lavori [22] e [20] (si veda in proposito il § 8 del presente lavoro e, per maggiori indicazioni, [7], 13), fa però riferimento al caso fortemente riduttivo in cui il fluido $\mathscr{U}$ sia limitato (caso in cui esiste un riferimento privilegiato sul quale McCrea fonda la sua deduzione) e, analogamente a Milne, parte naturalmente dalla legge di gravitazione universale, legge che si può invece dedurre come necessaria conseguenza dalle ipotesi fatte da McCrea per il fluido $\mathscr{U}$.

(17) Almeno sino a quando non emerga la possibilità di individuare fisicamente un effettivo riferimento privilegiato. Si ricordi al riguardo quanto è stato detto nella nota (12).

(18) Per ulteriori considerazioni sui riferimenti naturali si veda [7], 7, 8, 9, 12.

pone in piena luce l'aspetto inscindibile che nei suoi fondamenti la meccanica newtoniana presenta nei confronti della teoria newtoniana della gravitazione.

## 7. Caso del fluido $\mathscr{U}$ limitato e caso del fluido $\mathscr{U}$ esteso a tutto lo spazio considerato come caso limite.

Ritenendo momentaneamente che il fluido $\mathscr{U}$ sia, oltre che omogeneo, limitato, è sufficiente l'ipotesi che esso abbia comportamento isotropo rispetto a un riferimento $\mathscr{T}_0$ con origine in un suo elemento $O$ per dedurre — ritenendo che la funzione $f(|PQ|)$, in analogia a quanto accade per la legge di gravitazione universale, ammetta un polo per $|PQ| = 0$ (19) — che le configurazioni assunte da $\mathscr{U}$ al variare del tempo sono necessariamente sferiche e che le forze gravitazionali che si esercitano tra gli elementi di $\mathscr{U}$ risultano necessariamente espresse dalla legge di gravitazione universale. Detto risultato si ottiene facendo ricorso a un teorema di inversione del tipo di quello dimostrato in [14] e verrà esposto per esteso in un successivo lavoro (20).

Il risultato ora richiamato implica che a determinare il moto dell'elemento $P$ di $\mathscr{U}$, qualunque esso sia, sempre nell'ipotesi che $\mathscr{U}$ sia limitato, contribuiscano soltanto le forze gravitazionali esercitate dalla sfera materiale $\mathscr{S}_{OP}$ (21) di centro $O$ e raggio $|OP|$. In altri termini, la parte di $\mathscr{U}$ esterna a detta sfera non dà alcun contributo al moto di $P$, risultato che a sua volta, sussistendo qualunque possa essere il diametro di $\mathscr{U}$, si può continuare a ritenere valido anche nel caso in cui $\mathscr{U}$ sia esteso a tutto lo spazio purché detto caso venga considerato come caso limite del caso in cui $\mathscr{U}$ sia limitato.

Intendendo il caso di $\mathscr{U}$ esteso a tutto lo spazio nel senso suddetto, segue necessariamente che anche in tale caso le forze gravitazionali che si esercitano tra i suoi elementi risultano espresse dalla legge di

(19) Detta ipotesi è certamente sovrabbondante, ma da essa per il momento non si può prescindere in quanto la dimostrazione del teorema a cui si accenna è stata per ora ottenuta ricorrendo proprio a tale ipotesi.

(20) Esso è stato ottenuto in [3] con limitazioni per la frontiera di $\mathscr{U}$ e in [5], ma per via non corretta. Detto risultato è stato ottenuto anche, ma con un procedimento meno diretto di quello al quale si è qui accennato, in [7], 6.

(21) Naturalmente detta sfera se non è interamente contenuta in $\mathscr{U}$ va pensata egualmente costituita da un fluido avente la stessa densità di $\mathscr{U}$.

gravitazione universale. È pertanto con la precisazione relativa ad $\mathcal{U}$ ora fatta che va inteso tale risultato quando viene ritenuto valido anche per il caso in cui $\mathcal{U}$ sia esteso a tutto lo spazio ed è quindi con questa precisazione che esso va inteso in [7], dove d'altra parte è stato ottenuto considerando il suddetto caso proprio come caso limite (22).

Nella presente esposizione, e precisamente nel § 5, si è provato come, partendo da $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio, si pervenga al risultato che a determinare il moto di $P$ contribuiscono soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale, ma non ad escludere che accanto a dette forze ve ne possano essere altre che, unitamente a queste, agiscano tra gli elementi di $\mathcal{U}$. Queste altre forze devono essere tali da soddisfare alla condizione espressa da (14), la quale non è sufficiente per poter asserire che la funzione integranda debba essere nulla (23).

Poiché al moto di $P$ contribuiscono soltanto le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale, si ha che, in assenza di esse, il risultante delle eventuali restanti forze gravitazionali agenti su $P$ risulterebbe nullo e pertanto il moto di $P$ rispetto al riferimento naturale $\mathcal{T}_0$, e quindi rispetto a ogni riferimento naturale, risulterebbe traslatorio uniforme; di conseguenza tutti i riferimenti naturali risulterebbero tra loro in moto traslatorio uniforme e verrebbero a svolgere il ruolo di altrettanti riferimenti inerziali, che è esattamente quanto accadrebbe nel caso in cui le suddette restanti forze fossero assenti, ossia nulle.

Alla luce di queste considerazioni e precisazioni, le eventuali forze gravitazionali che differiscono da quelle espresse dalla legge di gravi-

(22) Come d'altra parte è stato fatto in [4], [5], [1] e [6]. Ed è con la precisazione fatta sopra che va quindi inteso il suddetto risultato, ampiamente richiamato in [8], [9], [10], [11] e [13].

(23) Ad esempio soddisfano alla condizione (14) forze per le quali $f_1(r)$ è del tipo $ke^{-\lambda r}/r^2$, con $\lambda$ costante positiva, che è la modificazione alla legge di gravitazione universale proposta da Seeliger in [26] e [27] (modificazione già proposta da Laplace in [16], Tomo V, Libro XVI, Cap. IV) per formulare una teoria cosmologica compatibile con la convinzione, a quel tempo universalmente accettata (con forse un'unica eccezione, quella di Maxwell (cfr. [19], § 102)), che l'Universo, ritenuto su larga scala omogeneo e infinito, fosse statico. Analogamente soddisfano a (14) forze per le quali il potenziale è del tipo di Yukawa, ossia del tipo $ke^{-\lambda r}/r$, con $\lambda$ costante positiva, che è proprio la modificazione al potenziale newtoniano proposta da Neumann in [24], Cap. V per ragioni analoghe a quelle considerate da Seeliger. In proposito si veda anche [10].

tazione universale — queste ultime essendo le sole, come più volte si è ricordato, che contribuiscono al movimento di $\mathscr{U}$ — possono essere ignorate ed è anche in tal senso che va quindi intesa l'affermazione che anche nel caso in cui $\mathscr{U}$ sia esteso a tutto lo spazio le forze gravitazionali risultano ancora espresse dalla legge di gravitazione universale.

## 8. Sulla possibilità di applicare la teoria newtoniana della gravitazione a un fluido omogeneo esteso a tutto lo spazio.

Le considerazioni svolte sino ad ora hanno permesso di provare, senza far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione, che l'equazione del moto di un qualsiasi elemento $P$ di $\mathscr{U}$ è necessariamente espressa da (6) e che a determinare il moto di $P$ contribuiscono unicamente le forze gravitazionali espresse dalla legge di gravitazione universale.

Ritenendo, anche alla luce delle considerazioni esposte al § 7 (e come d'altra parte viene fatto in ogni trattazione di cosmologia newtoniana), che le forze gravitazionali diverse dalle suddette forze siano nulle, ossia ritenendo che le forze gravitazionali che si esercitano tra gli elementi di $\mathscr{U}$ siano proprio espresse da detta legge (come d'altronde si otterrebbe considerando il caso in cui $\mathscr{U}$ è esteso a tutto lo spazio come caso limite del caso in cui $\mathscr{U}$ è limitato) e tenendo presente (16), da (6) segue che il risultante delle forze specifiche agenti su $P$, rispetto al riferimento $\mathscr{T}_0$, è dato dal risultante delle forze gravitazionali specifiche esercitate su $P$ dalla parte di $\mathscr{U}$ costituita dalla sfera materiale $\mathscr{S}_{OP}$.

Si può pertanto affermare che:

VIII. *Agli effetti del moto di $P$ rispetto a un qualsiasi riferimento naturale $\mathscr{T}_0$ tutto accade come se il riferimento $\mathscr{T}_0$ fosse inerziale, le forze gravitazionali fossero espresse dalla legge di gravitazione universale e la parte di $\mathscr{U}$ esterna alla sfera materiale $\mathscr{S}_{OP}$ non desse alcun contributo al moto di $P$, cioè come se $\mathscr{U}$ si riducesse unicamente alla sfera materiale $\mathscr{S}_{OP}$.*

Ovviamente, una volta ritenuto che le forze gravitazionali siano proprio espresse dalla legge di gravitazione universale, a detto risultato si poteva pervenire direttamente e brevemente partendo da (6), tenendo presente che sussiste l'eguaglianza (16), che le forze gravitazionali per il loro carattere intrinseco sono forze effettive e ricordando che un riferimento è inerziale quando l'equazione del moto di un punto o elemento rispetto a detto riferimento è espressa dall'equazione fondamentale della dinamica nella quale il risultante delle forze agenti sul punto o elemento è dato dal risultante delle forze effettive.

Il risultato VIII legittima quindi il modo di procedere per la deduzione dell'equazione (6) che viene seguito nelle trattazioni di cosmologia newtoniana e che è stato richiamato al § 3, modo di procedere che è stato in particolare seguito da Milne e McCrea, i quali nel 1934, in [22] e [20], per primi hanno affrontato lo studio della cosmologia in termini newtoniani ([24]).

Quanto stabilito sino ad ora, e in particolare i risultati riassunti in VIII, provano l'erroneità delle considerazioni svolte da Layzer in [17], dove nega la possibilità di formulare una teoria cosmologica newtoniana con $\mathcal{U}$ esteso a tutto lo spazio ([25]). In particolare risulta provata l'erroneità della convinzione affatto generale che i risultati riassunti in VIII possano essere giustificati soltanto facendo ricorso alla teoria della relatività generale ([26]).

In generale quanto visto sino ad ora permette di ritenere inconsistente il cosiddetto paradosso newtoniano, il quale in sostanza asserisce addirittura l'impossibilità di applicare la teoria newtoniana della gravitazione a un fluido omogeneo esteso a tutto lo spazio ([27]).

## 9. Le equazioni della cosmologia newtoniana.

Fissato l'istante $t_0$ una volta per tutte e posto

$$R(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} h(t)\,dt\right],$$

da (2) si ottiene

$$OP = R(t)\,OP_0\,, \tag{17}$$

([24]) Naturalmente, nel riconoscere questa priorità, deliberatamente si trascura il tentativo di Seeliger, risalente alla fine del secolo scorso, a cui si è accennato nella nota ([23]) e che fa riferimento a un modello di universo che, essendo statico, risulta in pieno contrasto con le indicazioni astronomiche.

([25]) Per maggiori dettagli si veda [7], 13 e [10], 5.

([26]) Si veda, ad es., [17]; [29], p. 475; [25], Cap. 8, § 9; ecc., e, per maggiori dettagli, [7], 13 e [10], 5.

([27]) Per maggiori ragguagli al riguardo si veda [10], tenendo conto naturalmente delle precisazioni fatte al § 7 del presente lavoro. Si veda anche la nota ([15]).

dove con $P_0$ si è indicata la posizione di $P$ all'istante $t_0$. Stante (17), da (1), (2), (6) segue ([28])

$$\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{3}\frac{\dot{\mu}}{\mu} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi k\mu . \tag{19}$$

Da (19), tenendo presente che risulta, come d'altronde subito segue da (18):

$$\frac{4}{3}\pi k\mu R^3 = \text{cost.},$$

si ottiene

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8}{3}\pi k\mu + 2\frac{\alpha}{R^2}, \tag{20}$$

dove $\alpha$ è il valore della costante dell'energia che competerebbe all'elemento $P$, pensato dotato di massa unitaria, qualora fosse situato a distanza $R$ dall'origine del riferimento naturale rispetto al quale si considera il moto.

Le equazioni (18) (equazione di continuità) e (19) (che concettualmente non differisce dall'equazione di evoluzione di $\mathscr{U}$, espressa da (7)), unitamente a (20) (integrale dell'energia, che concettualmente non differisce da (8)), costituiscono le equazioni che sono a fondamento della cosmologia newtoniana. Esse, come già è stato più volte sottolineato, sono state qui dedotte senza far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione, ma utilizzando unicamente le ipotesi fatte sul fluido $\mathscr{U}$.

Come è stato osservato da Milne e McCrea in [22] e [20], le suddette equazioni sono analoghe alle equazioni che si ottengono operando nell'ambito relativistico, ma l'analogia, contrariamente a quanto è stato ritenuto fino ad oggi, non è soltanto formale ma sostanziale, come prova quanto verrà esposto al § 11.

([28]) Cfr. anche [7], 10.

## 10. Interpretazione cosmologica dei risultati ottenuti.

I risultati ottenuti nei §§ precedenti comportano la seguente interpretazione cosmologica dal punto di vista newtoniano:

IX. *Dalle ipotesi* $\alpha$), $\beta$) *e* $\gamma$) *segue*:

*a*) *la legge di Hubble, espressa dall'equazione* (2), *la quale è verificata rispetto a ogni riferimento naturale*;

*b*) *la legge del moto per le generiche galassie, espressa dall'equazione* (6), *e la legge di evoluzione dell'Universo, espressa dall'equazione* (7);

*c*) *che le forze a distanza che determinano il moto di una qualsiasi galassia rispetto a un qualsiasi riferimento naturale sono quelle espresse dalla legge di gravitazione universale*;

*d*) *che, ritenendo che le forze a distanza siano unicamente quelle espresse dalla legge di gravitazione universale, rispetto a un qualsiasi riferimento naturale* $\mathcal{T}_O$ *la forza risultante che agisce su una qualsiasi galassia* $P$ *è uguale al risultante delle forze gravitazionali esercitate su* $P$ *da quella parte dell'Universo contenuta nella sfera* $\mathcal{S}_{OP}$ *di centro* $O$ *e raggio* $|OP|$;

*e*) *che tutti i riferimenti naturali sono tra loro equivalenti, nel senso che l'Universo ha, sia dal punto di vista cinematico che da quello dinamico, il medesimo comportamento rispetto ad essi.*

Quest'ultimo risultato esprime in sostanza il cosiddetto *principio cosmologico*:

X. *Pur variando da istante a istante l'Universo presenta istante per istante il medesimo aspetto da qualunque punto lo si osservi.*

## 11. Cosmologia newtoniana e teoria einsteiniana della gravitazione.

Tenendo conto a questo punto della proprietà della velocità della luce messa in evidenza dall'esperienza di Michelson e Morley, proprietà che comporta come conseguenza che la velocità della luce [29], ritenuta costante nel tempo, sia la medesima in ogni riferimento naturale, segue

([29]) Velocità locale, nel senso precisato in [12], 3.

che la metrica della varietà spazio-tempo risulta necessariamente espressa dalla metrica di Einstein-de Sitter [30], ossia proprio dalla metrica che Einstein e de Sitter, in considerazione della sua semplicità, suggerirono nel 1932 per lo spazio-tempo, operando però nell'ambito della teoria della relatività generale [31].

Imponendo poi la condizione che vi sia compatibilità tra le equazioni della cosmologia newtoniana e tale metrica, nel senso che si possa dare a dette equazioni, nell'ambito della suddetta metrica, forma intrinseca, segue che la costante dell'energia $\alpha$ che compare in (20) deve essere nulla [32].

Pertanto, mentre nell'ambito newtoniano nessuna restrizione resta imposta alla costante dell'energia $\alpha$, la proprietà della luce di avere la medesima velocità in ogni riferimento naturale implica che detta costante sia nulla.

Stante (17), l'eguaglianza (2) implica

$$h = \frac{\dot{R}}{R}$$

e pertanto, con $\alpha = 0$, da (20) segue

$$h = \sqrt{\frac{8}{3} \pi k \mu}\,, \tag{21}$$

espressione che d'altra parte si poteva direttamente ottenere da (8) in quanto l'annullarsi di $\alpha$ implica l'annullarsi della costante $a$ e viceversa.

Pertanto, la metrica di Einstein-de Sitter potendo sussistere se e solo se lo spazio fisico è euclideo e avendo come conseguenza $\alpha = 0$, si ha che l'eguaglianza (21) esprime il rapporto che deve sussistere tra $h$ e $\mu$ affinché lo spazio fisico risulti effettivamente euclideo. In altri termini, se tale eguaglianza non risulta verificata (ossia non risulta confermata dalle indicazioni osservazionali) resta esclusa la possibilità che lo spazio fisico risulti euclideo.

Ricordando l'espressione richiamata al § 3 per il parametro di decelerazione e tenendo presenti (7) e (21), segue che per $\alpha = 0$ detto para-

(30) Cfr. [12], 4, 5, 6, 7.
(31) Cfr. [2].
(32) Cfr. [13], 7.

metro viene ad assumere il valore costante $q = \frac{1}{2}$. In altri termini lo spazio fisico è euclideo se e solo se risulta $q = \frac{1}{2}$ (33).

Una volta provato che deve essere $\alpha = 0$, si ottiene che la forma intrinseca che viene imposta dalla metrica di Einstein-de Sitter alle equazioni della cosmologia newtoniana è proprio quella espressa dalle equazioni gravitazionali di Einstein (34).

Si può quindi affermare che:

XI. *Le ipotesi che lo spazio fisico risulti euclideo, che l'Universo sia omogeneo e abbia comportamento isotropo rispetto alla nostra galassia, unitamente alla proprietà della luce di avere la stessa velocità rispetto a ogni riferimento naturale, implicano che debbano sussistere le equazioni della teoria einsteiniana della gravitazione.*

(33) Ritenendo che l'osservazione astronomica fornisca per $q$ il valore $\frac{1}{2}$, ossia che indichi che lo spazio fisico risulti euclideo, segue, per quanto sopra visto, che deve sussistere l'eguaglianza (21), ossia che deve risultare

$$k = \frac{3}{8\pi}\frac{h^2}{\mu},$$

come d'altronde subito segue da quanto dedotto al riguardo al § 3, ponendo $q = \frac{1}{2}$.

Assumendo come valore attuale per $h$ $50\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ (valore attualmente ritenuto come il più probabile dalla maggior parte degli astronomi) e come valore attuale per $\mu$ $5\cdot 10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ (valore che non contrasta con stime recenti effettuate da vari astronomi) si trova per $k$ il valore $6{,}27\cdot 10^{-8}$ unità c.g.s., in ottimo accordo con le misure terrestri della costante di gravitazione universale effettuate sperimentalmente.

Si può cioè affermare che, ritenendo che l'osservazione astronomica fornisca effettivamente per $q$ il valore $\frac{1}{2}$ e per $h$ e $\mu$ i valori suddetti, per la costante $k$ sussiste il medesimo valore sia su scala terrestre che su scala extragalattica. In altri termini, se sussistono i suddetti valori non è necessaria l'assunzione che il valore della costante $k$ sia il medesimo sia su scala terrestre che su scala extragalattica. L'applicazione pura e semplice di (21) per stabilire se lo spazio fisico risulta euclideo (senza far quindi ricorso alla determinazione di $q$) richiede invece la conoscenza di $k$, ossia in definitiva l'assunzione che il valore di detta costante coincida con quello determinato sperimentalmente su scala terrestre.

Con tale assunzione, si può concludere quindi che se le stime sopra richiamate per i valori attuali di $h$ e $\mu$ non verranno contraddette da ulteriori più precise misure, la conclusione non potrà che essere quella che lo spazio fisico è effettivamente euclideo.

(34) Cfr. [13].

Quanto ora brevemente esposto costituisce quindi una deduzione delle equazioni gravitazionali di Einstein a partire dalle indicazioni osservazionali. Questa deduzione comporta, tra l'altro, che per la costante $\chi$ di Einstein risulti necessariamente ([35]), indicando con $c$ la velocità della luce:

$$\chi = \frac{8\pi k}{c^4},$$

espressione che in ogni trattazione viene invece sempre ottenuta ricorrendo a metodi di approssimazione.

Riassumendo, si ha quindi che, ritenuto lo spazio fisico euclideo, le ipotesi che l'Universo sia omogeneo e abbia comportamento isotropo rispetto alla nostra galassia comportano l'esistenza di una classe di riferimenti, i riferimenti naturali, rispetto ai quali l'Universo presenta il medesimo comportamento, sia cinematico che dinamico, descritto, nel contesto newtoniano, dalle equazioni (18), (19), nonché da (20), in cui la costante dell'energia $\alpha$ risulta, nell'ambito newtoniano, indeterminata. Tutti i suddetti risultati si ottengono senza dovere affatto far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione, la quale anzi viene a presentarsi come una necessaria conseguenza delle suddette ipotesi.

Aggiunta la condizione che la luce abbia il medesimo comportamento rispetto a tutti i riferimenti naturali, condizione che è una conseguenza della proprietà della velocità della luce messa in evidenza dall'esperienza di Michelson e Morley, si ottiene come necessaria conseguenza che la metrica della varietà spazio-tempo risulta espressa dalla metrica di Einstein-de Sitter.

Interpretando le equazioni ottenute nell'ambito newtoniano alla luce della suddetta metrica e imponendo ad esse la condizione di avere carattere intrinseco, si ottiene che la costante dell'energia $\alpha$ non può che essere nulla e che le suddette equazioni danno necessariamente luogo alle equazioni gravitazionali di Einstein, che si vengono così a presentare come una necessaria conseguenza delle assunzioni fatte, le quali, con l'aggiunta dell'ipotesi che lo spazio fisico risulti euclideo, sostanzialmente seguono dalle indicazioni osservazionali.

([35]) Cfr. [13].

Attraverso la via qui delineata, si perviene così, nel presente caso, alle equazioni gravitazionali che sono a fondamento della teoria einsteiniana della gravitazione.

## 12. Caso in cui lo spazio fisico non sia euclideo.

Le considerazioni svolte nel presente lavoro, opportunamente adattate, si possono estendere al caso in cui lo spazio fisico, invece che euclideo, sia uno spazio tridimensionale massimamente simmetrico. I risultati I, II, III, IV, XI continuano a sussistere, assieme alle equazioni (18), (19) e (20). La costante dell'energia $\alpha$ non risulta più nulla e determina la curvatura dello spazio fisico, mentre la metrica dello spazio-tempo risulta quella di Robertson-Walker. Anzi, le suddette considerazioni si possono certamente estendere al caso più generale dei modelli d'universo anisotropi e omogenei.

Tutti questi risultati verranno esposti diffusamente in successivi lavori.

* * *

L'Autore esprime i più vivi ringraziamenti al Prof. B. Barberis per la sua collaborazione nella preparazione del presente lavoro.

## BIBLIOGRAFIA

[1] B. Barberis - D. Galletto, *Foundations of Newtonian cosmology*, in: « Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics. II », a cura di H. Zorski, Pitman, London, 1979, pp. 19-38.

[2] A. Einstein - W. de Sitter, *On the relation between the expansion and the mean density of the Universe*, Proc. Nat. Acad. Sci., **18** (1932), pp. 213-214.

[3] D. Galletto, *Cosmologia newtoniana e costante di gravitazione universale*, Atti Accad. Sci. Torino, **111** (1977), pp. 203-210.

[4] D. Galletto, *Sui fondamenti della cosmologia newtoniana. I*, Atti Accad. Sci. Torino, **111** (1977), pp. 545-554.

[5] D. Galletto, *Un teorema di unicità nella teoria del campo newtoniano e sue implicazioni cosmologiche*, Rend. Mat., (6), **10** (1977), pp. 507-522.

[6] D. GALLETTO, *Sui fondamenti della meccanica newtoniana e della teoria newtoniana della gravitazione*, Atti Accad. Sci. Torino, **112** (1978), pp. 245-258.
[7] D. GALLETTO, *Sui fondamenti della meccanica classica, della teoria newtoniana della gravitazione e della cosmologia newtoniana*, in: « Atti del 3° Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Torino, 18-21 settembre 1978 », Accademia delle Scienze, Torino, 1981, pp. 111-157.
[8] D. GALLETTO, *Una proprietà del campo newtoniano*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4), **5** (1979), pp. 739-744.
[9] D. GALLETTO, *Metrica di Einstein - de Sitter e relatività generale*, in: « Atti del 4° Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Pavia, 23-26 settembre 1980 », pp. 81-88.
[10] D. GALLETTO - B. BARBERIS, *Considerazioni sul paradosso newtoniano*, in: « Atti del Convegno celebrativo dell'80° anniversario della nascita di Renato Calapso, Taormina, 1-4 aprile 1981 » (in corso di stampa).
[11] D. GALLETTO, *Données d'observation et métrique d'Einstein - de Sitter*, in: « Journées relativistes, Grenoble, 15-17 maggio 1981 ».
[12] D. GALLETTO, *Sulla metrica dello spazio-tempo. II*, Atti Accad. Sci. Torino, **115** (1981) (in corso di stampa).
[13] D. GALLETTO, *Cosmologia newtoniana, metrica di Einstein - de Sitter e teoria einsteiniana della gravitazione*, Atti Accad. Sci. Torino, **116** (1982) (in corso di stampa).
[14] D. GALLETTO, *Un teorema di inversione nella teoria del campo di attrazione newtoniano*, Atti Accad. Sci. Torino, **116** (1982) (in corso di stampa).
[15] E. P. HUBBLE, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. of Sciences, **15** (1929), p. 168.
[16] LAPLACE, *Traité de mécanique céleste*, Paris, 1825.
[17] D. LAYZER, *On the significance of Newtonian cosmology*, Astron J., **59** (1954), pp. 268-270.
[18] W. D. MAC MILLAN, *The Theory of the Potential*, Dover, New York, 1958 (ristampa dell'edizione del 1930).
[19] J. C. MAXWELL, *Matter and Motion*, Society for promoting Christian Knowledge, London, 1876.
[20] W. H. MCCREA - E. A. MILNE, *Newtonian universes and the curvature of space*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), **5** (1934), pp. 73-80.
[21] W. H. MCCREA, *On Newtonian frames of reference*, Math. Gaz., **39** (1955), pp. 287-291.
[22] E. A. MILNE, *A Newtonian expanding universe*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), **5** (1934), pp. 64-72.
[23] E. A. MILNE, *On « Absolute Acceleration »*, Nature, **150** (1942), p. 489.
[24] C. NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen*, Teubner, Leipzig, 1896.

[25] J. D. North, *The Measure of the Universe*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
[26] H. Seeliger, *Über das Newton'sche Gravitationsgesetz*, Astron. Nachr., **137** (1895), pp. 129-136.
[27] H. Seeliger, *Über das Newton'sche Gravitationsgesetz*, Münch. Ber. Math. Phys. Kl. (1896), pp. 373-400.
[28] J. L. Synge, *On the concept of gravitational force and Gauss's theorem in general relativity*, Proc. Edinburgh Math. Soc., (2), **5** (1937), pp. 93-102.
[29] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.
[30] E. Whittaker, *From Euclid to Eddington: A Study of Conceptions of the External World*, University Press, Cambridge, 1949.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 ottobre 1982.