RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. ZANGHIRATI

Iterati di operatori e regolarità Gevrey microlocale anisotropa

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 85-104

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__85_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 67 (1982)

Iterati di operatori e regolarità Gevrey microlocale anisotropa.

L. ZANGHIRATI (*)

SUMMARY - *A microlocal version of the theorem of the iterates for quasi-elliptic operators proved in* [8] *is given.*

Introduzione.

La versione microlocale del teorema classico di Kotake-Narasimhan per gli operatori ellittici, data da Bolley-Camus-Mattera in [2], come pure la sua estensione ad una classe di operatori ipoellittici [1], è parsa non scevra di interesse per le varie implicazioni in essa contenute.

In questa nota viene provato per le classi di Gevréy anisotrope $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$, $\sigma \geqslant 1$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, un risultato analogo al primo di quelli sopracitati: in effetti viene data una versione microlocale del « teorema degli iterati di un operatore q-quasi-ellittico » [8] (¹). A tale scopo si definisce qui il fronte d'onda anisotropo $WF_{\sigma q}(u)$ di una distributione u rispetto la classe $\mathcal{G}^{\sigma q}$ modificando in modo opportuno la definizione di « fronte d'onda rispetto una classe C^L » data da Hörmander in [3]. Si caratterizzano poi i vettori Gevréy d'ordine σq

(*) Indirizzo dell'A. Istituto Matematico, Via Machiavelli 35, 44100 Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni.

(¹) Estensioni e complementi al teorema degli iterati qusi-ellittici sono contenuti in [9] e [10].

per un operatore P, cioè le distribuzioni u su Ω tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $C_k > 0$ per cui:

$$\|P^N u\|_{L^2(K)} \leqslant C_k^{N+1}(N^\sigma)^{m_q N} \qquad N = 1, 2, \dots,$$

dove m_q indica il q-ordine dell'operatore P. Infine si introduce la nozione di fronte d'onda $WF_{\sigma q}(u; P)$ di una distribuzione u rispetto la classe di Gevrèy $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ e gli iterati di P. Si perviene così al risultato principale di questa nota:

TEOREMA. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $P(x, D)$ un operatore differenziale di q-ordine m_q a coefficienti in $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. Allora:*

$$\text{(a)} \qquad WF_{\sigma q}(u) \subset WF_{\sigma q}(u; P) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon P_0(x, \xi) = 0\},$$

dove $P_0(x, \xi)$ è la parte di $P(x, \xi)$ q-omogenea di grado m_q.

Da questo teorema si deduce che se u è un vettore Gevréy di ordine σq per l'operatore P allora:

$$WF_{\sigma q}(u) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon P_0(x, \xi) = 0\},$$

e che se $P(x, D)$ è q-quasi-ellittico in Ω, allora:

$$WF_{\sigma q}(u) = WF_{\sigma q}(u; P).$$

Da qui, per proiezione su Ω, si ottiene il teorema degli iterati quasi-ellittici [8].

Dal precedente teorema segue subito anche:

$$WF_{\sigma q}(u) \subset WF_{\sigma q}(Pu) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon P_0(x, \xi) = 0\}$$

che si può riguardare come la versione microlocale di un noto teorema di regolarità Gevréy per le soluzioni di un'equazione quasi-ellittica [7].

Facciamo infine osservare come il teorema ottenuto possa dare informazioni, circa la regolarità Gevréy di una distribuzione, più complete di quelle fornite da teoremi che fanno uso di fronte d'onda isotropi. In effetti, indicati con $WF_\sigma(u)(WF_\sigma(u; P))$ il fronte d'onda di u rispetto alla classe di Gevréy isotropa $\mathcal{G}^\sigma$ (rispetto a $\mathcal{G}^\sigma$ ed agli iterati di P), dal Teorema 3.2 di [1], segue:

$$\text{(b)} \qquad WF_\sigma(u) \subset WF_\sigma(u; P) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: P_m(x, \xi) = 0\} ,$$

dove $P_m(x, \xi)$ è la parte principale di $P(x, \xi)$.

Ad esempio, se $P(D)$ è l'operatore del calore:

$$P(D) = \sum_{k=1}^{n} D_k^2 + iD_t , \qquad D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k} , \qquad D_t = -i \frac{\partial}{\partial t} ,$$

da (a) segue:

$$WF_{\sigma(1,\dots,1,2)}(u) \subset WF_{\sigma(1,\dots,1,2)}(u; P) ,$$

mentre da (b):

$$WF_\sigma(u) \subset WF_\sigma(u; P) \cup \{(x, t; 0, \tau): (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} .$$

Un altro esempio è fornito dall'operatore:

$$Q(x, D) = e^{-i\theta} P^r(x, D_x)^r + iD_t^{mp} , \qquad D = (D_x, D_t)$$

dove $P(x, D_x)$ è un operatore q-quasi-ellittico in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, di q-grado m, $p \geqslant r > 0$ sono interi e θ è una direzione evitata dal simbolo q-principale di P^r.

Posto $v = ((p/r) q_1, \dots, (p/r) q_n, 1)$, da (a) si ha per ogni $\sigma \geqslant 1$;

$$WF_{\sigma v}(u) \subset WF_{\sigma v}(u; Q) ,$$

mentre da (b):

$$WF_\sigma(u) \subset WF_\sigma(u; Q) \cup \{(x, t; \xi, 0); (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} .$$

Pertanto, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è soluzione di $Q(x, D) u = 0$, dalla prima di queste inclusioni si deduce che $u \in \mathcal{G}^{\sigma v}(\Omega)$, mentre dalla seconda non si ottiene alcuna informazione circa la regolarità Gevréy locale di u.

Segnaliamo che risultati relativi ad un fronte d'onda C^∞ anisotropo sono stati ottenuti da Lascar [4] e da Parenti-Rodino [5] e che Rodino ha recentemente [6] introdotto la nozione di « ψ-filtro » che, ove si scelga opportunamente ψ, può fornire una nozione di fronte d'onda Gevréy come quella definita in questa nota.

1. Fronte d'onda rispetto le classi di Gevrey anisotrope.

1.1. Definizioni. Chiameremo peso in $\mathbb{R}^n$ una n-pla $q = (q_1, \ldots, q_n)$ di numeri reali $\geqslant 1$ con $q_j = 1$ per almeno un $j \in \{1, \ldots, n\}$. Se le componenti di q sono razionali si può scrivere q nella forma $(m/m_1, \ldots, m/m_n)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $m = \max\limits_j m_j$.

In questa nota useremo un peso q di questo tipo; q, e quindi $m_1, \ldots, m_n$ dovranno ritenersi fissati.

Per ogni $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo:

$$\lambda^q x = (\lambda^{q_1} x_1, \ldots, \lambda^{q_n} x_n) .$$

Una funzione f definita in $\mathbb{R}^n$ dicesi positivamente q-omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se per ogni $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\lambda^q x) = \lambda^\alpha f(x) .$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo:

$$|x|_q = \Big(\sum_{j=1}^n x_j^{2/q_j}\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

La funzione $x \to |x|_q$ così definita è subadditiva, positivamente q-omogenea di grado 1 e verifica:

$$C^{-1}(1 + |x|)^{1/\max q_j} \leqslant 1 + |x|_q \leqslant C(1 + |x|) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

dove $|x|$ denota l'usuale norma euclidea e C è una costante dipendente solo da n.

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ dicesi q-conico se

$$x \in E , \qquad \lambda > 0 \Rightarrow \lambda^q x \in E .$$

Chiameremo q-grado del monomio $a_\alpha \xi^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il numero $\langle \alpha, q \rangle$ e q-grado del polinomio $P(x) = \sum a_\alpha \xi^\alpha$ il massimo dei q-gradi dei suoi monomi.

Chiameremo infine classe di Gevréy di ordine σq in Ω, $\sigma \geqslant 1$, l'insieme $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ delle $u \in C^\infty(\Omega)$ tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante C_k per cui:

$$\sup_K |D^\alpha u| \leqslant C_k (C_k \langle \alpha, q \rangle^\sigma)^{\langle \alpha, q \rangle} .$$

Con le lettere C, C_1, C_2, ... indicheremo costanti anche diverse dipendenti unicamente dai dati n, q, P, u, Ω, K, ...

1.2. LEMMA. *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\sigma \geqslant 1$, $0 < r \leqslant 1$. Allora per ogni intero positivo N esiste una funzione $\chi_N \in \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, uguale ad 1 in K, uguale a 0 nell'insieme $\{x\colon \inf_{y \in k} |x - y|_q > r\}$ e tale che:*

$$(1.2) \qquad |D^{\alpha+\beta} \chi_N| \leqslant C_\alpha r^{-\sigma\langle \alpha, q\rangle} (CNr^{-1})^{\sigma\langle \beta, q \rangle} \qquad se\ |\beta| \leqslant N\,, \ \alpha \in \mathbb{N}^n .$$

Inoltre la costante C_α dipende solo da α ed n, mentre C dipende solo da n.

DIM. Sia $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \Phi \subset \{x\colon |x|_q < \frac{1}{4}\}$, $\Phi \geqslant 0$, $\int \Phi = 1$. Sia inoltre u la funzione caratteristica dell'insieme:

$$\{x\colon\ |x - y|_q < r/2,\ y \in K\} .$$

Posto per ogni $a > 0$: $\Phi_a(x) = a^{-\sigma \sum_{j=1}^n q_j} \Phi(a^{-\sigma q} x)$, si verifica agevolmente che la funzione:

$$\chi_N = u * \Phi_r * \underbrace{\Phi_{r/N} * \dots * \Phi_{r/N}}_{N \text{ fattori}}$$

gode delle proprietà richieste, la (1.2) essendo soddisfatta con:

$$C_\alpha = n \int |D^\alpha \Phi| \,; \qquad C = \max_{|\alpha| = 1} C_\alpha .$$

1.3. LEMMA. *Sia $u \in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ e $\chi_N \in C_0^\infty(K)$, $K \subset \Omega$, K compatto, Ω aperto. Se:*

$$(1.3) \qquad |D^\alpha \chi_N| \leqslant C(CN^\sigma)^{\langle \alpha, q \rangle} \qquad \langle \alpha, q \rangle \leqslant mN\,,\ N = 1, 2, \dots\ (^2)$$

(2) L'esistenza di una successione χ_N soddisfacente (1.3) è assicurata dal Lemma 1.2.

allora esiste una costante C' tale che

$$(1.4)\qquad |(\chi_N u)^\wedge(\xi)|\leqslant C'(C'N^\sigma)^{mN}(N^\sigma+|\xi|_q)^{-mN}\qquad N=1,2,\ldots.$$

Dim. Dalla formula di Leibniz, tenuto conto che $u\in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ e che vale (1.3), segue:

$$|D^\alpha(\chi_N u)|\leqslant C_1(C_1N)^{\sigma\langle\alpha,q\rangle}\qquad \langle\alpha,q\rangle\leqslant mN\,.$$

Quindi:

$$|\xi^\alpha(\chi_N u)^\wedge(\xi)|\leqslant C_2(C_2N)^{\sigma\langle\alpha,q\rangle}\qquad \langle\alpha,q\rangle\leqslant mN\,.$$

Sommando le maggiorazioni che si ottengono da questa con $\alpha=0$ ad $\alpha=m_jNe^j$ (3), $j=1,\ldots,n$, e tenendo conto della (1.1) si perviene agevolmente alla tesi.

1.4. Lemma. *Sia $x_0\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ed $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$. $u\in\mathcal{G}^{\sigma q}$ in un intorno di x^0 se e solo se esiste un intorno U di x^0 ed una successione $\{u_N\}$ limitata in $\mathcal{E}'(\Omega)$ tale che:*

$$(1.5)\qquad u_N=u\quad in\ U\,,\qquad N=1,2,\ldots,$$

$$(1.6)\qquad |\hat u_N(\xi)|\leqslant C(CN^\sigma/|\xi|_q)^{mN}\qquad N=1,2,\ldots.$$

Dim. Supponiamo $u\in\mathcal{G}^{\sigma q}$ in $\{x\colon |x-x_0|<3r\}$, $0<r\leqslant 1$, e sia $(\chi_N\}$ una successione fornita delle proprietà indicate nel Lemma 1.2 con $K=\{x\colon |x-x^0|\leqslant r\}$. Utilizzando i Lemmi 1.2 e 1.3 si verifica subito che la successione $u_N=u\chi_{mN}$ soddisfa (1.5), (1.6) ed è limitata in $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Viceversa, sia $\{u_N\}$ una successione siffatta. Allora, essendo $\{u_N\}$ limitata in $\mathcal{E}'(\Omega)$ esisteranno due costanti C ed M tali che:

$$(1.7)\qquad |\hat u_N(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|_q)^M\,.$$

Per la (1.6), fissato α, basterà prendere N sufficientemente grande perchè l'integrale $\int|\xi^\alpha\hat u_N(\xi)|\,d\xi$ converga.

(3) Qui, come nel seguito, e^j, $j=1,\ldots,n$ sta ad indicare il j-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Scelto N in tal modo, per la (1.5) si avrà:

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n}\int \exp[i\langle x, \xi\rangle]\xi^\alpha \hat{u}_N(\xi)\, d\xi \qquad x \in U . \tag{1.8}$$

Maggioriamo il secondo membro di (1.8) utilizzando (1.6) quando $|\xi|_q \geqslant N^\sigma$ e (1.7) altrimenti. Tenuto conto che $|\xi^\alpha| \leqslant |\xi|_q^{\langle\alpha,q\rangle}$ si ha così per ogni $x \in U$:

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant C' N^{\sigma\langle\alpha,q\rangle}(1 + N^\sigma)^M \int_{|\xi|_q < N^\sigma} d\xi + C(CN^\sigma)^{mN}\int_{|\xi|_q > N^\sigma} |\xi|_q^{\langle\alpha,q\rangle - mN}\, d\xi .$$

Quindi:

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant C''\big(C''(\langle\alpha, q\rangle + \nu)\big)^{\sigma(\langle\alpha,q\rangle + \nu)}$$

dove ν è un intero che dipende solo da n, q ed M.

Per completare la dimostrazione basta ora osservare che:

$$(\langle\alpha, q\rangle + \nu)^{\langle\alpha,q\rangle + \nu} \leqslant 2^{\nu^2}(2^{2\nu}\langle a, q\rangle)^{\langle\alpha,q\rangle} .$$

1.5. Definizione. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ Diremo che (x^0, ξ^0) appartiene al complementare del fronte d'onda $WF_{\sigma q}(u)$ di u rispetto alla classe $G^{\sigma q}$, $q = (m/m_1, \dots, m/m_n)$, se esiste un intorno aperto U di x^0, un intorno aperto q-conico Γ di ξ^0 ed una successione $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tale che:*

i) $u_N = u$ *in* U,

ii) u_N *è limitata in* $\mathcal{E}'(\Omega)$,

iii) $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C(CN^\sigma/|\xi|_q)^{mN}, \qquad \xi \in \Gamma,\ N = 1, 2, \dots,$

dove C è una opportuna costante positiva.

1.6. Lemma. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma q}(u)$, U e Γ come nella Definizione* 1.5, *K un intorno compatto di x^0 contenuto in U ed F un intorno q-conico di ξ_0 contenuto in Γ, chiuso in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sia poi $\chi_N \in C_0^\infty(U)$ una successione di funzioni identicamente uguali ad uno su K, soddisfacenti la* (1.3).

Allora esiste un intero N_0 tale che la successione $\chi_{N+N_0} u$ verifica i), ii), iii) *con K in luogo di U ed F in luogo di Γ.*

DIM. Sia u_N una successione verificante le condizioni indicate nella definizione 1.5. Essendo u_N limitata in $\mathcal{E}'(\Omega)$ esistono due costanti C ed M tali che:

$$(1.8) \qquad |(u_N)\hat{\ }(\eta)| \leqslant C(1+|\eta|_q)^M \qquad N=1,2,\ldots .$$

Posto:

$$N_0 = \left[n+1+M+\sum_{j=1}^n q_j\right]+1\,,$$

da (1.3) segue:

$$(1.9) \quad |\hat{\chi}_{N+N_0}(\eta)| \leqslant C_1^{N+1} N^\sigma/(N^\sigma+|\eta|_q)^{mN}(1+|\eta|_q)^{-(n+1+\sum_{j=1}^n q_j+M)}\,.$$

Notiamo poi the se F e Γ sono come specificato nell'enunciato, esiste una costante C_2 tale che:

$$(1.10) \qquad \xi\in F\,, \qquad \eta\notin\Gamma \Rightarrow |\xi-\eta|_q \geqslant C_2(|\xi|_q+|\eta|_q)\,.$$

Ciò è pressochè immediato se $q_j=1$, $1\leqslant j\leqslant n$ e si prova per q arbitrario osservando che la trasformazione di $\mathbb{R}^n$ in sè:

$$T\colon\ \xi\to(\operatorname{sgn}\xi_1|\xi_1|^{1/q_1},\ldots,\operatorname{sgn}\xi_n|\xi_n|^{1/q_n})\,,$$

muta ogni intorno q-conico di ξ^0 in un intorno conico dello stesso punto e verifica:

$$|T(\xi)| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2/q_j}\right)^{\frac12}$$

Poichè $\chi_{N+N_0}u=\chi_{N+N_0}u_N$ si ha:

$$(\chi_{N+N_0}u)\hat{\ }(\xi)=(2\pi)^{-n}\Big(\int_{\eta\in\Gamma}\hat{\chi}_{N+N_0}(\xi-\eta)\,\hat{u}_N(\eta)\,d\eta+\int_{\eta\in\Gamma}\hat{\chi}_{N+N_0}(\xi-\eta)\,\hat{u}_N(\eta)\,d\eta\Big)=$$
$$=I_1(\xi)+I_2(\xi)\,.$$

Da (1.8), (1.9), (1.10) segue, se $\xi\in F$:

$$|I_1(\xi)|\leqslant$$
$$\leqslant C_1^{N+1}C\int_{|\xi-\eta|_q\geqslant C_2(|\zeta|_q+|\eta|_q)}\left(\frac{N^\sigma}{N^\sigma+|\xi-\eta|_q}\right)^{mM}\frac{(1+|\eta|_q)^M}{(1+|\xi-\eta|_q)^{(n+1+\sum_{j=1}^n q_j+M)}}\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant C_3\big(C_3N^\sigma/(N^\sigma+|\xi|_q)\big)^{mM}\,.$$

Quanto ad I_2 si ha:

$$I_2(\xi) = \int\limits_{\substack{\eta\in\Gamma \\ |\xi-\eta|_q>\frac{1}{3}(|\xi|_q+|\eta|_q)}} \hat{\chi}_{N+N_0}(\xi-\eta)\,\hat{u}_N(\eta)\,d\eta \;+$$
$$+ \int\limits_{\substack{\eta\in\Gamma \\ |\xi-\eta|_q<\frac{1}{3}(|\zeta|_q+|\eta|_q)}} \hat{\chi}_{N+N_0}(\eta)\,\hat{u}_N(\xi-\eta)\,d\eta = I_{2,1}(\xi) + I_{2,2}(\xi)$$

$I_{2,1}$ si valuta per $\xi\in F$ come sopra I_1, mentre per $I_{2,2}$, osservato che:

$$|\xi-\eta|_q<\tfrac{1}{3}(|\xi|_q+|\eta|_q) \Rightarrow \tfrac{1}{2}|\xi|_q\leqslant|\eta|_q<2|\xi|_q$$

si ha, utilizzando ancora (1.8) e (1.10):

$$|I_{2,2}(\xi)|\leqslant CC_1^{N+1}N^{\sigma mN}\int\limits_{(1/2n)|\xi|_q\leqslant|\eta|_q\leqslant 2n|\xi|_q}\frac{(1+(1/3n)|\xi|_q+(1/3n)|\eta|_q)^M}{|\eta|_q^{Nm}(1+|\eta|_q)^{(n+1+\sum_{j=1}^n q_j+M)}}\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant C_4\big(C_4N^\sigma/|\xi|_q\big)^{mN}\,.$$

1.7. Teorema. *La proiezione di $WF_{\sigma q}(u)$ su Ω è il complementare del più grande aperto in cui $u\in\mathcal{G}^{\sigma q}$.*

La dimostrazione, che si fonda sul Lemma 1.6, è analoga a quella del Teorema 3.2 in [3].

Si prova inoltre agevolmente il seguente:

1.8. Teorema. *Se $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ e $P(x,D)$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti in $G^{\sigma q}(\Omega)$, allora:*

$$WF_{\sigma q}(Pu)\subset WF_{\sigma q}(u)\,.$$

2. Fronte d'onda rispetto gli iterati di un operatore e rispetto le classi di Gevréy anisotrope.

2.1. Definizione. *Sia $q=(m_1/m,\dots,m_n/m)$, $\sigma\geqslant1$ e $P(x,D)$ un operatore differenziale lineare a coefficienti in $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$, di q-ordine m_q in Ω, Ω essendo un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia inoltre $s\in\mathbb{R}$. Indichiamo con $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega;P)$ lo spazio delle distribuzioni u in Ω tali che, per* *ogni compatto* $K \subset \Omega$ *esiste una costante* C_k *verificante*:

$$\|P^N u\|_{H^s(K)} \leqslant C_k(C_k N^\sigma)^{m_q N} \qquad N = 0, 1, \dots$$

dove H^s *denota l'usuale spazio di Sabolev di ordine* s *e* P^N *l'*N*-simo iterato di* P.

Poniamo inoltre:

$$\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega; P) = \bigcup_s \mathcal{G}_s^{\sigma q}(\Omega; P) .$$

2.2. Lemma. *Sia* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Per ogni* $x^0 \in \Omega$ *esiste un intorno* V *di* x^0 *tale che* $u \in \mathcal{G}^{\sigma q}(V; P)$, *se e solo se esiste un intorno* U *di* x^0, $U \subset\subset V$, *ed una successione* $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(V)$ *tale che*:

$$f_N = P^N u \quad \text{in } U , \qquad N = 0, 1, \dots , \tag{2.1}$$

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C(CN^\sigma)^{m_q N}(1 + |\xi|)^M \qquad N = 0, 1, \dots , \tag{2.2}$$

dove $C > 0$ *ed* $M \in \mathbb{R}$ *sono costanti opportune.*

Dim. La dimostrazione che le condizioni indicate siano sufficienti è pressochè immediata. D'altro canto, supposto $u \in \mathcal{G}_s^{\sigma q}(V; P)$ ed U come nell'enunciato, basta considerare una funzione $\chi \in C_0^\infty(V)$ identicamente uguale ad 1 in U e porre $f_N = \chi P^N u$, $N = 0, 1, \dots$ perchè riescano soddisfatte (2.1) e (2.2) con $M = -s$.

2.3. Lemma. *Sia* K *un compatto contenuto in* Ω, $\{\chi_N\}$ *una successione di funzioni* $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *soddisfacenti la condizione* (1.3) *ed* $\mathcal{F}$ *un sottoinsieme di* $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ *tale che per ogni* $a \in \mathcal{F}$ *sia*:

$$\sup_K |D^\alpha a| \leqslant C(C\langle \alpha, q\rangle^\sigma)^{\langle \alpha, q\rangle} \tag{2.3}$$

dove C *è la stessa costante che figura in* (1.3).

Allora esiste una costante C_1 *tale che se* $\alpha_1, \dots, a_{j-1} \in \mathcal{F}$, $\alpha^1, \dots, \alpha^j \in \mathbb{N}^n$ *e* $\langle \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^j, q\rangle \leqslant mN$

$$\sup_K \left|D^{\alpha^1} a_1 D^{\alpha^2}(a_2 \dots D^{\alpha^{j-1}}(a_{j-1} D^{\alpha^j} \chi_N) \dots)\right| \leqslant \tag{2.4}$$

$$\leqslant C_1^{N+1} \Gamma(\sigma < \alpha^1 + \dots + \alpha^j, q > + 1) .$$

DIM. La dimostrazione segue le linee di quella del Lemma 5.3 in [3]. Osserviamo innanzitutto che è sufficiente provare (2.4) nel caso in cui i multiindici $\alpha^1, \dots, \alpha^j$ abbiano tutti altezza 1, poichè il caso generale è riconducibile a questo introducendo la funzione costante 1 tante volte quanto è necessario.

Si deve dunque provare che:

$$(2.5)\quad \left|D_{h_1}\left(a_1 D_{h_2}(a_2 \dots D_{h_{j-1}}(a_{j-1} D_{h_j}\chi_N) \dots)\right)\right| \leqslant C'^{N+1}\Gamma\left(\sigma(q_{h_1} + \dots + q_{h_j}) + 1\right)$$

dove $h_1, \dots, h_j \in \{1, \dots, n\}$ e $D_{h_l} = -i(\partial/\partial x_{h_l})$.

Sviluppando le derivate indicate a primo membro di (2.5) si ottiene:

$$\sum_{\alpha^1+\dots+\alpha^j = e^{h_1}+\dots+e^{h_j}}' (D^{\alpha^1} a_1)(D^{\alpha^2} a_2) \dots (D^{\alpha^j}\chi_N)$$

dove $\sum'$ sta ad indicare una somma opportuna ed $e^{h_1}, \dots, e^{h_j}$ sono vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Dalla (1.3), tenendo conto che se $\langle\alpha, q\rangle \leqslant Nm$ allora

$$(Nm)^{\sigma\langle\alpha,q\rangle} \leqslant \Gamma(\sigma\langle\alpha, q\rangle + 1)\, e^{2Nm},$$

discende

$$\sup_K |D^\alpha \chi_N| \leqslant C_1^{N+1}\Gamma(\sigma < \alpha, q > + 1)$$

dove $C_1 = C^m e^{2m}$. Da questa e dalla (2.3) si ottiene dunque che il primo membro di (2.5) è maggiorato da:

$$C_2^{N+1} \sum_{\alpha^1+\dots+\alpha^j = e^{h_1}+\dots+e^{h_j}}' \Gamma(\sigma\langle\alpha^1, q\rangle + 1)\,\Gamma(\sigma\langle\alpha^2, q\rangle + 1) \dots \Gamma(\sigma\langle\alpha^j, q\rangle + 1)$$

dove C_2 è una nuova costante dipendente solo da C, C_1, q.

Non è difficile riconoscere che le j-ple di multiindici $(\alpha^1, \dots, \alpha^j)$ rispetto alle quali si somma in $\sum'$ sono tali che:

$$\sum_{\alpha^1+\dots+\alpha^j = e^{h}+\dots+e^{h_j}}' x_1^{\sigma\langle\alpha^1,q\rangle} x_2^{\sigma\langle\alpha^2,q\rangle} \dots x_j^{\sigma\langle\alpha^j,q\rangle} =$$

$$= (x_1^{\sigma q_{h_1}} + \dots + x_j^{\sigma q_{h_1}})(x_2^{\sigma q_{h_2}} + \dots + x_j^{\sigma q_{h_2}}) \dots (x_{j-1}^{\sigma q_{h_{j-1}}} + x_j^{\sigma q_{h_{j-1}}})\, x_j^{\sigma q_{h_j}}.$$

Quindi:

$$\sum'_{\alpha^1+\ldots+\alpha^j=e^{h_1}+\ldots+e^{h_j}} \Gamma(\sigma\langle\alpha^1, q\rangle+1)\,\Gamma(\sigma\langle\alpha^2, q\rangle+1)\ldots\Gamma(\sigma\langle\alpha^j, q\rangle+1)=$$

$$=\int_0^{+\infty}\!\!\ldots\int_0^{+\infty}(x_1^{\sigma q_{h_1}}+\ldots+x_j^{\sigma q_{h_j}})(x_2^{\sigma q_{h_2}}+\ldots+x_j^{\sigma q_{h_2}})\ldots(x_{j-1}^{\sigma q_{h_{j-1}}}+x_j^{\sigma q_{h_{j-1}}})\,x_j^{\sigma q_{h_j}}\cdot$$

$$\cdot\exp[-(x_1+\ldots+x_j)]\,dx_1\ldots dx_j\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\!\!\ldots\int_0^{+\infty}(x_1+\ldots+x_j)^{\sigma q_{h_1}}(x_2+\ldots+x_j)^{\sigma q_{h_2}}\ldots(x_{j-1}+x_j)^{\sigma q_{h_{j-1}}}x_j^{\sigma q_{h_j}}\cdot$$

$$\cdot\exp[-(x_1+\ldots+x_j)]\,dx_1\ldots dx_j=$$

$$=\frac{\Gamma\big(\sigma(q_{h_1}+\ldots+q_{h_j})+1\big)}{(\sigma q_{h_j}+1)(\sigma q_{h_j}+\sigma q_{h_{j-1}}+2)\ldots(\sigma q_{h_j}+\ldots+\sigma q_{h_2}+j-1)}\leqslant$$

$$\leqslant 2(2^{\sigma\max q_h})^j\,\Gamma\big((q_{h_1}+\ldots+q_{h_j})+1\big)\,.$$

Resta così provata (2.5).

2.4. Lemma. *Sia P un operatore differenziale di q-ordine m_q con coefficienti $\in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. Sia inoltre K un compatto $\subset\Omega$ e $\{\chi_N\}$ una successione di funzioni appartenenti a $C_0^\infty(K)$ soddisfacenti* (1.3).

Allora per ogni $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ esiste un $p_0>0$ tale che se $p>p_0$, $r\geqslant 0$ la successione $f_N=\chi_{pN+r}P^N u$ verifica:

$$|\hat f_N(\xi)|\leqslant C\big(C(N^\sigma+|\xi|_q)\big)^{m_qN+M}\qquad \xi\in\mathbb{R}^n,\ N=0,1,\ldots \tag{2.6}$$

dove $C>0$ ed $M\in\mathbb{R}$ sono costanti opportune.

Dim. È

$$\hat f_N(\xi)=\big(u,\ {}^tP^N(\chi_{pN+r}\exp[-i\langle x,\xi\rangle])\big) \tag{2.7}$$

dove ${}^tP$ denota l'aggiunto formale di P.

Sia:

$${}^tP(x,D)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leqslant m_q}\alpha_\alpha(x)\,D^\alpha$$

e siano $0=k_1<k_2<\ldots<k_{s-1}<k_s=m_q$ gli elementi dell'insieme $\{\langle\alpha,q\rangle:\ \alpha\in\mathbb{N}^n\}$ non superiori ad m_q. Allora si ha:

$$\begin{aligned}{}^tP(\exp[-i\langle x,\xi\rangle]\chi_{pN+r})&=\exp[-i\langle x,\xi\rangle]\,|\xi|_q^{m_q}R\chi_{pN+r}=\\&=\exp[i\langle x,\xi\rangle]\,|\xi|_q^{m_q}R\chi_{pN+r}\end{aligned} \tag{2.8}$$

dove:

$$R = R_1 + \ldots + R_s$$

ed:

$$R_j = \sum_{\langle\alpha,q\rangle \leqslant m_q}^{\alpha} \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ \langle\beta,q\rangle = k_j}}^{\beta} (-1)^\beta a_\alpha(x) \binom{\alpha}{\beta} \frac{\xi^\beta}{|\xi|_q^{m_q}} D^{\alpha-\beta} \qquad j = 1, \ldots, s$$

R_j è dunque un operatore differenziale lineare di q-ordine $\leqslant m_q - k_j$ a coefficienti $\in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ in x e q-omogenei di grado $-(m_q - k_j)$ in ξ. Da (2.8), per interazione, segue:

$$(2.9) \qquad {}^tP^N(\exp[-i\langle x, \xi\rangle]\chi_{pN+r}) = \exp[-i\langle x, \xi\rangle]\,|\xi|_q^{Nm_q} R^N \chi_{pN+r} =$$
$$= \exp[-i\langle x, \xi\rangle]\,|\xi|_q^{Nm_q} \sum_{\substack{1\leqslant j_i \leqslant s_i \\ 1 \leqslant i \leqslant N}} R_{j_1} R_{j_2} \ldots R_{j_N} \chi_{pN+r}\,.$$

I coefficienti degli operatori R_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, quando $|\xi|_q = 1$, godono delle proprietà richieste nel Lemma 2.3 agli elementi di $\mathcal{F}$. Esiste quindi una costante C_1 tale che se $|\xi|_q = 1$ ed

$$\langle\alpha, q\rangle + Nm_q - k_{j_1} - \ldots - k_{j_N} \leqslant (pN + r)m$$

si ha:

$$|D^\alpha R_{j_1} R_{j_2} \ldots R_{j_N} \chi_{pN+r}| \leqslant C_1^{N+1} N^{\sigma(\langle\alpha,q\rangle + Nm_q - k_{j_1} - \ldots - k_{j_N})}\,.$$

Per omogeneità è allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per gli α sopra indicati:

$$(2.10) \qquad |D^\alpha R_{j_1} R_{j_2} \ldots R_{j_N} \chi_{pN+r}| \leqslant C_1^{N+1}\, |\xi|_q^{k_{j_1} + \ldots + k_{j_N} - Nm_q} \cdot$$
$$\cdot N^{\sigma(\langle\alpha,q\rangle + Nm_q - k_{j_1} - \ldots - k_{j_N})}\,.$$

Sia M il q-ordine di u su K. Posto allora $p_0 = m_q/m$ se $M < 0$, $p_0 = (M + m_q)/m$ se $M \geqslant 0$, da (2.7), tenendo conto di (2.9) e (2.10), si ha se $p \geqslant p_0$, $r \geqslant 0$:

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C_2^{N+1}\, |\xi|_q^{Nm_q} \sum_{\langle\alpha,q\rangle \leqslant M}^{\alpha} (1 + |\xi|_q)^{M - \langle\alpha,q\rangle} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\substack{1 \leqslant j_i \leqslant s \\ 1 \leqslant i \leqslant N}} |\xi|_q^{k_{j_1} + \ldots + k_{j_N} - Nm_q} N^{\sigma(Nm_q + \langle\sigma,q\rangle - k_{j_1} - \ldots - k_{j_N})} \leqslant C_3^{N+1}(N^\sigma + |\xi|_q)^{Nm_q + M}\,.$$

Resta così provato (2.6).

2.5. DEFINIZIONE. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $P(x, D)$ un operatore differenziale lineare di q-ordine m_q a coefficienti in $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. Si dice che $(x^0, \xi^0) \in \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è nel complementare del fronte d'onda $WF_{\sigma_q}(u; P)$ di u rispetto alla classe $\mathcal{G}^{\sigma q}$ ed agli iterati di P, se esiste un intorno aperto U di x^0, un intorno aperto q-conico Γ di ξ^0 ed una successione $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$, tale che:*

j) $f_N = P^N u$ *in* U, $N = 0, 1, \ldots$,

jj) $|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C\big(C(N^\sigma + |\xi|_q)\big)^{m_q N + M}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $N = 0, 1, \ldots$,

jjj) $|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C(CN^\sigma)^{N m_q}(1 + |\xi|)^M$, $\xi \in \Gamma$, $N = 0, 1, \ldots$,

con $C > 0$ ed $M \in \mathbb{R}$ costanti opportune.

2.6. LEMMA. *Con le notazioni della Definizione 2.5, supponiamo $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u; P)$, $\xi^0 \neq 0$. Sia K un intorno compatto di x^0 contenuto in U ed F un intorno q-conico di ξ^0 contenuto in Γ, chiuso in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sia poi $\{\chi_N\}$ una successione di funzioni appartenenti a $C_0^\infty(K)$ e soddisfacente la condizione* (1.3).

Allora la successione $\chi_{\mu N + r} P^N u$, dove μ ed r sono interi, $\mu \geqslant m_q/m$, $r \geqslant \left(\sum_{j=1}^n q_j + 1 + M\right)/m$, soddisfa jjj) *in F.*

DIM. Si ha

$$\chi_{\mu N + r} P^N u = \chi_{\mu N + r} f_N \,.$$

Quindi:

$$(\chi_{\mu N + r} P^N u)\hat{}\,(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \hat{\chi}_{\mu N + r}(\xi - \eta) \hat{f}_N(\eta)\, d\eta \,. \tag{2.12}$$

Dalla (1.3) con opportuni valori di α si ottiene:

$$|\hat{\chi}_{\mu N + r}(\xi)| \leqslant C_1^{N+1} \left(\frac{N^\sigma}{N^\sigma + |\xi|_q}\right)^{(N\mu + r)m} \tag{2.13}$$

e

$$|\hat{\chi}_{\mu N + r}(\xi)| \leqslant C_1^{N+1} \left(\frac{N^\sigma}{1 + |\xi|_q}\right)^{mh} \tag{2.14}$$

dove h è il più piccolo intero positivo maggiore di $\left(\sum_{j=1}^n q_j + M + 1\right)/m$.

Per ogni $\xi \in F$, si può ora maggiorare il secondo membro di (2.12) utilizzando jjj) e (2.14) per $\eta \in \Gamma$, jj), (2.13) e (1.10) per $\eta \notin \Gamma$. Si ottiene così la tesi.

Utilizzando il Lemma 2.6 si può provare:

2.7. Teorema. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e P è un operatore differenziale a coefficienti $\in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. La proiezione di $WF_{\sigma_q}(u; P)$ su Ω è il complementare del più grande sottoinsieme aperto Ω' di Ω tale che per ogni $x^0 \in \Omega'$ esiste un intorno V per il quale riesce $u \in \mathcal{G}^{\sigma q}(V; P)$.*

2.8. Teorema. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e P un operatore differenziale a coefficienti in $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. Allora:*

$$WF_{\sigma_q}(u; P) \subset WF_{\sigma_q}(Pu) \subset WF_{\sigma_q}(u) .$$

Dim. Sia $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u)$. Esiste quindi un intorno aperto U di x^0, un intorno aperto q-conico Γ di ξ^0 ed una successione $\{u_N\}$ limitata in $\mathcal{E}'(\Omega)$, tale che:

$$u_N = u \text{ in } U ; \qquad |\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C(CN^\sigma/|\xi|_q)^{mM} \qquad \xi \in \Gamma , \; N = 0, 1, \dots .$$

Sia K un intorno compatto di x^0 contenuto in U ed F un intorno q-conico di ξ^0 contenuto in Γ, chiuso in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sia poi $\{\chi_N\}$ una successione di funzioni $\in C_0^\infty(U)$, identicamente uguali ad 1 in K, per la quale valga la condizione (3.1).

Indicati con ν, μ e p tre numeri naturali tali che $\nu m_q = \mu m$, $p \geqslant \mu + m_q/m$, poniamo $f_N = \chi_{pN} P^N u$. Si ha allora, con le notazioni del Lemma 2.4 (v. (2.9)):

$$\hat{f}_N(\xi) = |\xi|_q^{m_q N}(u, R\chi_{pN} \exp[-i\langle x, \xi\rangle]) = |\xi|_q^{m_q N} \widehat{\psi_N u}(\xi)$$

ove si è posto $\psi_n = R^N \chi_{pN}$. Dalla (2.10) segue poi:

$$|D^\alpha \psi_N(\xi)| \leqslant C^{N+1} N^{\sigma\langle\alpha, q\rangle} \qquad \text{se } \langle\alpha, q\rangle \leqslant m\mu N , \; |\xi|_q \geqslant N^\sigma .$$

Il Lemma 1.6 assicura allora che esiste un interno $N_0 > 0$ ed una costante ε_1 tale che:

$$|\widehat{\psi_{N+N_0} u}(\xi)| \leqslant C_1(C_1 N^\sigma/|\xi|_q)^{m\mu N} \qquad \text{se } \xi \in F, \; |\xi|_q > N^\sigma.$$

Quindi:

$$|\hat{f}_{N+N_0}(\xi)| \leqslant C_2(C_2 N^\sigma)^{Nm_q} |\xi|_q^{N_0 m_q} \qquad \text{se } \xi \in \Gamma\,, \ |\xi|_q > N^\sigma\,.$$

Per il Lemma 2.4 f_N, e quindi anche f_{N+N_0}, soddisfa in $\mathbb{R}^n$ la condizione jj) della Definizione 2.5. Da questa discende se $|\xi|_q < N^\sigma$:

$$|\hat{f}_{N+N_0}(\xi)| \leqslant C_2(C_2 N^\sigma)^{Nm_q}(1 + |\xi|_q)^M\,.$$

Così f_{N+N_0} verifica jjj) per ogni $\xi \in F$ e $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u; P)$. Resta dunque provato che:

$$WF_{\sigma_q}(u; P) \subset WF_{\sigma_q}(u)$$

e quindi:

$$WF_{\sigma_q}(u; P) = WF_{\sigma_q}(Pu, P) \subset WF_{\sigma_q}(Pu)\,.$$

Poichè il Teorema 1.8 assicura che $WF_{\sigma_q}(Pu) \subset WF_{\sigma_q}(u)$, la dimostrazione è completa.

Modificando opportunamente la dimostrazione del Lemma 3.5 di [1] si ottiene:

2.9. Lemma. *Sia h un intero e $P_0(x, \xi)$ un polinomio in ξ q-omogeneo di grado m_q avente coefficienti in $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. Siano poi V un sottoinsieme chiuso contenuto in Ω ed F un sottoinsieme chiuso e q-conico contenuto in $\mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$ tali che $P_0(x, \xi) \neq 0$ per ogni $(x, \xi) \in V \times F$. Allora esiste una costante C tale che:*

$$(2.15) \qquad |D_x^\alpha P_0^h(x, \xi)| \leqslant C^{|\alpha|+h}\Gamma(\langle\alpha, q\rangle + 1)^\sigma |\xi|_q^{hm_q} \qquad (x, \xi) \in V \times F\,.$$

2.10. Teorema. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $P(x, D)$ un operatore differenziale di q-ordine m_q a coefficienti $\in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$. Allora:*

$$WF_{\sigma_q}(u) \subset WF_{\sigma_q}(u; P) \cup \big\{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\colon P_0(x, \xi) = 0\big\}$$

dove $P_0(x, \xi)$ è la parte di $P(x, \xi)$ q-omogenea di grado m_q.

Dim. Sia $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u; P)$ e $P_0(x^0, \xi^0) \neq 0$. Esiste allora un intorno U di x^0, un intorno q-conico Γ di ξ^0 ed una successione $\{f_N\} \subset \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ verificante le condizioni j), jj), jjj) indicate nella Definizione 2.5. Sia K un intorno compatto di x^0 contenuto in U ed F un intorno q-conico di ξ^0 contenuto in Γ, chiuso in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, tali che $P_0(x,\xi)\neq 0$ in $K\times F$.

Sia $\chi_n\in C_0^\infty(K)$, $\chi_N=1$ in un intorno V di x^0 contenuto in K, soddisfacente inoltre la condizione (1.3).

Sia inoltre p un intero $\geqslant 3m_q$. Posto $u_N=\chi_{pN}u$, dimostreremo che $\hat{u}_N(\xi)$ verifica per ogni $\xi\in F$ la iii) della Definizione 1.5. Poichè le i) e ii) di tale definizione sono immediate, resterà allora provato che $(x^0,\xi^0)\notin WF_{\sigma_q}(u)$.

Cominciamo con l'osservare che per ogni $(x,\xi)\in K\times F$ si ha:

$$
{}^tP(\exp[-i\langle x,\xi\rangle P_0^{-1}w)=\exp[-i\langle x,\xi\rangle[(I-R)w \tag{2.18}
$$

dove, posto ${}^tP(x,D)=\sum\limits_{\langle\alpha,q\rangle\leqslant m_q}a_\alpha(x)D^\alpha$ è $R=R_1+\ldots+R_{s-1}$, con

$$
-R_j=\sum_{\substack{\langle\alpha,q\rangle\leqslant m_q\\ \langle\beta,q\rangle=k_j\\ \gamma\leqslant\alpha-\beta}}\frac{\alpha}{\beta!\gamma!(\alpha-\beta-\gamma)!}a_\alpha(x)(-\xi)^\beta(D^{\alpha-\beta-\gamma}P_0^{-1})D^\gamma\quad 1\leqslant j\leqslant s-1
$$

e $0=k_1<\ldots<k_{s-1}<m_q$ come indicato nella dimostrazione del Lemma 2.4. Dunque R_j è un operatore differenziale di q-ordine $\leqslant m_q-k_j$, avente coefficienti $\in G^{\sigma_q}(K)$ in x e q-omogenei di grado k_j-m_q in ξ, se $(x,\xi)\in K\times F$. Da (2.18) si deduce:

$$
{}^tP^N(\exp[-i\langle x,\xi\rangle]P_0^{-N}w)=\exp[-i\langle x,\xi\rangle]((I-R)P_0)^NP_0^{-N}w\,. \tag{2.19}
$$

Usando un tipo di ragionamento già usato in [3], poniamo:

$$
w_N=P_0^N\sum_{h_1+\ldots+h_N\leqslant mN}P_0^{-1}R^{h_1}P_0^{-1}R^{h_2}\ldots P_0^{-1}R^{h_N}\chi_{pN}
$$

ed

$$
e_N=\sum_{j=1}^N((I-R)P_0)^{N-j}\sum_{h_j+\ldots+h_N=mN}R^{h_{j+1}}P_0^{-1}R^{h_{j+1}}\ldots P_0^{-1}R^{h_N}\chi_{pN}
$$

allora:

$$
{}^tP^N(\exp[-i\langle x,\xi\rangle]P_0^{-N}w_N)=\exp[-i\langle x,\xi\rangle](\chi_{pN}-e_N)\,.
$$

Quindi, per la (2.19):

$$
\exp[-i\langle x,\xi\rangle]\chi_{pN}={}^tP^N(\exp[-i\langle x,\xi\rangle]P^{-N}w_N)+\exp[-i\langle x,\xi\rangle]e_N\,.
$$

Poichè sul supporto di w_N è $P^N w = f_N$, discende da qui:

$$\hat{u}_N(\xi) = (P_0^{-N} w_N f_N)^\wedge(\xi) + (e_N u)^\wedge(\xi) \qquad \xi \in F. \tag{2.20}$$

Dobbiamo valutare i due addendi a secondo membro. Cominceremo col provare una maggiorazione per $D^\alpha(P_0^{-N} w_N)$.

È:

$$P_0^{-N} w_N = \sum_{h_1+\ldots+h_N \leqslant mN} \sum_{\substack{1\leqslant 1_j \leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant h_1}} \cdots \sum_{\substack{1\leqslant N_j\leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant h_N}} P_0^{-1} R_1 \ldots R_{1_1} P_0^{-1} R_{2_{h_1}} \ldots R_{2_{h_2}} \ldots$$
$$\ldots P_0^{-1} R_{N_1} \ldots R_{N_{h_N}} \chi_{pN}.$$

Utilizzando il Lemma 2.3, tenuto anche conto del Lemma 2.9 e della q-omogeneità in ξ di $P_0^{-N} w_N$, si ottiene, se $\xi \in F$, $|\xi|_q > N^\sigma$, $\langle\alpha, q\rangle + m_q \sum_{1\leqslant j\leqslant N} h_j - \sum^* k_{i_j} \leqslant pmN$,

$$|D^\alpha P_0^{-1} R_{1_1} \ldots R_{1_{h_1}} P R_{2_1} \ldots R_{2_{h_2}} \ldots P_0^{-1} R_{N_1} \ldots R_{N_{h_N}} \chi_{pN}| \leqslant$$
$$\leqslant C^{N+1} \Gamma\Big(\sigma\Big(\langle\alpha, q\rangle + m_q \sum_{1\leqslant j\leqslant N} h_j - \sum^* k_{i_j}\Big) + 1\Big) |\xi|_q^{-m_q N - m_q \sum_{1\leqslant j\leqslant N} h_j + \sum^* k_{i_j}}$$

dove $\sum^*$ sta ad indicare la somma per $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant h_j$, $1 \leqslant i_j \leqslant s-1$. Tenuto conto che il numero degli addendi nello sviluppo di $P_0^{-N} w_N$ è maggiorato da C_0^N, dove C_0 dipende solo da n e q e che $m_q \sum_{1\leqslant j\leqslant N} h_j + \sum^* k_{i_j} \leqslant (p-1)mN$, si ha con una nuova costante C:

$$|D^\alpha P_0^{-N} w_N| \leqslant C^{N+1} N^{\sigma\langle\alpha, q\rangle} |\xi|_q^{-m_q N}$$

se $\langle\alpha, q\rangle \leqslant mN(p - m_q)$, $\xi \in \Gamma$, $|\xi|_q \geqslant N^\sigma$, N sufficientemente grande. Il Lemma 2.6 assicura allora che è:

$$|(P_0^{-N} w_N f_N)^\wedge(\xi)| \leqslant C^{N+1} (N^\sigma / |\xi|_q)^{m_q N} |\xi|^M \tag{2.21}$$

se $\xi \in F$, $|\xi|_q \geqslant N^\sigma$, $N \gg$.

Resta da valutare e_N. Lo sviluppo di e_N è:

$$e_N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{d_1+l_1+\ldots+d_r+l_r = N-j} \sum_{h_j+\ldots+h_N = mN} \sum_{\substack{1\leqslant 1_i\leqslant s-1\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}} \cdots \sum_{\substack{1\leqslant r_i\leqslant s-1\\ 1\leqslant i\leqslant l_r}} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\substack{1\leqslant j_i\leqslant s-1\\ 1\leqslant i\leqslant h_j+1}} \cdots \sum_{\substack{1\leqslant N_i\leqslant s-1\\ 1\leqslant i\leqslant h_N}} (-1)^{l_1+\ldots+l_r} R_{1_1} P_0 \ldots R_{1_{l_1}} P_0 P_0^{d_1} \ldots$$
$$\ldots R_{r_1} P_0 \ldots R_{r_{l_r}} P_0 P_0^{d_r} R_{j_1} \ldots R_{j_{h_j+1}} P_0^{-1} \ldots R_{N_1} \ldots R_{N_{h_N}} P_0^{-1} \chi_{pN}.$$

Ragionando come sopra per w_N si ha se $\xi \in F$, $|\xi|_q \geqslant N^\sigma$,

$$\langle \alpha, q \rangle + m_q \sum_{1 \leqslant i \leqslant l_r} l_i - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant v \leqslant l_i \\ 1 \leqslant i_v \leqslant s-1}} K_{i_v} + m_q(Nm + 1) - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ 1 \leqslant v \leqslant h_i \\ 1 \leqslant i_v \leqslant s-1}} K_{i_v} - K_{j_{h_j+1}} \leqslant mpN,$$

$$|D^\alpha R_{1_i} P_0 \ldots R_{N_{h_N}} P_0^{-1}| \leqslant C^{N+1} N^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} (N^\sigma / |\xi|_q)^{dmN}$$

dove $d = m_q - k_{s-1}$ e si è tenuto conto del fatto che

$$m_q \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} l_i - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant v \leqslant l_i \\ 1 \leqslant i_v \leqslant s-1}} k_{i_v} + m_q(Nm + 1) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant v \leqslant h_i \\ 1 \leqslant i_v \leqslant s-1}} K_{i_v} - K_{j_{h_j+1}} \geqslant dmN . \tag{2.22}$$

Poichè il primo membro di (2.22) è maggiorato da $m(p-1)N$ ed il numero degli addendi in e_N da C_0^N si ha:

$$|D^\alpha e_N| \leqslant C^{N+1} N^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} (N^\sigma / |\xi|_q)^{dmN} \qquad \xi \in F, \ |\xi|_q \geqslant N^\sigma, \ \langle \alpha, q \rangle \leqslant Nm .$$

Quindi:

$$|(e_N u)\hat{}\,| \leqslant C^{N+1} (N^\sigma / |\xi|_q)^{dmN} |\xi|^{M_2} \qquad \xi \in F, \ |\xi|_q \geqslant N^\sigma, \ \langle \alpha, q \rangle \leqslant Nm \tag{2.23}$$

dove M_2 è una costante che dipende dall'ordine di u su K.

Da (2.20), (2.21), (2.23), posto $\delta = \min(m_q, md)$, discende

$$|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C^{N+1} (N^\sigma / |\xi|_q)^{\delta N} |\xi|_q^M \qquad \xi \in F, \ |\xi|_q \geqslant N^\sigma, \ N \gg$$

e da qui si deduce facilmente che $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Bolley - J. Camus, *Regularité Gevréy et itérés pour une classe d'operrateurs hipoelliptiques*, 1980.

[2] P. Bolley - J. Camus - C. Mattera, *Analyticité microlocale et itérés d'operateurs*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978-79.

[3] L. Hörmander, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Comm. Pure Appl. Math., **24** (1971), pp. 671-704.

[4] R. LASCAR, *Propagation des singularités des solutions d'equations pseudo-differentielles quasi-homogènes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **27**, (1977), pp. 79-123.

[5] C. PARENTI - L. RODINO, *Parametrices for a class of pseudo-differential operators. I e II*, Ann. Mat. pure e appl., (IV), **125** (1980), pp. 221-278.

[6] L. RODINO, *Microlocal analysis for spatially inhomogeneous pseudo-differential operators.*

[7] L. P. VOLEVIC, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*, Mat. Sbornik, **59** (1962), pp. 3-52 (in russo).

[8] L. ZANGHIRATI, *Iterati di operatori quasi-ellittici e classi di Gevréy*, Boll. dell'Un. Mat. Ital. (5), **18**-B (1981).

[9] L. ZANGHIRATI, *Iterati di una classe di operatori ipoellittici e classi generalizzate di Gevréy*, Suppl. Boll. Un. Mat. Ital., **1** (1980), pp. 177-195.

[10] L. ZANGHIRATI, *Complementi al teorema degli iterati quasi-ellittici.* Boll. Supp. Boll. Un. Mat. Ital., (6), **1**-A (1982), pp. 137, 143.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 maggio 1981.