Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Giovanni Zacher

Sulle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 39-74

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__39_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 67 (1982)

Sulle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività.

GIOVANNI ZACHER (*)

1. Chiamasi *proiettività* di un gruppo G su un gruppo $\bar{G}$ un isomorfismo del reticolo di tutti i sottogruppi di G su quello di $\bar{G}$.

È ben noto che un sottogruppo normale è un sottogruppo di Dedekind [24], che però l'immagine di un sottogruppo normale in una proiettività non è detto che sia neppure un sottogruppo quasinormale [22].

Un'analisi delle proprietà di una tale immagine è stata condotta, esplicitamente, nel caso dei gruppi finiti, per primo, da Suzuki [21], successivamente da Schmidt [16] e più recentemente da Menegazzo [6], [7] e da Busetto [3]. Schmidt, sfruttando i suoi risultati relativi ai sottogruppi di Dedekind nei gruppi finiti [13], [14] fornisce in [16] modulo la quasinormalità una precisa descrizione sulla immersione delle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività tra gruppi finiti, chiarendo con ciò la deviazione di tali immagini dalla quasi-normalità.

Nel presente lavoro siamo in grado di estendere la descrizione data da Schmidt in tutta generalità ai gruppi periodici e, con una ipotesi limitativa, ai gruppi non periodici.

Questo è stato reso possibile anzitutto in virtù di un recente risultato di Rips [11], e di cui abbiamo dato una nostra dimostrazione in [23], risultato che asserisce l'invarianza proiettiva della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo, sia usufruendo dello studio fatto in [19] e [20] da Stonehewer dei sottogruppi di Dedekind nei gruppi infiniti, sia di un risultato di Busetto [3].

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, Università di Padova, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Il lavoro è suddiviso in 4 numeri. Nel n. 1 vengono anzitutto richiamati alcuni risultati da noi esposti in [23], indispensabili per il nostro studio; inoltre vengono dati diversi criteri di conservazione della normalità e della quasinormalità in una proiettività; di particolare interesse teorema A e teorema B. Nel n. 2 si determinano in relazione alla normalità e quasinormalità una serie di proprietà delle proiettività che conservano, anche solo parzialmente gli indici (2.1, teorema C) e vengono dati condizioni perchè ciò avvenga (2.6, 2.7, 2.10). Il n. 3 contiene i risultati principali del presente lavoro. Essi concernono principalmente, data una proiettività $\sigma: G \to \bar{G}$ ed un sottogruppo normale N di G con N^σ non quasi normale in $\bar{G}$, la struttura di G/N (teorema D), di $G/(\bar{N}_{\bar{G}})^{\sigma^{-1}}$ e di $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ (teorema E), confermando, in particolare, la validità del teorema 3.4 in [16] anche nei gruppi infiniti nel caso almeno di $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ periodico. Vengono inoltre messe in evidenza una serie di conseguenze interessanti (3.11, 3.12); fra l'altro, un criterio di non conservazione dell'ascendenza nelle proiettività (teorema F, 3.13). Nel n. 4 infine si fa, fra l'altro, vedere sotto quali circostanze il radicale di Hirsch-Plotkin (teorema G), quello di Gruenberg (4.9) e l'ipercentro (teorema H) di un gruppo si conservano nelle proiettività.

Notazioni e convenzioni terminologiche.

$N \lhd G$: N normale in G; $N \underset{q}{<} G$: N quasinormale in G; $N \underset{\bar{q}}{<} G$: N non quasinormale in G; $N \underset{d}{<} G$: N sottogruppo di Dedekind in G; $N \underset{\bar{d}}{<} G$: N non sottogruppo di Dedekind in G; $N \underset{a}{<} G$: N ascendente in G; $N \underset{\bar{a}}{<} G$: N non ascendente in G; $H \lessdot G$: H sottogruppo massimo di G; $|g|$: ordine di un elemento; p-elemento: elemento di periodo una potenza del primo p; $Z(p^\alpha)$: gruppo ciclico di ordine p^α, se α finito, il p-gruppo iperciclico se $\alpha = \infty$; $\operatorname{Norm} G$: la norma di G; $Z_i(G)$: i-esimo termine della serie centrale ascendente; $Z_\infty(G)$: l'ipercentro di G; $\mathfrak{T}(G)$: il sottogruppo generato dai sottogruppi normali periodici; gruppo misto: gruppo che contiene elementi di periodo non finito; gruppo separato: gli elementi periodici formano un sottogruppo; prodotto diretto di gruppi: prodotto diretto discreto (non cartesiano); H fattore di Hall di G: $G = H \times K$ con G periodico ed ogni elemento di H ha periodo relativamente primo con quello di un qualunque elemento di K; gruppo Hölderiano: gruppo periodico a sottogruppo di Sylow d'ordine primo; $\exp H$: esponente di H; elementi indipendenti a, b: $\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle = \{1\}$ e $|a| = |b| = 0$; G è un S-

gruppo: $G = P \times T$ ove P è un P-gruppo [1] ed un fattore di Hall di G; P sarà detto un S-fattore di G; H ipercíclicamente immerso in G: H è contenuto in un termine di una serie ascendente di sottogruppi normali a fattori ciclici; $H^g = g^{-1}Hg$; $H_G = \bigwedge\limits_{g \in G} H^g$; $H^G = \bigvee\limits_{g \in G} H^g$; $P(G)$: il gruppo delle autoproiettività di G; $[H/K]$: intervallo di estremi H e K; $H \underset{L}{\leq} G$: H è L-invariante in G ossia invariante per ogni autoproiettività di G. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività (sottinteso G, $\bar{G}$ gruppi); se $H \leq G$ invece di H^σ scriveremo anche $\bar{H}$; inoltre per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$ poniamo $H^{\bar{g}} = H^{\sigma\bar{g}\sigma^{-1}}$, $H_{\bar{G}} = \bigwedge\limits_{\bar{g} \in \bar{G}} H^{\bar{g}}$, $H^{\bar{G}} = \bigvee\limits_{\bar{g} \in \bar{G}} H^{\bar{g}}$.

1. Incominciamo con il richiamare due proposizioni delle quali si trova una dimostrazione in [23].

1.1 Lemma. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un sottogruppo normale e d'indice primo in G. Allora l'indice di $\bar{N}$ in $\bar{G}$ è pure un numero primo.*

1.2 Teorema. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività e sia $H \leq K \leq G$. Allora l'indice $[K:H]$ è finito se e solo se tale è quello $[\bar{K}:\bar{H}]$.*

Sia n un numero naturale o infinito con $2 \leq n$ e p un numero primo; seguendo la notazione introdotta da Schmidt in [17], $P(n, p)$ è la classe gruppale così definita: $G \in P(n, p)$ se e solo se G è un p-gruppo abeliano elementare d'ordine p^n oppure un gruppo $G = \langle A, t\rangle$, con A un p-gruppo abeliano elementare d'ordine p^{n-1}, t un elemento d'ordine primo q e $t^{-1}at = a^r$, r un intero non dipendente da $a \in A$ e tale che $r^q \equiv 1 \bmod p$, mentre $r \not\equiv 1 \bmod p$.

$P(n, p)$ è una classe proiettivamente invariante [22] e due qualunque suoi sottogruppi sono tra loro proiettivi. Useremo anche dire che G è un P-gruppo relativo al numero primo p se e solo se $G \in P(*, p)$ con $*$ un naturale o ∞. Ciò premesso passiamo a generalizzare il lemma 2 di [23]; esso ci sarà utile molto spesso nel seguito.

1.3 Lemma. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$, G/N un gruppo d'ordine primo o un P-gruppo ed $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$. Allora sono verificati i seguenti fatti:*

i) *$N_{\bar{G}} \lhd G$ (e questo succede ovviamente anche se $\bar{N} \lhd \bar{G}$),*

ii) *se $[G:N] = r$, un primo, $G/N_{\bar{G}}$ e $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ appartengono alla medesima classe $P(2, p)$, ove $p = [N:N_{\bar{G}}] = [\bar{G}:\bar{N}] \geq r$; se $G/N \in P(n, p)$*

[1] Per la definizione vedasi sotto.

allora $G/N_{\bar{G}}$ *e* $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *appartengono alla medesima classe* $P(n+1, p)$ *ove ancora* $p = [N:N_{\bar{G}}]$. *È* $N_{\bar{G}} = N_{\bar{H}}$ *per un qualunque* H *con* $N < H \leq G$,

iii) $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *non è abeliano e si ha* $[\bar{N}:\bar{N}_{\bar{G}}] = q < p$,

iv) *posto* $T = \bigwedge_{\tau \in P(G)} N^{\tau}$, T *è L-invariante e si ha* $G/T \in P(*, p)$,

v) *considerato l'insieme non vuoto* $\mathcal{F} = \{X \lhd G | G/X \in P(*, p)$ *per qualche naturale* $*\}$, *si ponga* $K_p = \bigwedge_{X \in \mathcal{F}} X$. *Allora* K_p *è L-invariante,* $G/K_p \in P(m, p)$ *ove* $n \leq m \leq \infty$. *Se* G/Y *è abeliano per un* $Y \in \mathcal{F}$, *allora tale è* G/K_p.

Dim. Se $[G:N] = r$, un primo, è $\bar{N} \underset{d}{\lessdot} \bar{G}$ e poichè $[\bar{G}:\bar{N}] < \infty$ (1.1), per [13] concludiamo che $[\bar{G}:\bar{N}] = p$ è un primo e che $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}} \in P(2, p)$ se $\bar{N} \not\lhd \bar{G}$, per cui l'intervallo $[G/N_{\bar{G}}]$ contiene oltre N due gruppi H_1, H_2 tali da aversi $N = N \wedge H_1 = N \wedge H_2$, $H_1 \vee H_2 = G$, per cui $N_{\bar{G}} \lhd G$ e dunque $G/N_{\bar{G}} \in P(2, p)$ ove $r \leq p$ visto che $N \lhd G$.

Se $G/N \in P(n, p)$, esistono sottogruppi $M \lhd \cdot G$, $N \lhd N_i$ con $M \wedge N_i = N$ e $\bigvee_i N_i = G$. Da $(M_{\bar{G}} \wedge N)^{\sigma} = \bar{M}_{\bar{G}} \wedge \bar{N}_i \lhd \bigvee_i \bar{N}_i = \bar{G}$ e $\bar{N}_{\bar{G}} \leq \bar{M}_{\bar{G}} \wedge \bar{N} \leq \bar{N}$ segue $\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{M}_{\bar{G}} \wedge \bar{N} < \bar{N}$ e così pure $N_{\bar{G}} = M_{\bar{G}} \wedge N \lhd G$ e $N_{\bar{G}} \lessdot N$ visto che $M_{\bar{G}} \lessdot M$. Per semplicità potremo ora supporre $N_{\bar{G}} = \{1\}$. Tenuto presente che da $G/N \in P(n, p)$ segue $\bar{N} \lhd \bar{G}$ non appena $\bar{N} \underset{iq}{\lessdot} \bar{G}$ e che $[G/N]$ è un reticolo irriducibile, usando th. 3.4 in [16] non è difficile concludere che G e $\bar{G}$ appartengono a $P(n+1, p)$ se n è finito e che $\bar{N}_{\bar{H}} = \{1\}$ per ogni $\bar{N} < \bar{H}$. Se poi n è infinito, l'analogo risultato si raggiunge considerando ad es. in G/N un sistema locale di P-gruppi finiti. La iii) è conseguenza di $\bar{N} \not\lhd \bar{G}$, iv) posto $R = N_{\bar{G}}$ è, per i) e ii) $G/R \in P(*, p)$ e scelto $\tau \in P(G)$ risulta $(R^{\tau})_G = R^{\tau} \wedge R^{\tau\sigma} = R^{\tau} \wedge R^{\tau_1}$, $\tau, \tau_1 \in P(G)$ per quanto visto in ii); pertanto $T = \bigwedge_{\tau} (R^{\tau})_G$ e poichè per ii) è $G/(R^{\tau})_G \in P(*, p)$, si conclude che G/T è un gruppo periodico metabeliano, in particolare un gruppo localmente finito a p-Sylow gruppo normale e abeliano elementare. T e così $\bar{T}$ sono L-invarianti per cui σ induce una proiettività tra i gruppi G/T e $\bar{G}/\bar{T}$; essendo $N_{\bar{G}} \geq T$, σ presenta una singolarità a p su G/T; da qui e dalla teoria delle proiettività singolari [22], non è difficile concludere che G/T è un S-gruppo e in definitiva un P-gruppo relativo a p. v) se $X \in \mathcal{F}$ e $\tau \in P(G)$, per i) e ii) si ha $(X^{\tau})_G \in \mathcal{F}$ e $(X^{\tau})_G = X^{\tau} \wedge X^{\tau_1}$ per cui K_p è L-invariante e G/K_p è un gruppo localmente finito a p-Sylow gruppo normale e abeliano elementare e su esso σ ha una singolarità. Da qui, come in iv), si conclude che G/K_p è un

P-gruppo relativo al primo p. Essendo G/K_p un P-gruppo, esiste poi un $K_p \leq Y \lhd G$, $Y \in \mathcal{F}$ con G/Y abeliano se e solo se tale è G/K_p. //

1.4 PROPOSIZIONE. *Sia $N \lhd G$, $[G:N] = r$, un primo e $P(G)$ il gruppo delle autoproiettività di G. Allora il gruppo $G/\bigwedge_{\tau \in P(G)} N^\tau$ soddisfa ad una delle seguenti condizioni:*

i) *è un P-gruppo relativo ad un primo p, con $r \leq p$; è $r = p$ se e solo se il gruppo è abeliano,*

ii) *è un gruppo i cui sottogruppi finitamente generati sono ciclici Hölderiani,*

iii) *è un gruppo abeliano senza torsione di rango* 1 *e residualmente finito.*

DIM. Vedasi [23].

Data una proiettività $\sigma: G \to \bar{G}$ ed $N \lhd G$, vogliamo ora mettere in evidenza alcune condizioni su G/N atte a garantire la normalità o per lo meno la quasi-normalità di $\bar{N}$ in $\bar{G}$. All'uopo, per $N \lhd G$, diremo che G/N appartiene alla classe gruppale Ω se e solo se per una qualunque proiettività $\sigma: G \to \bar{G}$ risulta $\bar{N} \lhd \bar{G}$. Raccogliamo in una proposizione alcune proprietà elementari della classe Ω.

1.5. PROPOSIZIONE. i) *$X \in \Omega$ se e solo se esiste una famiglia $\{H_i\}_i$ di sottogruppi di X tale che $H_i \in \Omega$ e $\bigvee_i H_i = X$;* ii) *Ω è una classe residualmente chiusa;* iii) *sia Λ una classe di gruppi tale che da $G \in \mathcal{G}$, la classe dei gruppi finitamente generati, $N \lhd G$, $G/N \in \Lambda$ e $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività, segua $\bar{N} \lhd \bar{G}$; allora $\Lambda \cap \mathcal{G} \subseteq \Omega$* iv) *sia Λ una classe proiettivamente invariante e $\Lambda \subseteq \Omega$; allora da $N \lhd G$ e $G/N \in \Lambda$, posto $T = \bigwedge_{\tau \in P(G)} N^\tau$, T è L-invariante e G/T è residualmente Λ-gruppo.*

DIM. i), ii) e iv) sono di facile verifica; iii) sia $G/N \in \Lambda \cap \mathcal{G}$; sarà $G = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, N \rangle$ e scelto $x \in N$, posto $H = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$, $H_x = \langle u_1, \ldots, u_n, x \rangle$, $N_x = N \wedge H_x$, si avrà $N_x \lhd H_x$ e $\bigvee_x N_x = N$. Ora da $G = H_x N$ segue $H_x/H_x \wedge N \simeq G/N \in \Lambda$; ma $H_x \in \mathcal{G}$ per cui, per ipotesi, sarà $(H_x \wedge N)^\sigma = \bar{N}_x \lhd \bar{H}_x$ e così $\bar{H} \leq \mathcal{N}(\bar{N})$ per cui $\bar{N} \lhd \bar{H} \vee \bar{N} = \bar{G}$. //

OSSERVAZIONE 1. Seguendo la notazione in [12], per la classe Ω si ha, in particolare, $\{L, R, N\}\Omega = \Omega$. Possiamo così affermare che Ω contiene i gruppi generati da gruppi quadrinomi (1.3) come pure i gruppi generati da elementi aperiodici, in particolare, dunque, i gruppi localmente nilpotenti misti, se teniamo presente la seguente proposizione già provata in [23] quale conseguenza di 1.1.

1.6 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \overline{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$ *e* G/N *ciclico infinito. Allora* $\overline{N} \lhd \overline{G}$.

1.7 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \overline{G}$ *una proiettività ed* $N \lhd G$. *Allora* $\overline{N} \lhd \overline{G}$ *se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

i) N *è un gruppo perfetto,*

ii) N *è privo di sottogruppi d'indice finito,*

iii) G/N *è un gruppo perfetto finito.*

DIM. Sia $\bar{g} \in \overline{G}$ che non normalizza $\overline{N}$. Per 1.6 è $[\langle \bar{g}, \overline{N}\rangle : \overline{N}] < \infty$ per cui $[\overline{N} : \overline{N}^{\bar{g}} \wedge \overline{N}] < \infty$; così per 1.2 sarà $[N : N \wedge N^{\bar{g}}] < \infty$ ed è pure $N \wedge N^{\bar{g}} \underset{d}{\leq} N$; ciò porta ad una contraddizione [13] alle ipotesi i) e ii). iii) per 1.2 è $[\overline{G} : \overline{N}] < \infty$ e da $\overline{N} \ntriangleleft \overline{G}$ segue che esiste un $\overline{N} < \overline{M} \underset{d}{\lessdot} \overline{G}$ e così $N < M \underset{d}{\lessdot} G$ e dunque $G'' \leq M$ [13]. //

Se $\sigma\colon G \to \overline{G}$ è una proiettività e se $N \lhd G$ con G/N un p-gruppo abeliano elementare non ciclico, allora per ogni $\bar{g} \in \overline{G}$ si ha $N^{\bar{g}} \lhd G$ e G/N è isomorfo a $G/N^{\bar{g}}$: ciò discende da 1.3 v). Vogliamo un pò generalizzare tale risultato; all'uopo incominciamo da una semplice constatazione, del resto già usata nel provare 1.3. Il gruppo G contenga quattro sottogruppi N, H, H_1, H_2 soddisfacenti alle condizioni $H \wedge H_i = N$, $H_1 \vee H_2 = G$. Allora per ogni $\tau \in P(G)$ tale che $H^\tau = H$ risulta $N^\tau \lhd G$ se $H \lhd G$.

Nei p-gruppi abeliani finiti non ciclici si riscontra una situazione quale qui considerata; la sfrutteremo per provare

1.8 PROPOSIZIONE. *Dato il gruppo* G, *sia* $N \lhd G$ *e* G/N *un* p*-gruppo abeliano tale che* $G/N = \langle a, N\rangle/N \times H/N$ *ed* $\exp H/N \mid |aN|$. *Se* $\sigma\colon G \to \overline{G}$ *è una proiettività, allora per ogni* $\bar{h} \in \overline{H}$ *risulta* $N^{\bar{h}} \lhd G$.

DIM. Se $x \in H$ è $\langle ax, N\rangle \wedge H = N$ per cui $N^{\bar{h}} = \langle ax, N\rangle^{\bar{h}} \wedge H^{\bar{h}} = \langle ax, N\rangle^{\bar{h}} \wedge H \lhd \langle ax, N\rangle^{\bar{h}}$; pertanto $N^{\bar{h}} \lhd \bigvee_{x \in H} \langle ax, N\rangle^{\bar{h}} \geq \langle a, ax \mid x \in H\rangle^{\bar{h}} = G^{\bar{h}} = G$. //

1.9 COROLLARIO. *Sia* $\sigma\colon G \to \overline{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$ *e* G/N *un* p*-gruppo abeliano.* i) *Se per ogni elemento* bN *esiste uno* aN *di uguale ordine e con* $\langle a, N\rangle \wedge \langle b, N\rangle = N$, *allora per ogni* $\bar{g} \in \overline{G}$ *è* $N^{\bar{g}} \lhd G$. ii) *Se* G/N *è un* p*-gruppo prodotto diretto di gruppi ciclici con gli ordini non* *superiormente limitati, oppure se G/N è un p-gruppo abeliano che contiene almeno due sottogruppi quasi-ciclici ad intersezione identica, allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$.*

DIM. i) Posto $\langle g\rangle^\sigma = \langle \bar{g}\rangle$, esiste in G/N una famiglia $\{K_i/N\}_i$ di sottogruppi che genera G/N e tale che $K_i/N = \langle a_i, N\rangle/N \times H_i/N$, $gN \in H_i/N$ ed $\exp H_i/N \mid |a_i N|$; per 1.8 sarà $N^{\bar{g}} \lhd K_i$ e così $N^{\bar{g}} \lhd \bigvee_i K_i = G$. ii) Da i) segue che $N^{\bar{g}} \lhd G$ per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$; così $G/N^{\bar{G}}$ sarà un p-gruppo localmente finito modulare di esponente infinito e dunque abeliano [22]. Pertanto $G/N_{\bar{G}}$ e così pure $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è abeliano; ma allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$. //

1.10 PROPOSIZIONE. *Sia $N \underset{d}{\leq} G$ e l'intervallo $[G/N]$ sia un reticolo di Tarski vale a dire immagine proiettiva di un gruppo infinito in cui tutti i sottogruppi non banali sono sia massimi che minimi. Se per ogni $X \leq G$, da $N \lessdot X < G$ segue $[X:N] < \infty$ allora $N \lhd G$.*

DIM. Per assurdo sia $N \ntriangleleft G$. Sia $X \in [G/N]$, $X \neq N, G$; sarà $X \underset{d}{\lessdot} G$ e $[X:N]$ un primo [13]; inoltre da $[G:X] < \infty$ segue $[G:N] < \infty$ e così $|[G/N]| < \infty$ una contraddizione. Dunque è pure $[G:X] = \infty$. Da $[X:N]$ un primo e $N \underset{d}{\lessdot} X$, segue che $N' \leq N_X$ [13] e al variare di X in $[G/N]$ con $X \neq G$ si ha $N_G = \bigwedge_X N_X \geq N'$ per cui N/N_G è abeliano e così $X''' \leq N_G$ per cui X/N_G è un $\mathfrak{X}$-gruppo [20]. Per th. B in [20] è G/X_G un gruppo di Tarski. Se ora per un $X_1 \neq X$ fosse $X_{1_G} \neq X_G$, sarebbe $G = X_G X_{1_G}/X_G \simeq X_{1_G}/X_G \wedge X_{1_G}$ una contraddizione al fatto che $N_G \leq X_G \wedge X_{1_G}$ e X_1/N_G gruppo risolubile. Pertanto da $N = X \wedge X_1$ segue $N_G = X_G$; ma è pure $N_G \leq N \lessdot X$ e $X_G \lessdot X$ per cui da $X_G = N_G \leq N \lessdot X$ segue $N = X_G \lhd G$, una contraddizione. //

Per 1.1 e 1.10 è dunque proiettivamente invariante la classe dei gruppi privi di fattori di Tarski.

TEOREMA A. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G/N gruppo semplice non abeliano. Allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$.*

DIM. Distinguiamo 3 casi.

a) G/N gruppo misto.

G/N è generato da elementi aperiodici e si conclude in base all'osserv. 1.

b) G/N è periodico ed esiste un $N < H < G$ con H/N ciclico d'ordine p^2, p un primo.

In virtù di 1.2, per un $g \in G$ è $\overline{H^g}/\overline{N}_{\overline{H^g}}$ un gruppo finito e per il lemma 3 in [13] sarà $\overline{N} \underset{q}{<} \overline{H^g}$ e così se $N \lessdot L \lessdot H$ sarà $\overline{N} \lhd \overline{L^g}$; ora $L^G = G$ per cui $\overline{N} \lhd \overline{G}$.

c) G/N è periodico a Sylow gruppi tutti di esponente primo

Sia r il minimo degli ordini degli elementi non identici di G/N. Se per ogni elemento xN di ordine r risulta $\overline{N} \lhd \langle N, x\rangle^\sigma$, da $\langle x, N\rangle^G = G$ si conclude $\overline{N} \lhd \overline{G}$. Per ipotesi assurda supponiamo che per un zN d'ordine r sia $\overline{N} \ntriangleleft \langle z, N\rangle^\sigma = \overline{H}$; sarà $\overline{N}^{\overline{H}} = \overline{H}$, per cui $\overline{H} \underset{d}{<} \overline{G}$ e così $H^g \underset{d}{<} G$ per ogni $g \in G$. Sia ora yN un qualunque elemento d'ordine primo, diciamo p, distinto da zN e si ponga $K = \langle y, N\rangle$. Sarà $H^g \lessdot \lessdot H^g \vee K$ se $K \neq H^g$ per cui se $[H^g \vee K : H^g] = \infty$ sarà $H^g \vee K/N$ un gruppo di Tarski (cf. th. B in [20]) e dunque tale è $H \vee K^{-1}/N$; pertanto $\overline{N} \lhd (H \vee K^{g-1})^\sigma$ in virtù di 1.1 e 1.10 e così $\overline{N} \lhd \overline{H}$ una contraddizione. Pertanto $H^g \vee K/N$ è un gruppo d'ordine rp, $r \leq p$, per cui $\mathcal{N}(K) \geq H^g$; da qui $\mathcal{N}(K) \geq \bigvee_g H^g = G$ contro la semplicità di G/N. //

Ci sarà utile un lemma che adatta quello 2.3 in [20] alla nostra situazione.

1.11 Lemma. *Sia* $\sigma\colon G \to \overline{G}$ *una proiettività,* $N \underset{q}{<} G$, $K = \langle x\rangle$ *un gruppo infinito e* $K \wedge N = \{1\}$. *Allora per ogni* $\bar{g} \in \overline{G}$ *è* $K^{\bar{g}} \wedge N = \{1\}$.

Dim. Sia $\langle \bar{x}\rangle = \langle x\rangle^\sigma$ e per un $\bar{g} \in \overline{G}$ sia $\overline{N}^{\bar{g}} \wedge \overline{K} = \langle \bar{x}^n\rangle$ con $n > 0$; da $[\langle \overline{N}, \bar{x}^n\rangle/\overline{N}] \simeq [\langle \bar{x}^n\rangle/\{1\}]$ e $\langle \overline{N}, \bar{x}^n\rangle \leq \overline{N} \vee \overline{N}^{\bar{g}} \leq \langle \overline{N}, \bar{g}\rangle$ segue che $\infty = \big|[\langle \overline{N}, \bar{g}\rangle/\overline{N}]\big| = \big|[\langle \bar{g}\rangle/\overline{N} \wedge \langle \bar{g}\rangle]\big|$ per cui $|\bar{g}| = 0$ e $\langle \bar{g}\rangle \wedge \overline{N} = \{1\}$; ma allora per 1.6 è $\overline{N}^{\bar{g}} = \overline{N}$ per cui $\overline{N}^{\bar{g}} \wedge \overline{K} = \{1\}$, una contraddizione È dunque per ogni $\bar{g} \in \overline{G}$, $\overline{N} \wedge \overline{K}^{\bar{g}} = \{1\}$, ossia $N \wedge K^{\bar{g}} = \{1\}$. //

A partire da un $H \leq G$ definiamo il seguente sottogruppo $a(H)$ di G mediante la posizione: $a(H) = \big\langle x \in G \,\big|\, [\langle x\rangle : H \wedge \langle x\rangle] = \infty\big\rangle$.

1.12 Proposizione. *In un gruppo G valgono i seguenti fatti*:

i) *se* $M \underset{d}{\leq} G$, *se M è periodico e se* $a(M) \neq \{1\}$ *allora* $M \trianglelefteq a(M) \trianglelefteq G$ *e* $M \underset{q}{<} G$,

ii) $\langle X \lhd G | X$ *periodico*$\rangle = \langle X \underset{q}{<} G | X$ *periodico*$\rangle = \langle X \underset{d}{<} G | X$ *periodico*$\rangle$.

Dim. i) Se $|g| = 0$, poichè $M \vee M^g$ è periodico si ha: $M = M \vee \vee(M \vee M^g \wedge \langle g\rangle) = \langle M, g\rangle \wedge (M \vee M^g)$ per cui $g \in \mathcal{N}(M)$; se poi $m \in M$, da $[\langle g\rangle/\{1\}] \simeq [\langle g, M\rangle/M] = [\langle gm, M\rangle/M] \simeq [\langle gm\rangle/\langle gm\rangle \wedge M]$ segue $|gm| = 0$ per cui $m \in \langle g, gm\rangle \leq a(M)$ e dunque $M \lhd a(M) \lhd G$; così

$M \lhd^2 G$ ed essendo $M \underset{d}{\leq} G$ è $M \underset{q}{<} G$ (cf. ad es. 1.7 in [20]). ii) Si tenga presente che sottogruppi di Dedekind periodici generano sottogruppi di Dedekind periodici. //

Da 1.12 segue facilmente il noto fatto [10] che $\mathfrak{I}^\sigma(G) = \mathfrak{I}(G^\sigma)$ per ogni proiettività σ.

TEOREMA B. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \underset{q}{<} G$ *e* $a(N) \neq \{1\}$. *Allora sono verificati i seguenti fatti:*

i) $\bar{N} \lhd (a(N))^\sigma = a(N^\sigma) \lhd \bar{G}$ *e* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$,

ii) *per ogni* $\bar{g} \in \bar{G}$, $NN^{\bar{g}}/N$, $N/N \wedge N^{\bar{g}}$, $\bar{N}\bar{N}^{\bar{g}}/\bar{N}$, $\bar{N}/\bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}$ *sono gruppi ciclici finiti; inoltre* $NN^{\bar{g}} \lhd a(N)$, $\bar{N}\bar{N}^{\bar{g}} \lhd a(\bar{N})$.

DIM. i) È chiaro che $(a(N))^\sigma = a(N^\sigma)$; è poi $\bar{N} \lhd a(N^\sigma) \lhd \bar{G}$ in virtù di 2.1 in [18], osservazione 1, 1,12 e 1.11. ii) Segue facilmente da 1.6 ed i). //

OSSERVAZIONE 2. Dal teorema B si vede che l'eventualità che in una proiettività $\sigma\colon G \to \bar{G}$ l'immagine $\bar{N}$ di un $N \underset{q}{<} G$ non sia tale in $\bar{G}$ può presentarsi solo se per ogni $g \in G$ sia $[\langle g\rangle\colon N \wedge \langle g\rangle] < \infty$ vale a dire che l'intervallo $[G/N]$ è periodico. Il problema di vedere sotto quali condizioni da $N \underset{q}{<} G$ segue $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ è così ricondotto alla situazione di $[G/N]$ intervallo periodico. Poichè $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ se e solo se $\bar{N} \underset{q}{<} \langle N, g\rangle^\sigma$ per ogni $g \in G$ tale che $[\langle g, N\rangle/N]$ sia una catena e ricordando che per 1.2 e [13] è $\bar{N} \underset{q}{<} \langle N, g\rangle^\sigma$ non appena $[\langle N, g\rangle/N]$ è una catena di lunghezza diversa da 1 possiamo alla fine affermare che $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ solo a patto che nell'intervallo periodico $[G/N]$ esistano atomi non inseriti in catene di lunghezza 2. Analizzeremo tale situazione nel prossimo numero e vedremo che è strettamente legata al fatto che σ conserva o meno certi indici, questione che sarà trattata ivi più in dettaglio.

2. Incominciamo con analizzare la seguente situazione:

$$G = \langle g, N\rangle\,, \quad N \lhd G\,, \quad [G:N] = r\,, \quad \text{un primo}\,,$$
$$\sigma\colon G \to \bar{G} \quad \text{una proiettività e} \quad \bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}\,.$$

Da 1.3 sappiamo che $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ se e solo se risulta $\sigma\colon G/N_{\bar{G}} \to \bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ ove $G/N_{\bar{G}}$ è un P-gruppo d'ordine rp, $r \leq p$ mentre $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine qp, $q < p$ ove $[N:N_{\bar{G}}] = p = [\bar{G}:\bar{N}]$, $[\bar{N}:\bar{N}_{\bar{G}}] = q$; in particolare σ *non conserva l'indice* $[N:N_{\bar{G}}]$.

Per inciso possiamo allora constatare che la quasi-normalità si conserva nelle proiettività sui gruppi localmente nilpotenti e misti in quanto tale classe è proiettivamente invariante ed è priva di quozienti che siano P-gruppi non abeliani.

Guardando ancora al gruppo $G/N_{\bar{G}}$ sopra considerato possiamo affermare che vi esistono due sottogruppi d'ordine r: $\langle g, N_{\bar{G}}\rangle/N_{\bar{G}}$, $\langle a, N_{\bar{G}}\rangle/N_{\bar{G}}$ tra loro coniugati se $r < p$, (cosa che certamente si verifica se $r = 2$) con

$$q = [\langle g\rangle^\sigma : \langle g^r\rangle^\sigma] \neq [\langle a\rangle^\sigma : \langle a^r\rangle^\sigma] = p\ .$$

Sarà a questo punto conveniente stabilire la seguente nozione: Una proiettività $\sigma\colon G \to \bar{G}$ si dice che *conserva debolmente l'indice* r, r un primo, se e solo se è verificata la seguente condizione:

(∗) per ogni x, y di G è $[\langle x\rangle^\sigma : \langle x^r\rangle^\sigma] = [\langle y\rangle^\sigma : \langle y^r\rangle^\sigma]$ non appena $\langle x^r\rangle < \langle x\rangle$, $\langle y^r\rangle < \langle y\rangle$.

Per quanto visto possiamo ora affermare:

2.1 Proposizione. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \lhd G$:

i) *se* σ *ristretto ad* N *conserva l'indice primo sotto* N (²), *allora* $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$,

ii) *se* $[G:N] = r$, *un primo e se* σ *conserva debolmente l'indice* r *allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$,

iii) *se* $[G:N] = 2$ *e* $G = \langle g, N\rangle$ *con* g *periodico allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$ *non appena la condizione* (∗) *è soddisfatta per i* 2-*elementi di* G.

A complemento di quanto affermato in 2.1 ii) e iii) abbiamo la seguente

2.2 Proposizione. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività, sia* $N \leq G$ *con* $[G:N] = 2$. *Se esiste un elemento* g *d'ordine* 2^α *tale che* $G = \langle N, g\rangle$ *allora sono veri i seguenti fatti*: i) *se* $\alpha > 1$ *allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$, ii) *se* $\alpha = 1$ *e se* $\bar{N} \not\lhd \bar{G}$ *allora* G *è un* S-*gruppo*: $G = P \times T$ *con* $P, \bar{P}$ *in* $P(n, p)$, $2 < p$, P *contiene le involuzioni di* G, $\bar{P}$ *non è abeliano e* σ *non conserva gli ordini dei* 2-*gruppi*.

Dim. Se G non è un S-gruppo con P contenente le involuzioni, e questo è certo il caso se $\alpha > 1$, allora le ipotesi di 2.1 iii) sono soddisfatte (cf. Satz 1.6 in [17]), per cui $\bar{N} \lhd \bar{G}$. E la conclusione è ora facile. //

(²) Ossia da $[N:H] = p$ segue $[\bar{N}:\bar{H}] = p$.

2.3 Corollario. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività che conserva debolmente l'indice per ogni primo r. Allora*: i) *da* $H \underset{q}{<} G$ *segue* $\bar{H} \underset{q}{<} \bar{G}$, ii) *da* $H \underset{a}{\leq} G$ *segue* $H^\sigma \underset{a}{\leq} \bar{G}$.

Dim. i) segue da 2.1 ii) e da quanto detto nell'osservazione 2. ii) Si osservi che $H \underset{q}{<} K$ implica $H \underset{a}{\leq} K$.

2.4 Corollario. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \underset{q}{<} G$. *Se* $G = N \vee \langle x \in G | x$ *un* 2-*elemento*$\rangle$ *allora* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ *a meno che* G *non sia un S-gruppo, con P contenente involuzioni e* σ *non conservi i* 2-*gruppi*.

Seguendo la terminologia introdotta da Suzuki [22], una proiettività σ si dice che *conserva l'indice* se e solo se da $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle \leq G$ segue $[\langle b \rangle : \langle a \rangle] = [\langle b \rangle^\sigma : \langle a \rangle^\sigma]$; σ si dice che *conserva strettamente l'indice* se e solo se da $H \leq K \leq G$ segue $[K:H] = [\bar{K}:\bar{H}]$. Volendo localizzare ad un particolare primo p tali nozioni diamo le seguenti definizioni. Sia p un primo e $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività. Si dice che σ *conserva il p-indice* se e solo se da $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$ e $[\langle b \rangle : \langle a \rangle] = p$ segue $[\langle b \rangle^\sigma : \langle a \rangle^\sigma] = p$ e viceversa; si dice che σ è *p-regolare* se e solo se per ogni $H \lhd K \leq G$ e $[K:H] = p$ segue $\bar{H} \lhd \bar{K}$ e $[\bar{K}:\bar{H}] = p$ e viceversa.

2.5 Proposizione. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività. Allora* σ *conserva il p-indice se e solo se* σ *è p-regolare*.

Dim. Supponiamo che σ conservi il p-indice; da $H \lhd \langle a, H \rangle = K$ e $[K:H] = p$ segue $\bar{H} \lhd \bar{K}$ per 2.1 ii); ora $[K:H] = [\langle a \rangle : \langle a^p \rangle] = [\langle a \rangle^\sigma : \langle a^p \rangle^\sigma] = [\bar{K}:\bar{H}]$. Il viceversa è ovvio. //

2.6 Teorema. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività. Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni*: i) σ *conserva gli indici*, ii) σ *conserva strettamente gli indici*, iii) σ *è p-regolare per ogni primo p coinvolto in G*, iv) *da* $H \lhd K \leq G$ *e* $[K:H] = p$, *un primo, segue* $[\bar{K}:\bar{H}] = p$.

Dim. i) implica ii): sia $H \leq K \leq G$ e $[K:H] < \infty$; visto che $[K:H_K] < \infty$ e $[K:H] = [K:H_K]/[H:H_K]$ non sarà restrittivo supporre $H \lhd K$; sia $H = H_0 \lhd\cdot H_1 \lhd\cdot \ldots \lhd\cdot H_n = K$ una serie di composizione da H a K. Consideriamo H_i/H_{i-1}; se H_i/H_{i-1} è semplice non abeliano è $\bar{H}_{i-1} \lhd \bar{H}_i$ (1.7) e così $[\bar{H}_i:\bar{H}_{i-1}] = [H_i:H_{i-1}]$ [22]; se $[H_i:H_{i-1}] = p$, in virtù di 2.5 è pure $[\bar{H}_i:\bar{H}_{i-1}] = [H_i:H_{i-1}]$; in definitiva $[\bar{K}:\bar{H}] = [K:H]$. ii) implica iii): infatti ii) implica i) e i) implica iii) per 2.5; che poi iii) implichi iv) e iv) implichi i) è evidente. //

2.7 Teorema. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \underset{q}{<} G$. *Allora* σ *conserva gli indici su* G *se e solo se li conserva su* N *e sugli intervalli ciclici* $[\langle g\rangle N/N]$ *di* $[G/N]$.

Dim. La necessità è ovvia. Per la sufficienza, in virtù di 2.1 i) e 2.6 è intanto $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$. Sia ora $g \in G$; ora $X \mapsto X \wedge \langle g\rangle$ individua una proiettività, che conserva gli indici, di $[\langle g\rangle N/N]$ su $\langle g\rangle/N \wedge \langle g\rangle$ e $\bar{X} \mapsto$ $\mapsto \bar{X} \wedge \langle g\rangle^\sigma$ una di $[\langle g\rangle^\sigma \bar{N}/\bar{N}]$ su $\langle g\rangle^\sigma/\bar{N} \wedge \langle g\rangle^\sigma$; ne segue che per le ipotesi fatte σ conserva gli indici su ogni $\langle g\rangle$, tenuto presente che su $\langle g\rangle$ σ conserva il p-indice se per almeno un $H < K \leq \langle g\rangle$ e $[K:H] = p$ segue $[\bar{K}:\bar{H}] = p$. //

Vogliamo ora descrivere alcune situazioni in cui una proiettività conserva parzialmente od anche completamente gli indici.

2.8 Proposizione. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività e* $\langle g\rangle \underset{q}{<} G$. i) *Se* $[G/\langle g\rangle]$ *è misto allora* σ *conserva gli indici su* $\langle g\rangle$. ii) *Se* $|g| = 0$ *e* p *un primo divisore dell'ordine di qualche elemento periodico di* G, *allora se* $\langle x\rangle \neq \langle x^p\rangle$, *risulta* $[\langle x\rangle^\sigma : \langle x^p\rangle^\sigma] = p$. iii) *Se* $[G/\langle g\rangle]$ *è misto e se* $|g| = 0$ *allora* σ *conserva gli indici su* G.

Dim. i) Sia $x \in G$, $|x| = 0$ e $\langle g\rangle \wedge \langle x\rangle = \{1\}$. Allora $\mathcal{C}(g)$ contiene un elemento aperiodico y con $\langle y\rangle \wedge \langle g\rangle = \{1\}$ [18] e la conclusione si raggiunge usando proprietà note delle proiettività sui gruppi abeliani [22]. ii) Sia $|x| = p$, allora $\langle x, g\rangle$ e $\langle x, g\rangle^\sigma$ sono abeliani o diedrali e la conclusione si raggiunge come in i); se poi $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle \neq \{1\}$ poichè il p-indice si conserva su $\langle g\rangle$, ciò avverrà su $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle$ e dunque pure su $\langle x\rangle$. iii) Sia $x \in G \setminus \langle g\rangle$; se $|x| \neq 0$ si conclude usando ii); esiste $|x| = 0$ con $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle = \{1\}$, per i) σ conserva gli indici su $\langle g\rangle$ sul gruppo abeliano $\langle x^2\rangle \times \langle g\rangle$ e sul sottogruppo periodico di $\langle x, g\rangle/$ $/\langle x^2\rangle$; in conclusione σ conserva l'indice su $\langle x\rangle$ e su $\langle g\rangle$. Se poi $\langle x\rangle \wedge$ $\wedge \langle g\rangle \neq \{1\}$ σ conserva gli indici su $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle$ e allora anche su $\langle x\rangle$. //

2.9 Proposizione. *Sia* $H \underset{d}{\leq} G$, H *localmente finito ed esista un* g *di* G *di periodo infinito. Se* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *è una proiettività allora* σ *su* H *conserva gli indici.*

Dim. Non sarà restrittivo supporre $G = \langle g, H\rangle$; è $H \lhd G$ [20]. Usando la teoria della proiettività singolare sui gruppi localmente finiti [22], si avrà per H la fattorizzazione in sottogruppi di Hall, $H = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times T$ ove P_i è un P-gruppo non abeliano mentre T contiene un sottogruppo normale N tale che T/N è abeliano a componenti primarie gruppi elementari abeliani o localmente ciclici, con $\overline{N} \lhd \overline{H} \vee \langle g \rangle^\sigma = \overline{G}$, con σ che su N conserva gli indici mentre è singolare a p_i su $P_i \in P(n_i, p_i)$ e sulle componenti primarie di T/N. Sia S_i un p_i-Sylow di P_i; poichè $\langle P_i, g \rangle$ è generato da elementi aperiodici, sarà $\overline{S}_i \lhd \langle P_i, g \rangle^\sigma$, assurdo essendo $\overline{S}_i \ntriangleleft \overline{P}_i$. Così $i = 0$ e ragionando modulo N, consideriamo $\langle g, T_p \rangle = K$ ove T_p è una componente primaria di T. Se T_p è localmente ciclico, guardando il suo sottogruppo d'ordine p ed usando 2.8 si vede che σ non è singolare su T_p; se poi T_p è abeliano elementare, $\overline{T}_p$ è P-gruppo non abeliano e se $\overline{S}$ è il suo p-Sylow-gruppo è $\overline{S} \lhd \overline{K}$ e $S \lhd K$ e su K/S σ ha una singolarità sul gruppo ciclico d'ordine p in contrasto con quanto appena detto. In conclusione $H = N$, ossia σ conserva gli indici su H. //

2.10 Corollario. *Sia G un gruppo localmente policiclico per finito e $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività.*

i) *Se G contiene 2 elementi (aperiodici) indipendenti allora σ conserva gli indici su G.*

ii) *Se G è misto allora per ogni primo p divisore dell'ordine di qualche elemento periodico di G risulta $[\langle x \rangle^\sigma : \langle x^p \rangle^\sigma] = p$ se $\langle x \rangle \neq \langle x^p \rangle$.*

Dim. i) Non sarà restrittivo supporre G policiclico per finito e per 2.9, 2.7 e 1.12 che $\mathfrak{T}(G)$ sia identico. G conterrà così un sottogruppo normale N abeliano massimale senza torsione. Se N è ciclico, G/N sarà misto e la conclusione si raggiunge usando 2.8 iii). Se no N è un gruppo abeliano libero finitamente generato e non ciclico; ciò basta per affermare che σ su N è indotto da un isomorfismo. Sia ora x un elemento di G con $\langle x \rangle \wedge N \neq \{1\}$; allora σ conserva gli indici su $\langle x \rangle \wedge N$ e dunque anche su x. Resta da esaminare il caso $\langle x \rangle \wedge N = \{1\}$. Se $|x| = 0$, posto $A = N^p$ è $\overline{A} \lhd \overline{N} \vee \langle x \rangle^\sigma = \overline{K}$; ora in K/A esiste un sottogruppo abeliano B/A misto e su esso σ conserva il p-indice; ma allora σ conserva il p-indice su $\langle x \rangle$. Infine possiamo supporre $|x| = p$. Posto $A = N^{p^2}$, è $\overline{A} \lhd \langle x, N \rangle^\sigma = \overline{K}$ per 2.1 i) e K/A è un p-gruppo finito non ciclico nè abeliano elementare per cui $\overline{K}/\overline{A}$ è un p-gruppo [22]. Da qui $[\langle x \rangle^\sigma : \{1\}] = p$. La i) risulta ora provata. ii) Sia x un p-elemento; se $\langle x \rangle \wedge \mathfrak{T}(G) \neq \{1\}$ si conclude per 2.9. Sia $N/\mathfrak{T}(G)$ un sottogruppo normale ciclico di $G/\mathfrak{T}(G)$; per 2.8 i), σ conserva il p-indice su $\langle x \rangle$, su $N/\mathfrak{T}(G)$ e quindi anche su ogni gruppo ciclico infinito di G. Infine se $|x| = 0$, considerato un fattore principale di composizione di $\langle x, \mathfrak{T}(G) \rangle = K$ contenuto in $\mathfrak{T}(G)$: B/A, saranno $\bar{A}$ e $\bar{B}$ normali in $\bar{K}$, $\bar{B}/\bar{A}$ un p-gruppo abeliano elementare finito isomorfo a B/A, per cui ancora σ dovrà conservare il p-indice su $\langle x\rangle$. //

Teorema C. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N = N_0 > N_1 > > \ldots > N_i > \ldots$ una catena discendente di sottogruppi normali di G con N_i/N_{i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots$ gruppo localmente policiclico per finito. Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ allora N/N_i è un gruppo periodico.*

Dim. Per l'osservazione 2 non sarà restrittivo supporre $[G:N] = r$, un primo. Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ sarà per 1.3 $G/N_{\bar{G}}$ un P-gruppo d'ordine rp, $r \leq p$ mentre $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un P-gruppo d'ordine pq, $q < p$. Posto $N = = \langle g, N_{\bar{G}}\rangle$, σ su $\langle g\rangle$ muta ogni p-indice in un q-indice; se $r < p$ allora esiste un $\bar{x} \in \bar{G}$ tale che $\langle g\rangle \neq \langle g\rangle^{\bar{x}} = \langle g_1\rangle$ e σ su $\langle g_1\rangle$ muta ogni r-indice in un q-indice; se $r = p$ allora esiste un sottogruppo $\langle g_1, N_{\bar{G}}\rangle/ /N_{\bar{G}}$ di $G/N_{\bar{G}}$ tale che σ su $\langle g_1\rangle$ conserva il p-indice. Ciò premesso, per induzione su i proviamo che N/N_i è periodico. Per $i = 0$ la cosa è banalmente vera. Sia ora $i > 0$ e sia N/N_{i-1} periodico ed N_{i-1}/N_i misto. Nè sarà restrittivo supporre $N_{\bar{G}} \geq N_1$. Sarà per il teorema B $\bar{N}_i \underset{q}{<} \bar{G}$. È $[\langle g\rangle : \langle g\rangle \wedge N_i] = \infty$; infatti altrimenti, essendo $N_1 \leq N_{\bar{G}}$ sarà $p \,|\, [\langle g\rangle : N_i \wedge \langle g\rangle]$ per cui per un certo m è $g^m \in N_0 \setminus N_i$ mentre $g^{mp} \in N_i$ per cui $\langle g^m\rangle^\sigma \leq \mathcal{N}(\bar{N}_i)$; posto $H = \langle g^m, x, N_i\rangle$ con $x \in N_{i-1}$ e $|xN_i| = 0$, sarà $\bar{N}_i \lhd \bar{H}$ ed ora per 2.10 σ su H/N_i conserva il p-indice, una contraddizione. Esiste così un intero l tale che $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ è un sottogruppo infinito di N_{i-1}/N_i e su esso σ muta il p-indice in q-indice.

Passiamo ad esaminare $[\langle g_1\rangle : \langle g_1\rangle \wedge N_i]$.

Se $r < p$, da $\langle g_1\rangle = \langle g\rangle^{\bar{x}}$ e $\langle g\rangle \wedge N_i = \{1\}$ segue (1.11) $\langle g_1\rangle \wedge N_i = = \{1\}$. Così per un certo s, $\langle g^l, g_1^s, N_i\rangle/N_i$ è un sottogruppo di N_{i-1}/N_i e $\langle g^l, N_i\rangle \wedge \langle g_1^s, N_i\rangle = N_i$ perchè su $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ σ muta ogni r-indice in un q-indice e su $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ ogni p-indice pure in un q-indice. Ma ora per 2.10 i) σ conserva gli indici su N_{i-1}/N_i, una contraddizione. Se $r = p$ e $[\langle g_1\rangle : N_i \wedge \langle g_1\rangle] < \infty$, come sopra si vede che su $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ σ conserva il p-indice, una contraddizione. Di nuovo, dunque, è $|g^l N_i| = |g_1^s N_i| = 0$, $\langle g^l, N_i\rangle \wedge \langle g_1^s, N_i\rangle = N_i$ per cui ancora per 2.10 i) σ conserva gli indici su N_{i-1}/N_i. E quest'ultima contraddizione conclude la dimostrazione. //

3. In questo numero verranno stabiliti i risultati centrali del presente lavoro.

3.1 PROPOSIZIONE. *Sia σ: $G \to \overline{G}$ una proiettività, $N \underset{q}{<} G$ e G finitamente generato modulo N. Allora $[N^G/N]$ soddisfa alla condizione massimale e minimale per i sottogruppi.*

DIM. È $\overline{N} \underset{d}{<} \overline{G}$ ed $\overline{N}$ è normalizzato da ogni elemento $\bar{g} \in \overline{G}$ con $[\langle\bar{g}\rangle:\overline{N}\wedge\langle\bar{g}\rangle] = \infty$ (1.6). In virtù di th. 1 in [20] è ora facile concludere. //

3.2 LEMMA. *Sia σ: $G \to \overline{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G finitamente generato modulo N. Allora N^G/N è un gruppo finito.*

DIM. Se $\overline{N} \underset{q}{<} \overline{G}$ si ha $[\overline{N}^{\overline{G}}:\overline{N}] < \infty$ (cf. ad es. [2]) e dunque per 1.2 è $[N^G:N] < \infty$; sia dunque $\overline{N} \underset{q}{\not<} \overline{G}$, per cui, in virtù di teorema A, G/N sarà un gruppo periodico.

Per 3.1, da $N \leq H \leq N^G$ segue che $[H/N]$ soddisfa alla condizione massimale e minimale; in particolare H è finitamente generato monulo N. Posto $N^G = G_1$, sia $N = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_n = G_1$ una serie di composizione da N a G_1; sarà $1 \leq n$.

Proviamo che $[\overline{N}^{\overline{G}_1}:\overline{N}] < \infty$.

In virtù di teorema A e 1.1 è $\overline{N} \lhd \overline{N}_1$ oppure $[\overline{N}_1:\overline{N}]$ un primo, per cui, in ogni caso, $[\overline{N}^{\overline{N}_1}:\overline{N}] < \infty$. Sia ora $1 < i \leq n$; posto $\overline{T} = \overline{N}^{\overline{N}_{i-1}}$ supporremo $(\overline{T}:\overline{N}] < \infty$.

Distinguiamo due casi:

a) $\overline{N}_{i-1} \lhd \overline{N}_i$.

Risulta $\overline{T} \trianglelefteq \overline{N}_{i-1} \lhd \overline{N}_i$ e $\overline{T} \underset{d}{\leq} \overline{N}_i$ per cui $\overline{T} \underset{q}{<} \overline{N}_i$ [19]; pertanto, essendo $\overline{N}_i$ finitamente generato modulo $\overline{T}$ sarà $[\overline{N}^{\overline{N}_i} = \overline{T}^{\overline{N}_i}:\overline{T}] < \infty$ [2]; da qui $[\overline{N}^{\overline{N}_i}:\overline{N}] = [\overline{N}^{\overline{N}_i}:\overline{T}][\overline{T}:\overline{N}] < \infty$.

b) $\overline{N}_{i-1} \ntriangleleft \overline{N}_i$.

Sarà $[\overline{N}_i:\overline{N}_{i-1}] = p$, un primo, (teor. A) e poichè $\overline{T} \trianglelefteq \overline{N}_{i-1}$ abbiamo $\mathcal{N}_{\overline{N}_i}(\overline{T}) = \overline{N}_i$ oppure $\mathcal{N}_{\overline{N}_i}(\overline{T}) = \overline{N}_{i-1}$. Se $\overline{T} \lhd \overline{N}_i$ è $\overline{T} = \overline{T}^{\overline{N}_i} = \overline{N}^{\overline{N}_i}$ e dunque $[\overline{N}^{\overline{N}_i}:\overline{N}] < \infty$.

Supponiamo allora $\mathcal{N}_{\overline{N}_i}(\overline{T}) = \overline{N}_{i-1}$.

Per 1.3 sarà $\overline{N}_i/\overline{N}_{i-1\overline{N}_i} \in P(2, p)$; esiste dunque un $\bar{x} \in \overline{N}_i$ il cui ordine rispetto a $\overline{N}_{i-1\overline{N}_i}$ è p; ora $[\langle\bar{x}\rangle:\overline{N}\wedge\langle\bar{x}\rangle] < \infty$ $[\langle\bar{x}\rangle:\langle\bar{x}\rangle\wedge\overline{N}_{i-1\overline{N}_i}] = p$ e così $[\langle\bar{x}\rangle:(\langle\bar{x}\rangle\wedge\overline{N})\wedge(\langle\bar{x}\rangle\wedge\overline{N}_{i-1\overline{N}_i})] = m$ è un numero divisibile per p; poniamo $m = p^\alpha l$, $p \nmid l$, $\bar{y} = \bar{x}^l$ ed $\overline{A} = \langle\bar{x}\rangle\wedge\overline{N}\wedge\overline{N}_{i-1\overline{N}_i}$; sarà $\alpha \geq 1$, $\langle\bar{x}\rangle/\overline{A} = \langle\bar{x}^{p^\alpha}\rangle/\overline{A} \times \langle\bar{y}\rangle/\overline{A}$ con $\langle\bar{y}\rangle/\overline{A}$ p-gruppo d'ordine p^α; da $|\bar{x}\overline{N}_{i-1\overline{N}_i}| = p$ segue $|\bar{x}^l\overline{N}_{i-1\overline{N}_i}| = p$ ossia $|\bar{y}\overline{N}_{i-1\overline{N}_i}| = p$, $[\overline{N}_i = \langle\bar{y}, \overline{N}_{i-1}\rangle:$ $:\overline{N}_{i-1}] = p$, $\bar{y}^p \in \overline{N}_{i-1}$ e $\overline{N}_i = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{N}_{i-1}\bar{y}^j$ sicchè $\{\overline{T}^{\bar{g}} | \bar{g} \in \overline{N}_i\} = \{\overline{T}, \overline{T}^{\bar{y}}, \ldots, \overline{T}^{\bar{y}^{p-1}}\}$

e così si avrà $\bar{T} < \bar{T}^{\bar{N}_i} = \bar{T} \vee \bar{T}^{\bar{y}} \vee \ldots \vee \bar{T}^{\bar{y}^{p-1}} \leq \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle \leq \bar{N}_i$; ora $[\langle \bar{T}, \bar{y} \rangle / \bar{T}] \simeq [\langle \bar{y} \rangle / \bar{T} \wedge \langle \bar{y} \rangle]$ e il secondo membro è una catena (finita) avendosi $\bar{N} \leq \bar{T}$ e $[\langle \bar{y} \rangle / \bar{N} \wedge \langle \bar{y} \rangle]$ una catena. È $\bar{T} \lhd \bar{N}_{i-1}$, $\bar{y}^p \in \in \bar{N}_{i-1}$, per cui, posto $\bar{R} = \langle \bar{T}, \bar{y}^p \rangle$ sarà $\bar{R} \leq \bar{N}_{i-1}$ e $\bar{R} \underset{d}{\lessdot} \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle$ essendo $\bar{T} \underset{d}{\lessdot} \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle$ e $[\langle \bar{T}, \bar{y} \rangle / \bar{T}]$ una catena, quindi reticolo distributivo; è $\bar{T} \lhd \bar{R}$ e così $\bar{R}/\bar{T}$ è un gruppo finito e così $[\bar{R} : \bar{T}] < \infty$ per cui (1.2) è $[R : N] = [R : T][T : N] < \infty$. Se allora $\bar{T}^{\bar{N}_i} \leq \bar{R}$ è $[\bar{T}^{\bar{N}_i} : \bar{N}] < < \infty$; altrimenti sarà $\bar{N}^{\bar{N}_i} = \bar{R}^{\bar{N}_i} = \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle = \bar{B} \lhd \bar{N}_i$. Posto $\langle y \rangle^\sigma = = \langle \bar{y} \rangle$, avremo $N < R \underset{d}{\lessdot} B$ con R/N un gruppo finito e quindi un $\mathfrak{X}$-gruppo [20].

Per assurda ipotesi, sia $[B : R] = \infty$; in virtù del th. B in [20] sarà B/R_B un gruppo di Tarski e dunque (teor. A) avremo $\bar{N} \leq \bar{R}_B \lhd \lhd \bar{B} \lhd \bar{N}_i$; poichè $(\bar{R}_B)^{\bar{N}_i} = \bar{B}$, esiste un $\bar{g} \in \bar{N}_i$ tale che $\bar{R}_B < \bar{R}_B \vee (\bar{R}_B)^{\bar{g}} \lhd \bar{B}$ e per la semplicità del gruppo di Tarski sarà $\bar{B} = \bar{R}_B \vee (\bar{R}_B)^{\bar{g}}$. Abbiamo

$$(1) \qquad [\bar{B} = \bar{R}_B (\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{R}_B] = [\bar{R}_B^{\bar{g}} : \bar{R}_B \wedge (\bar{R}_B)^{\bar{g}}] .$$

Abbiamo poi $\bar{N} < \bar{R}_B$, $\bar{N}^{\bar{g}} < (\bar{R}_B)^{\bar{g}}$ e così $\bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}} \leq \bar{R}_B \wedge (\bar{R}_B)^{\bar{g}}$; ma $[(\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{N}^{\bar{g}}] < \infty$ (1.2) e da $\langle N, g \rangle / N$ finito segue $[\langle \bar{N}, \bar{g} \rangle : \bar{N}] < \infty$ (1.2) e così $[\bar{N}^{\bar{g}} : \bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}] < \infty$ sicchè $[(\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}]$ e dunque pure $[(\bar{R}_B)^{\bar{g}} : : \bar{R}_B \wedge (\bar{R}_B)^{\bar{g}}] < \infty$ e per (1) infine $[B : \bar{R}_B] < \infty$, una contraddizione.

Dunque $[B : T] < \infty$ e così (1.2) $[\bar{B} : \bar{T}] < \infty$ e dunque $[\bar{N}^{\bar{N}_i} : \bar{N}] = = [\bar{B} : \bar{T}][\bar{T} : \bar{N}] < \infty$. È così provato, per induzione, che $[\bar{N}^{\bar{N}_n} = \bar{N}^{\bar{G}_1} : : \bar{N}] < \infty$. Abbiamo adesso $\bar{N}^{\bar{G}_1} \lhd \bar{G}_1 \lhd \bar{G}$ e $\bar{N}^{\bar{G}_1} \underset{d}{\lessdot} \bar{G}$ per cui $\bar{N}^{\bar{G}_1} \underset{q}{\lessdot} \bar{G}$ [19]; ne segue che $[(\bar{N}^{\bar{G}_1})^{\bar{G}} = \bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}^{\bar{G}_1}] < \infty$ [2] e così $[\bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}] = [\bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}^{\bar{G}_1}] \cdot \cdot [\bar{N}^{\bar{G}_1} : \bar{N}] < \infty$ per cui per 1.2 è, come volevasi, N^{G}/N un gruppo finito. //

Per convenienza del lettore, richiamiamo la seguente utile definizione data da Stonehewer in [20].

DEFINIZIONE. Sia G un gruppo ed N un suo sottogruppo. Diremo che G ha la *Schmidt-struttura rispetto ad* N (*modulo* N_G) se e solo se G/N_G è periodico e risulta

$$G/N_G = (P_1/N_G \times \ldots \times P_i/N_G \times \ldots) \times K/N_G$$

ove $1 \leq i \leq \infty$ con

i) P_i/N_G un P-gruppo non abeliano,

ii) P_i/N_G e K/N_G sono fattori di Hall di G/N_G,

iii) $N/N_G = (Q_1/N_G \times \ldots \times Q_i/N_G \times \ldots) \times N \wedge K/N_G$ dove Q_i/N_G è un Sylow-gruppo non normale di P_i/N_G e così $Q_i^{P_i} = P_i$,

iv) $N \wedge K$ è quasinormale in G.

Osservazione 3. iv) con iii) e ii) comporta che $N \underset{q}{<} NK$; inoltre da $N \wedge K \underset{q}{<} K$ e $(N \wedge K)_G = N_G$ segue che $N \wedge K/N_G$ [18] e dunque per iii) N/N_G è un gruppo residualmente nilpotente finito, in particolare localmente nilpotente essendo periodico e quindi tale è pure il gruppo $(N \wedge K)^G/N_G$ [12], mentre $N^G/N_G = (P_1/N_G \times \ldots \times P_i/N_G \times \ldots) \times \times (N \wedge K)^K/N_G$.

Data una proiettività σ: $G \to \bar{G}$, sia $N \lhd G$, $N \lessdot M \leq G$ e $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{M}$. Posto $[M:N] = r$, $[\bar{M}:\bar{N}] = p$, abbiamo già avuto modo ai n. 1 e 2 di osservare che $M/N_{\bar{M}}$ è un P-gruppo d'ordine pr, $r \leq p$, $\bar{M}/\bar{N}_{\bar{M}}$ un P-gruppo (non abeliano) d'ordine pq, $p > q$ e $[N:N_{\bar{M}}] = p$ mentre $[\bar{N}:\bar{N}_{\bar{M}}] = q < p$. Ci sarà conveniente, per brevità di linguaggio, chiamare nel seguito, (r, p) e (q, p) le coppie associate ad (N, M). Ciò detto passiamo ad enunciare e provare l'utile

3.3 Lemma. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G/N un gruppo finitamente generato. Allora valgono i seguenti fatti*:

a) $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un gruppo nilpotente periodico di esponente finito. Se poi $\bar{N}$ non è quasinormale in $\bar{G}$, allora $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è periodico ed ha la seguente struttura:

b) $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{P}_1/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \bar{P}_t/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{K}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un prodotto diretto di un numero finito di sottogruppi di Hall con $\bar{P}_i/\bar{N}_{\bar{G}}$ un P-gruppo (non abeliano) finito d'ordine $p_i^{\alpha_i} q_i$, $q_i < p_i$, $1 \leq \alpha_i$, $1 \leq t$.

c) $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{Q}_1/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \bar{Q}_t/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{Q}/\bar{N}_{\bar{G}}$, $\bar{Q}_i = \bar{N} \wedge \bar{P}_i$, $[\bar{Q}_i:\bar{N}_{\bar{G}}] = q_i$, $\bar{Q}_i^{\bar{G}} = \bar{Q}_i^{\bar{P}_i} = \bar{P}_i$, $\bar{Q} = \bar{K} \wedge \bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$, $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{N}\bar{K}$.

d) $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{P}_1/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \bar{P}_t/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$; $\bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è gruppo nilpotente periodico di esponente finito. Infine

e) $G/N = P_1N/N \times \ldots \times P_tN/N \times KN/N$ è un prodotto diretto di sottogruppi di Hall con $P_iN/N \simeq P_i/P_i \wedge N = P_i/Q_i$ un gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i - 1} r_i$, $r_i \leq p_i$, ed è un P-gruppo se $\alpha_i > 1$. $Q_{iP_i} = N_{\bar{G}} \lhd P_i$ e $P_i/N_{\bar{G}}$ è un P-gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i} r_i$; inoltre $K \lhd G$.

f) Per ogni i esiste un $M_i \leq G$ con $N \lessdot M_i$ e $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{M}_i$ e tale che $[M_i:N] = r_i$, $N \wedge P_i \lessdot M_i \wedge P_i$, $N \wedge P_j = M_i \wedge P_j$ per $j \neq i$, $M_i \wedge K = = N \wedge K$, è $N_{\bar{G}} = (M_i \wedge P_i)_{\bar{P}_i} = (M_i \wedge P_i)_{\bar{M}_i}$; le coppie associate ad (N, M_i) sono (r_i, p_i) e (q_i, p_i); per $i \neq j$ è $\{r_i, p_i\} \cap \{r_j, p_j\} = \emptyset$, $\{q_i, p_i\} \cap \cap \{q_j, p_j\} = \emptyset$.

Le b), c) e d) primo capoverso, ci dicono che $\bar{G}$ ha la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ mod $\bar{N}_{\bar{G}}$.

Dim. *a*) Poichè $\bar{G}$ è finitamente generato modulo $\bar{N}$, per 3.2 è $[\bar{N}^{\bar{G}}:\bar{N}] < \infty$. Da qui segue che $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un gruppo prodotto subdiretto di gruppi finiti isomorfi, in particolare è di esponente finito. È $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}} \underset{d}{\lesssim} \bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ a cuore identico; tenendo presente 1.2, 1.6 e il ragionamento nella dimostrazione di 3.9 ii) in [20] si conclude che $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è nilpotente (di esponente finito). Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$, per teor. B dovrà essere G/N e dunque $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ periodico. Se di nuovo si tiene presente che $[\bar{N}^{\bar{G}}:\bar{N}] < \infty$ e il ragionamento usato nella dimostrazione del th. E in [20] si conclude che $\bar{G}$ ha la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ modulo $\bar{N}_{\bar{G}}$, quale descritto in *b*), *c*) e in *d*) primo capoverso. Posto $\bar{T} = \bar{Q}^{\bar{G}}$, è $[\bar{T}:\bar{Q}] < \infty$ [2] così ad es. per l'osservazione 3, $\bar{T}/\bar{Q}_{\bar{T}}$ è un gruppo nilpotente finito per cui $\bar{Q}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un prodotto subdiretto di gruppi nilpotenti finiti isomorfi per cui $\bar{Q}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è nilpotente di esponente finito. *b*), *c*) e *d*) risultano così giustificate. *e*) Da *b*) si ricava che le coppie $(\bar{P}_i, \bar{P}_j)$, $(\bar{P}_i, \bar{K})$ sono coppie intersezione ed unione distributive di $[\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}]$ (cf. [22]), per cui tali saranno (P_i, P_j) e (P_i, K) in $[G/N_{\bar{G}}]$. Ne segue che $N = N\vee(P_i\wedge P_j) = NP_i\wedge NP_j$, $N = N\vee \vee(P_i\wedge K) = NP_i\wedge NK$. $NP_i/N \simeq P_i/N\wedge P_i = P_i/Q_i$ è un gruppo proiettivo ad un intervallo di $[\bar{P}_i/\bar{N}_{\bar{G}}]$, per cui applicando 1.3 si ricava $\sigma\colon P_i/Q_{i\bar{P}_i} \to \bar{P}_i/\bar{Q}_{i\bar{P}_i}$ e tenuto conto di *b*) e *c*) si avrà $\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{Q}_{i\bar{G}} = \bar{Q}_{i\bar{P}_i}$, $N_{\bar{G}} = Q_{i\bar{P}_i} = (N\wedge P_i)_{\bar{P}_i} \lhd P_i$ con $[Q_i:N_{\bar{G}}] = p_i$ e $[P_i:Q_i] = p_i^{\alpha_i-1}r_i$. Visto che (P_i, K) è una coppia intersezione distributive in $[P_i\vee K/N_{\bar{G}}]$, con $P_i\wedge K = N_{\bar{G}} \lhd P_i$, per $x\in P_i$ è $P_i\wedge K^x = N_{\bar{G}}$ per cui deve essere $K^x = K$; in definitiva $\mathcal{N}(K) \geq \bigvee_i P_i\vee K = G$ *f*) in $P_i/N_{\bar{G}}$ si consideri un sottogruppo $L_i/N_{\bar{G}}$ d'ordine r_ip_i con $Q_i < L_i$ e si ponga $M_i = Q_1\vee \vee\ldots Q_{i-1}\vee L_i\vee Q_{i+1}\ldots\vee Q_t\vee Q$; se si tiene conto di *b*), *c*) ed *e*) si vede che M_i ha le proprietà dette. Poichè per $i\neq j$ è $\bar{P}_i\vee\bar{P}_j/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{P}_i/\bar{N}_{\bar{G}}\times \times\bar{P}_j/\bar{N}_{\bar{G}}$ una fattorizzazione di Hall ed essendo $N_{\bar{G}}\lhd P_i\vee P_j$ è pure [22] $P_i/N_{\bar{G}}\times P_j/N_{\bar{G}}$ una fattorizzazione di Hall; dunque

$$\{r_i, p_i\}\cap\{r_j, p_j\} = \emptyset\,, \qquad \{q_i, p_i\}\cap\{q_j, p_j\} = \emptyset\,. \qquad //$$

Prima di procedere ci sarà conveniente a questo punto enunciare un risultato recente di Busetto [3] di cui avremo bisogno nel nostro studio, anche se non subito in tutta la sua generalità, e per la cui dimostrazione è servito il lemma 3.3.

3.4 Teorema (Busetto). *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N\lhd G$. Allora $N_{\bar{G}}$ ed $N^{\bar{G}}$ sono sottogruppi normali di G.*

Questo teorema fu per primo dimostrato da Schmidt (cf. ad es. [16]) per i gruppi finiti; con semplici considerazioni locali è facile estenderlo ai gruppi localmente finiti. Per i nostri scopi immediati ci basta la validità di 3.4 nell'ipotesi che G/N sia finito. Per completezza schizziamo qui una dimostrazione del teorema in tale ipotesi restrittiva rinviando il lettore al lavoro [3] per il caso generale.

DIM. Sia $N = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_t = G$ una serie principale da N a G. Per provare $N_{\bar{G}} \lhd G$ usiamo induzione su t la cosa essendo banale se $t = 0$. Sia dunque $t \geq 1$; per ipotesi induttiva sarà $N_{1\bar{G}} \lhd G$. Se $N = N_{1\bar{G}} \vee N$ è $N_{\bar{G}} = N_{1\bar{G}} \lhd G$. Se $N_{1\bar{G}} \vee N \underset{\neq}{>} N$ risulta $N_1 = N \vee N_{1\bar{G}}$ per cui $N_1/N \simeq N_{1\bar{G}}/N \wedge N_{1\bar{G}}$. Se N_1/N non è abeliano per teor. A sarà $(N_{1\bar{G}} \wedge N)^\sigma \lhd \bar{N}_{1\bar{G}} \lhd \bar{G}$ per cui $(N_{1\bar{G}} \wedge N)^\sigma / (N_{1\bar{G}} \wedge N)^\sigma_{\bar{G}} = N_{\bar{G}}$ è abeliano; ma è anche residualmente semisemplice [22] per cui $N_{\bar{G}} = N \wedge N_{1\bar{G}} \lhd G$. Se N_1/N è p-abeliano elementare, posto

$$T = \bigwedge_{\substack{x_i \in G \\ \bar{x}_i \in \bar{G}}} (N \wedge N_{1\bar{G}})^{x_1 \bar{x}_1 \ldots x_n \bar{x}_n} \quad \text{è} \quad T \lhd G\,,\ \bar{T} \lhd \bar{G} \ \text{e} \ T = \bigwedge_{\substack{x_i \in G \\ \bar{x}_i \in \bar{G}}} (N_{\bar{G}})^{x_1 \bar{x}_1 \ldots x_n \bar{x}_n}.$$

Da $N_{1\bar{G}}/N \wedge N_{1\bar{G}}$ p-abeliano elementare, tenuto conto di 1.4 e del fatto che $N_{1\bar{G}} \lhd G$, si desume che G/T è localmente finito oppure che $N_{1\bar{G}}/T$ è abeliano senza torsione di rango 1 e da qui, sia per quanto sopra detto, segue dover essere $N_{\bar{G}} \lhd G$. Ora $G/N_{\bar{G}}$ è finito e così per [16] sarà pure $N^{\bar{G}} \lhd G$. //

3.5 LEMMA. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \lhd G$. Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ allora G/N è un gruppo periodico e sono verificati i seguenti fatti:*

a) Esiste un $M \leq G$ con $N \lessdot M$ e $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{M}$; è $M/N_{\bar{M}}$ un P-gruppo d'ordine rp con $r \leq p$, $r = [M:N]$, $[N:N_{\bar{M}}] = p$, mentre $\bar{M}/\bar{N}_{\bar{M}}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine pq, $q < p$ con $[\bar{M}:\bar{N}] = p$, $[\bar{N}:\bar{M}_{\bar{N}}] = q$.

b) $G/N = R/N \times C/N$, dove R/N è un fattore di Hall di G/N ed $M/N \leq R/N$. R/N è un gruppo d'ordine $p^\alpha r$ con $r \leq p$, $0 \leq \alpha \leq \infty$ ed è un P-gruppo se $R/N \neq M/N$ ossia se $\alpha \geq 1$.

c) $C_{\bar{G}} = C_{\bar{R}}$, $N_{\bar{M}} = N_{\bar{R}} = N \wedge C_{\bar{G}}$, $G/C_{\bar{G}}$ è isomorfo ad $R/N_{\bar{R}}$ ed è un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha+1} r$, $C = NC_{\bar{G}}$ e C/N non contiene elementi di ordine p.

d) $\bar{C}_{\bar{G}} = \bar{C}_{\bar{R}}$, $\bar{N}_{\bar{M}} = \bar{N}_{\bar{R}} = \bar{N} \wedge \bar{C}_{\bar{G}}$, $\bar{G}/\bar{C}_{\bar{G}}$ è isomorfo ad $\bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}}$ ed è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p^{\alpha+1} q$, $q \leq p$.

DIM. Per teorema B è G/N periodico. Da 3.3 si deduce l'esistenza di un $M \leq G$ con $N \lessdot M$ e $\bar{N} \underset{q}{\lessdot} \bar{M}$ e soddisfacente alle condizioni di a). Se ora $\{X_j/N\}_j$ è un sistema locale di sottogruppi finitamente generati di G/N con $M \leq X_j$ per ogni j, da 3.3 si deduce facilmente che per G/N esiste una rappresentazione

$$(1) \qquad G/N = R/N \times C/N$$

ove $M/N \leq R/N$ è un fattore di Hall di G/N d'ordine $p^\alpha r$ con $\alpha = 0$ se $R/N = M/N$ mentre è un P-gruppo d'ordine $p^\alpha r$, $r \leq p$, $1 \leq \alpha \leq \infty$ se $R/N \neq M/N$. Usando 1.3 si vede che $N_{\bar{M}} = N_{\bar{R}} \lhd R$ e che $R/N_{\bar{R}}$ è un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha+1}r$ con $[N : N_{\bar{R}}] = p$ mentre $\bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p^{\alpha+1}q$ con $[\bar{N} : \bar{N}_{\bar{R}}] = q < p$. Da (1) si ricava $G = RC$, $R \wedge C = N$ e $G/C \simeq R/N$. Tenuto presente che $\bar{N} \underset{q}{\lessdot} \bar{M} \leq \bar{R}$ ed usando ancora 1.3 si ha

$$(2) \qquad N \gtrdot N_{\bar{M}} = N_{\bar{R}} = (R \wedge C)_{\bar{R}} = R \wedge C_{\bar{R}} = N \wedge C_{\bar{R}}$$

per cui $C_{\bar{R}} \neq C$ e dunque

$$(3) \qquad C_{\bar{R}} = C_{\bar{G}} \lhd G$$

avendosi per 1.3 $C_{\bar{G}} \lhd G$ e $C_{\bar{G}} \lessdot C$. Ne segue che $NC_{\bar{G}} = C$ perchè $N \nleq C_{\bar{G}} = C_{\bar{R}}$ per (2) e così $RC_{\bar{G}} = RC = G$. Da qui, tenuto conto di (2) e (3) si ricava:

$$(4) \qquad \begin{cases} G/C_{\bar{G}} = G/C_{\bar{R}} \simeq R/R \wedge C_{\bar{R}} = R/N_{\bar{R}} = R/M_{\bar{M}}\,, \\ \bar{G}/\bar{C}_{\bar{G}} = \bar{G}/\bar{C}_{\bar{R}} \simeq \bar{R}/\bar{R} \wedge \bar{C}_{\bar{R}} = \bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}} = \bar{R}/\bar{N}_{\bar{M}}\,. \end{cases}$$

Se C/N contiene un elemento d'ordine p, allora dovrà essere $R/N = M/N$ con $[M : N] = r < p$. Sia $aN \in C/N$ d'ordine p e poniamo $T = \langle M, a \rangle$. Allora T/N è finito e $\bar{T}$ avrà la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ mod $\bar{N}_{\bar{T}}$ e così $\bar{T}/\bar{N}_{\bar{T}} = \bar{L}/\bar{N}_{\bar{T}} \times \bar{F}/\bar{N}_{\bar{T}}$ ove $\bar{L}/\bar{N}_{\bar{T}}$ è un P-gruppo e fattore di Hall contenente $\bar{M}/\bar{N}_{\bar{T}}$; per 3.4 è $N_{\bar{T}} \lhd T$, per cui [23] $L/N_{\bar{T}}$ è un P-gruppo e fattore di Hall di $T/N_{\bar{T}}$, che contiene $M/N_{\bar{T}}$ e così il quoziente $M/N_{\bar{M}}$, che è un P-gruppo d'ordine rp. Poichè $N \lhd L$, sarà L/N un P-gruppo d'ordine $p^\beta r$, $\beta \geq 1$ e si avrà, essendo di Hall in T/N, che aN e bN vi sono contenuti, ove $M = \langle b, N \rangle$; ma allora $[a, b] \notin N$ una contraddizione. //

Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \lhd G$. Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ per 3.5 il gruppo periodico G/N ha una rappresentazione $G/N = R/N \times C/N$ ove $R/N_{\bar{R}}$ ed $\bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}}$ appartengono ad una medesima classe $P(n, p)$ di P-gruppi; il primo p ci converrà chiamare *un primo associato a σ ed N.*

Passiamo ora a dimostrare un teorema generale di struttura per una proiettività che non conserva la quasi-normalità di un sottogruppo normale.

TEOREMA D. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ ed $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$. Allora G/N è periodico e sono presenti i seguenti fatti:*

a) $G/N = R_1/N \times \ldots \times R_i/N \times \ldots \times \Gamma/N$ è un prodotto diretto (discreto) di fattori di Hall con $1 \leq i \leq \infty$, ove R_i/N è un gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i} r_i$, $r_i \leq p_i$, $0 \leq \alpha_i \leq \infty$ ed è un P-gruppo non appena $\alpha_i \geq 1$.

b) $R_i/N_{\bar{R}_i}$ è un P-gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} r_i$ con $[N : N_{\bar{R}_i}] = p_i$ $\bar{R}_i/\bar{N}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} q_i$, $q_i < p_i$ e $q_i = [\bar{N} : \bar{N}_{\bar{R}_i}]$.

c) Detto ϱ' l'insieme complementare nei primi dell'insieme $\varrho = \{r_i, p_i\}$. risulta Γ/N un ϱ'-gruppo. Per $i \neq j$ è $\{r_i, p_i\} \cap \{r_j, p_j\} = \emptyset$, $\{q_i, p_i\} \cap \{q_j, p_j\} = \emptyset$.

d) Posto $C_i/N = \Big(\bigvee\limits_{j \neq i} R_j/N\Big) \times \Gamma/N$, risulta $G/C_{i\bar{G}}$ isomorfo a $R_i/C_{i\bar{G}} \wedge N = N_{\bar{R}_i}$ ed è un P-gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} r_i$ mentre $\bar{G}/\bar{C}_{i\bar{G}}$ è isomorfo ad $\bar{R}_i/\bar{N}_{\bar{R}_i}$ ed è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} q_i$, $q_i < p_i$.

e) $\Gamma_{\bar{G}} = \bigwedge\limits_i C_{i\bar{G}}$ e $G/\Gamma_{\bar{G}}$ è isomorfo al prodotto diretto (discreto) $\tilde{\prod\limits_i} R_i/N_{\bar{R}_i}$ mentre $\bar{G}/\bar{\Gamma}_{\bar{G}}$ è isomorfo a $\tilde{\prod} \bar{R}_i/\bar{N}_{\bar{R}_i}$.

f) $\Gamma = \Gamma_{\bar{G}} N$, $\Gamma/\Gamma_{\bar{G}}$ è un gruppo abeliano localmente Hölderiano; inoltre $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{\Gamma}$, $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{G}} \underset{q}{\leq} \bar{G}$.

DIM. G/N è periodico per teorema B; sia $\pi = \{p_i\}_i$ l'insieme di tutti i primi associati a σ ed N. In corrispondenza ad ogni p_i abbiamo per 3.5 che $G/N = R_i/N \times C_i/N$ con $R_i/N_{\bar{R}_i} \in P(n_i, p_i)$ un fattore di Hall. Da qui non è difficile risalire ad una rappresentazione di G/N quale descritta in *a*). Le affermazioni *b*) e *c*) conseguono facilmente da 3.3, da 3.5 ed *a*), come pure la *d*), tenuto presente che in $G/N = R_i/N \times C_i/N$ è proprio $C_i/N = \Big(\bigvee\limits_{j \neq i} R_j/N\Big) \times \Gamma/N$. *e*) risulta $\Gamma = \bigwedge\limits_i C_i$ e così $\Gamma_{\bar{G}} = \bigwedge\limits_i C_{i\bar{G}} \lhd G$, e per semplicità possiamo assumere $\Gamma_{\bar{G}} = \{1\}$. Sarà $G'' = \{1\}$. Se $G' = \{1\}$ dovrà essere G periodico essendo $\bar{C}_i \underset{q}{\leq} \bar{G}$. Se $G' \neq \{1\}$ esiste un $C_i \geq G'$ ed essendo $\bar{C}_i \underset{q}{\leq} \bar{G}$ sarà G/G' periodico e $\bar{G}' \underset{q}{<} \bar{G}$ perchè altrimenti sarebbe normale essendo G/G' generabile mediante elementi d'ordine primo, ma allora $C_{i\bar{G}} \geq G'$ una contraddizione. Ma ora per teorema C è $G'/G'' = G'/\{1\}$ periodico e in definitiva $G/\Gamma_{\bar{G}}$ periodico. E la conclusione è ora non difficile in virtù di c) e d). f): abbiamo per 3.5 che $C_i = NC_{i\bar{G}}$ per cui $[C_i : C_{i\bar{G}}] = [N : N \wedge C_{i\bar{G}}] = p_i$ e così pure $\Gamma C_{i\bar{G}} = C_i$ perchè da $\Gamma \leq C_{i\bar{G}}$ si avrebbe $N \leq C_{i\bar{G}}$ un assurdo; dunque $[\Gamma : \Gamma \wedge C_{i\bar{G}}] = p_i$ e così, essendo $G/\Gamma_{\bar{G}}$ periodico, sarà $\Gamma / \bigwedge_i (\Gamma \wedge C_{i\bar{G}}) = \Gamma/\Gamma_{\bar{G}} \simeq \widetilde{\prod_i} \langle a_i \rangle$, $|a_i| = p_i$; ora Γ/N è un ϱ'-gruppo, $\Gamma/\Gamma_{\bar{G}}$ un ϱ-gruppo per cui $\Gamma = N\Gamma_{\bar{G}}$ e dunque anche $\Gamma/\Gamma_{\bar{G}} \simeq N/N \wedge \Gamma_{\bar{G}}$. Da come è definita sopra π, è chiaro che $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{\Gamma}$ e così da $\bar{\Gamma} = \bar{N}\bar{\Gamma}_{\bar{G}}$ si avrà pure $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{G}} \underset{q}{<} \bar{\Gamma}_{\bar{G}} \lhd \bar{G}$ per cui $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{G}} \underset{a}{\leq} \bar{G}$; ma essendo $N \wedge \Gamma_{\bar{G}} \lhd G$ è pure $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{G}} \underset{d}{<} \bar{G}$ e in definitiva $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{G}} \underset{q}{<} \bar{G}$. E questo conclude la dimostrazione del teorema. //

Se σ: $G \to \bar{G}$ è una proiettività e se $N \lhd G$, per 3.4 sappiamo che $N_{\bar{G}} \lhd G$, e dunque σ induce una proiettività del gruppo $G/N_{\bar{G}}$ sul gruppo $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$. Potremo pertanto pervenire a stabilire proprietà concernenti la struttura dei gruppi G e $\bar{G}$ modulo rispettivamente $N_{\bar{G}}$ ed $\bar{N}_{\bar{G}}$, investigando le proiettività σ: $G \to \bar{G}$ in cui il sottogruppo normale N soddisfa alla ulteriore ipotesi restrittiva che il cuore $\bar{N}_{\bar{G}}$ di $\bar{N}$ in $\bar{G}$ sia identico. Ciò oltretutto semplificherà sia la formulazione che la scrittura dei nostri risultati. Nella nostra analisi converrà esaminare separatamente i seguenti 2 casi:

G/N gruppo misto, G/N gruppo periodico.

3.6 Proposizione. *Sia* σ: $G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$, G/N *misto ed* $N_{\bar{G}} = \{1\}$. *Allora risulta:*

a) N *ed* $\bar{N}$ *sono gruppi residualmente ciclici finiti,*

b) $N^{\bar{G}}$ *ed* $\bar{N}^{\bar{G}}$ *sono gruppi nilpotenti di classe al più* 2.

Dim. *a*) In virtù di teorema B, per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$, $N/N \wedge N^{\bar{g}}$ e $\bar{N}/\bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}$ sono gruppi ciclici finiti, d'onde si conclude. *b*) ancora per teorema B $N^{\bar{G}}/N = \langle NN^{\bar{g}}/N | \bar{g} \in \bar{G} \rangle$ è generato da gruppi ciclici normali finiti, per cui $N^{\bar{G}}/N$ è periodico nilpotente di classe al più 2. Ne segue che $\gamma_3(N^{\bar{G}}) \leq N$ ed è $\gamma_3(N^{\bar{G}}) \lhd G$, essendo $N^{\bar{G}} \lhd G$ (3.4), per cui $\gamma_3(N^{\bar{G}}) \leq N_{\bar{G}} = \{1\}$. Un ragionamento analogo si applica ad $\bar{N}^{\bar{G}}$, tenuto presente che $\bar{N} \lhd a(\bar{N}) \lhd \bar{G}$ (teorema B). //

Per comodità chiameremo un gruppo $2'$-*abeliano* ($2'$-*modulare*) se e solo se è un gruppo finito nilpotente e il suo sottogruppo massimo d'ordine dispari è abeliano (modulare).

Ciò detto passiamo a provare la seguente

3.7 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $\{1\} \neq N \lhd G$, G/N *periodico ed* $N_{\bar{G}} = \{1\}$. *Allora valgono i seguenti fatti.*

a) N *è un gruppo residualmente* $2'$*-abeliano,*

b) $\bar{N}$ *è un gruppo residualmente* $2'$*-modulare,*

c) sia A *un insieme di elementi di* N *con ordini che dividono* p^n, p *un primo ed* $n \geq 1$. *Allora* $\langle A \rangle$ *è un gruppo periodico di esponente divisore di* p^n; $\langle A \rangle$ *è nilpotente e* $\mathrm{cl}\,\langle A \rangle \leq n$ *se* $p = 2$ *mentre* $\mathrm{cl}\,\langle A \rangle = 1$ *se* $p \neq 2$,

d) sia $\bar{A}$ *un insieme di elementi di* $\bar{N}$ *con ordini che dividono* p^n. *Allora* $\langle \bar{A} \rangle$ *è un gruppo periodico di esponente divisore di* p^n; $\langle \bar{A} \rangle$ *è modulare nilpotente con* $\mathrm{cl}\,\langle \bar{A} \rangle \leq n$ (*e serie derivata di lunghezza* ≤ 2) *se* $p \neq 2$,

e) N *ed* $\bar{N}$ *sono gruppi separati con parte periodica localmente nilpotente.*

DIM. Possiamo supporre $G = \langle N, g \rangle$ e sarà $[G:N] < \infty$; nè sarà restrittivo supporre G/N un p-gruppo (ciclico) (cf. ad es. [6]). Ma allora o G è un P-gruppo oppure G è un p-gruppo. Alle varie conclusioni ora si perviene usando lemma 3.1 in [5], il teorema in [6], il teorema al n. 4 e la proposizione al n. 5 in [7] e tenendo anche presente che un p-gruppo finito modulare di esponente p^n ha classe $\leq n$.

TEOREMA E. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$, $N_{\bar{G}} = \{1\}$, N *periodico ed* $\bar{N} \leq_q \bar{G}$. *Allora* G *è periodico e risulta*

a_1) $G = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times K$ *è un prodotto diretto* (*discreto*) *di sottogruppi di Hall di* G, $1 \leq i \leq \infty$, *con* P_i *un* P*-gruppo d'ordine* $p_i^{\alpha_i} r_i$, $r_i \leq p_i$, $1 \leq \alpha_i \leq \infty$,

a_2) $\bar{G} = \bar{P}_1 \times \ldots \times \bar{P}_i \times \ldots \times \bar{K}$ *è un prodotto diretto* (*discreto*) *di sottogruppi di Hall di* $\bar{G}$, *con* $\bar{P}_i$ *un* P*-gruppo* (*non abeliano*) *d'ordine* $p_i^{\alpha_i} q_i$, $q_i < p_i$,

b_1) $N = Q_1 \times \ldots \times Q_i \times \ldots \times N \wedge K$ *ove* $[N \wedge P_i = Q_i : \{1\}] = p_i$,

b_2) $\bar{N} = \bar{Q}_1 \times \ldots \times \bar{Q}_i \times \ldots \times \bar{N} \wedge \bar{K}$, $[\bar{Q}_i : \{1\}] = q_i$, $\bar{P}_i = \bar{Q}_i^{\bar{G}} = \bar{Q}_i^{\bar{P}_i}$, $\bar{N} \wedge \bar{K} \leq_q \bar{G}$, $\bar{N} \leq_q \bar{N}\bar{K}$,

c_1) $N^{\bar{G}} = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times (N \wedge K)^{K}$,

c_2) $\bar{N}^{\bar{G}} = \bar{P}_1 \times \ldots \times \bar{P}_i \times \ldots \times (\bar{N} \wedge \bar{K})^{\bar{K}}$, *d*) *$N$ ed $\bar{N}$ soddisfano alle condizioni a*), *b*), *c*) *e d*) *di* 3.7.

Dim. Poichè $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$, G/N è periodico per teorema B. Ne segue che G e $\bar{G}$ sono periodici ed è pure $\bar{N} \underset{a}{\leq} \bar{G}$; da 3.7 *e*) e 3.2 segue poi facilmente che $\bar{N}^{\bar{G}}$ è localmente finito. A questo punto il ragionamento usato nella dimostrazione del theorem E in [20] ci dice che $\bar{G}$ ha la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ modulo $\bar{N}_{\bar{G}} = \{1\}$. Dunque, tenendo conto della definizione di Schmidt-struttura e della osservazione 3 per il gruppo $\bar{G}$ si ha la rappresentazione quale descritta in a_2), b_2) e c_2). Se ora si usano note proprietà dei P-gruppi e sui prodotti diretti di Hall in relazione alle proiettività [22], si risale facilmente ad a_1), b_1) e c_1), osservando anche che $Q_i = N \wedge P_i \lhd P_i$ e dunque $[Q_i : \{1\}] = p_i$. La *d*) è poi il contenuto ripetuto di 3.7. //

Osservazione 4. Se nel teorema E l'ipotesi N periodico sia conseguenza delle altre è un problema aperto. ([3]) Certo così sarebbe se il theorem in [6] valesse anche per $p = 2$ in forma eventualmente anche più debole che cioè la lunghezza della serie derivata di H (in quelle notazioni) sia maggiorata da una costante; perchè allora per *d*) N sarebbe risolubile e si concluderebbe usando teorema C. N è pure periodico nel caso che l'insieme degli esponenti dei 2-gruppi di G/N sia superiormente limitato; perchè allora per *d*), N è nilpotente e dunque $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ se N è misto (teorema C). Vogliamo ancora osservare che se esiste un p-elemento a in N con $p \in \pi$ (cf. teorema D), essendo N residualmente finito, esista un $H \geq N$ con H/N finitamente generato e $\langle a \rangle \wedge N_{\bar{H}} = \{1\}$; ma il p-Sylow di $N/N_{\bar{H}}$ ha ordine p per cui $\langle a N_{\bar{H}} \rangle$ è il p-Sylow ed essendo $a \in \mathfrak{T}(N)$ se N è misto, σ su $\mathfrak{T}(N)$ conserva gli indici, una contraddizione.

Osservazione 5. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \lhd G$. Seguendo i ragionamenti usati in [20] e tenendo presente i risultati finora conseguiti, in particolare teorema B, 3.2 e teorema E, il lettore non avrà difficoltà a convincersi che senza ulteriore ipotesi valgono per $N^{\bar{G}}/N_{\bar{G}}$ ed $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ le affermazioni contenute in theorem F_1 ed F_2, per $\bar{N}$ quelle contenute in theorem 4.6 e 4.7, dove per teorema C, $\bar{N}/\bar{N}'$ è periodico, e quelle del theorem G concernente il gruppo di automorfismi indotto da $\bar{G}$ in $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ di [20].

Dal teorema D si vede che se $\sigma\colon G \to \bar{G}$ è una proiettività e se $N \lhd G$, allora sono equivalenti le affermazioni: i) $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$, ii) $\bar{N} \underset{a}{\leq} \bar{G}$,

([3]) Vedi (∗∗).

iii) esiste un $R \lhd G$ con $G/R \in P(n, p)$, $2 \leq n \leq \infty$, $\bar{R} \lhd \bar{G}$, $[N : N \wedge \wedge R] = p$, $[\bar{N} : \bar{N} \wedge \bar{R}] = q < p$. Vogliamo ora far vedere come i), ii) e iii) sono equivalenti se $N \underset{q}{<} G$ come pure ii) è equivalente a iii) dopo aver indebolita la condizione $N \lhd G$ a quella $N \underset{a}{\leq} G$. Premettiamo alcune proposizioni di carettere piuttosto tecnico.

3.8 Proposizione. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, $K \lhd N \lhd G$, $\bar{K} \lhd \bar{N}$, $N/K \in P(n, p)$, $2 \leq n \leq \infty$ e σ singolare a p. Allora per ogni $X \lhd N$ e $K \leq X$ è $X \lhd G$.*

Dim. In virtù di 1.3 esiste $K_0 \leq K$, K_0 L-invariante in N, per cui $K_0 \lhd G$ ed $N/K_0 \in P(*, p)$. Per la singolarità a p esiste un $g \in N$ tale che $[\langle g, K\rangle : K] = p$ mentre $[\langle g, K\rangle^\sigma : \bar{K}] = q < p$. Sia ora $K_0 < T \leq N$ con $[T : K_0] = p^\beta$, $0 < \beta \neq \infty$, $g \in T$ e sia x un elemento di G; posto $H = \langle T, x\rangle$, è $[H : K_0] < \infty$ dovendo essere per 2.9 G/N periodico e $\langle N, x\rangle/K_0$ dunque localmente finito e così per 3.4 σ: $H/K_{0\bar{H}} \to \bar{H}/\bar{K}_{0\bar{H}}$ è una proiettività tra gruppi finiti. È $K_{0\bar{H}} \leq K_0 \leq \langle g, K_0\rangle \leq H$ per cui σ ha una singolarità a p su $H/K_{0\bar{H}}$. Distinguiamo le due possibilità:

a) σ ha una singolarità di prima specia a p.

Detto $S/K_{0\bar{H}}$ un p-Sylow di $H/K_{0\bar{H}}$, esso ha complemento normale $C/K_{0\bar{H}}$ in $H/K_{0\bar{H}}$ [22] per cui si avrà $H/K_0 = SK_0/K_0 \vee CK_0/K_0$ ove SK_0/K_0 è un p-Sylow e CK_0/K_0 un suo complemento normale in H/K_0. Sia R/K_0 il p-Sylow di N/K_0; è $R \lhd G$ per cui $R \wedge H \lhd H$ e da $K_0 < < T \leq R \wedge H$ segue $R \wedge H/K_0 \times CK_0/K_0$; ne segue $L^x = L$ per ogni $K_0 \leq L \leq T$.

b) σ ha una singolarità di seconda specie a p.

Risulta $H/K_{0\bar{H}} = P/K_{0\bar{H}} \times C/K_{0\bar{H}}$ [22], per cui ogni p-sottogruppo di H/K_0 è normale in H/K_0, quindi di nuovo $L^x = L$ se $K_0 \leq L \leq T$.

Per l'arbitrarietà di $x \in G$ si conclude $L \lhd G$; ora ogni $X/K_0 \lhd N/K_0$ si esaurisce con gruppi L/K_0 quali considerati, per cui $X \lhd G$. //

3.9 Proposizione *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, $K \lhd N \lhd G$, N/K un P-gruppo d'ordine $p^\alpha r^\gamma$, $1 \leq \alpha \leq \infty$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $r < p$, $\bar{K} \lhd \bar{N}$ e σ: $N/K \to \bar{N}/\bar{K}$ singolare a p. Allora esiste un $K_1 \lhd G$, $K \leq K_1$, G/K_1 un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha_1} r^{\gamma_1}$, $\alpha \leq \alpha_1$, $\gamma \leq \gamma_1 \leq 1$ e l'omomorfismo canonico π: $G \to G/K_1$ subordina un monomorfismo su N/K. Inoltre $\bar{K}_1 \lhd \bar{G}$ ed esiste un $g \in N$ tale che*

$$[\langle g, K\rangle : K] = [\langle g, K_1\rangle : K_1] = p\ ,\ [\langle g, K\rangle^\sigma : \bar{K}] = [\langle g, K_1\rangle^\sigma : \bar{K}_1] = q < p\ .$$

Dim. Esiste un $K \lessdot T < N$ con $[T:K] = p$ mentre $[\overline{T}:\overline{K}] = q < p$; posto $T = \langle K, g \rangle$, $\langle \overline{g} \rangle = \langle g \rangle^{\sigma}$, sarà $\overline{T} = \langle \overline{g}, \overline{K} \rangle$, $g^p \in K$, $\overline{g}^q \in \overline{K}$. Per 3.8 è poi $T \lhd G$. Consideriamo ora il gruppo G/T; poichè $\overline{T} \underset{q}{\leq} \overline{N}$ sarà $\overline{T} \underset{q}{\leq} \overline{G}$. Così per 3.5 si avrà $G/T = R/T \times C/T$ ove $K \lessdot T < N \leq R$ ed è $K = T_{\overline{N}} = T_{\overline{R}}$ visto che $\overline{K} \lhd \overline{N}$; ancora è $R \wedge C = T$ e $\overline{T} \underset{q}{\leq} \overline{R}$ per cui $\overline{C} \ntriangleleft \overline{G}$ e così per 1.3 sarà $G \rhd C_{\overline{G}} = C_{\overline{R}} \geq R_{\overline{R}} \wedge C_{\overline{R}} = R \wedge C_{\overline{R}} = T_{\overline{R}} = K$; è $g \notin C_{\overline{G}} = K_1$ perchè altrimenti $g \in R \wedge C_{\overline{G}} = K$ una contraddizione. Ora $G/K_1 \simeq R/K \geq N/K$ (cf. formula (4) nella dim. di 3.5), il monomorfismo essendo indotto dalla restrizione di π: $G \to G/K_1$ su R/K per cui $N^{\pi}/K^{\pi} \simeq N/K$. E la conclusione è ora facile. //

3.10 Proposizione. *Sia σ: $G \to \overline{G}$ una proiettività e sia $\{N_{\beta}\}_{0 \leqq \beta \leqq \mu}$ una catena normale ascendente da N a G. Supponiamo che sia $K \lhd N$ e N/K un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha_0} r^{\gamma_0}$, $1 \leq \alpha_0 \leq \infty$, $0 \leq \gamma_0 \leq 1$, $r < p$, $\overline{K} \lhd \overline{N}$ e σ singolare a p su N/K.*

Allora per ogni β con $0 \leq \beta \leq \mu$, esiste un sottogruppo K_{β} di G soddisfacente alle seguenti condizioni:

i) *se $0 \leq \delta \leq \beta$ allora $K = K_0 \leq K_{\delta} \leq K_{\beta}$,*

ii) *$K_{\beta} \lhd N_{\beta}$, N_{β}/K_{β} è un P-gruppo relativo a p e se $\delta \leq \beta$ l'omomorfismo canonico π_{β}: $N_{\beta} \to N_{\beta}/K_{\beta}$ induce un monomorfismo su N_{δ}/K_{δ},*

iii) *$\overline{K}_{\beta} \lhd \overline{N}_{\beta}$, σ è singolare a p su N_{β}/K_{β}.*

Dim. Per la dimostrazione usiamo induzione transfinita su β.

Per $\beta = 0$, il gruppo $K_0 = K$ soddisfa evidentemente alle tre condizioni i), ii), iii). Sia ora $\beta > 0$; supponiamo vera la proposizione per ogni $0 \leq \delta < \beta$ e proviamo che di conseguenza la proposizione è vera per β. Distinguiamo 2 casi.

a) β non è ordinale limite.

Posto $\varrho = \beta - 1$, per ipotesi induttiva esiste un $K_{\varrho} \leq G$ soddisfacente alle condizioni i), ii) e iii). Usando 3.9 possiamo affermare che a partire da K_{ϱ} esiste un $K_{\beta} \leq G$ tale che $K_{\varrho} \leq K_{\beta} \lhd N_{\beta}$ soddisfacente ad i), alla prima parte di ii) e alla iii). Per completare sia $\delta \leq \varrho < \beta$ e $xK_{\delta} \neq yK_{\delta}$ due elementi distinti di N_{δ}/K_{δ}; allora per ipotesi induttiva è $xK_{\varrho} \neq yK_{\varrho}$ e dunque per 3.9 è pure $xK_{\beta} \neq yK_{\beta}$.

b) β è un ordinale limite.

Risulta $N_{\beta} = \bigcup_{\varrho < \beta} N_{\varrho}$ e poichè $K_{\delta_1} \leq K_{\delta_2}$ se $\delta_1 \leq \delta_2 < \beta$, posto $K_{\beta} = \bigcup_{\varrho < \beta} K_{\varrho}$, sarà $K_{\beta} \leq G$. Esaminiamo in ordine le proprietà di K_{β}.

i): è ovviamente vera.

ii): è $K_\beta \leq N_\beta$ ed anzi $K_\beta \lhd N_\beta$: sia infatti $t \in K_\beta$ ed $x \in N_\beta$; allora esistono β', β'' con $\beta' < \beta, \beta'' < \beta$ tali che $t \in K_{\beta'}$ ed $x \in N_{\beta''}$; se $\beta' \leq \beta''$ allora $t \in K_{\beta''} \lhd N_{\beta''}$ per cui $t^x \in K_\beta$; se $\beta'' < \beta'$ sarà $x \in N_{\beta'}$, $t \in K_{\beta'} \lhd N_{\beta'}$ per cui di nuovo $t^x \in K_\beta$. Consideriamo l'omomorfismo canonico π_β: $N_\beta \to N_\beta/K_\beta$ e sia $\delta < \beta$; siano $xK_\delta \neq yK_\delta$ e $xK_\beta = yK_\beta$: sarà $y = xz$ con $z \in K_{\delta_0}$ $\delta_0 < \beta$ per cui $xK_{\delta_0} = yK_{\delta_0}$ e così $\delta < \delta_0$; ora l'omomorfismo canonico π_{δ_0}: $N_{\delta_0} \to N_{\delta_0}/K_{\delta_0}$, induce, per ipotesi induttiva un monomorfismo su N_δ/K_δ per cui $xK_{\delta_0} \neq yK_{\delta_0}$, una contraddizione. Pertanto π_β induce un monomorfismo su N_δ/K_δ per $\delta < \beta$, e poichè N_δ/K_δ è un P-gruppo, $N_\beta/K_\beta = \bigcup_{\delta<\beta} N_\delta K_\beta/K_\beta$ è un elemento di $P(m, p)$ con $\alpha_0 \leq m$.

iii): è per $\delta < \beta$, $\bar K_\delta \lhd \bar N_\delta$ per cui $\bar K_{\bar\delta} = \bigcup_{\delta<\beta} \bar K_\delta \lhd \bar N_\beta = \bigcup_{\delta<\beta} \bar N_\delta$. Infine sia $N \geqslant M = \langle g, K_0 \rangle$ con $[M : K_0] = p$ ed $[\bar M : \bar K_0] = q < p$. Posto $\langle \bar g \rangle = \langle g \rangle^\sigma$, sarà $g^p \in K_0$, $\bar g^q \in \bar K_0$ e poichè π_β è un monomorfismo su N_0/K_0 sarà $g \notin K_\beta$, $g^p \in K_\beta$, $\bar g \notin \bar K_\beta$, $\bar g^q \in \bar K_\beta$, e la conclusione è ora facile. //

TEOREMA F. *Sia σ: $G \to \bar G$ una proiettività ed $N \underset{a}{\leq} G$. Allora $\bar N \underset{\bar a}{\leq} \bar G$ se e solo se esiste un $R \lhd G$ tale che $G/R \in P(n, p)$, $\bar R \lhd \bar G$, $[N : N \wedge R] = p$, $[\bar N : \bar N \wedge \bar R] = q < p$.*

DIM. Sufficienza. Nel gruppo $\bar G/\bar R \in P(n, p)$, $\bar N \bar R/\bar R$ $(\simeq \bar N/\bar N \wedge \bar R)$ è un sottogruppo d'ordine $q < p$ per cui $\bar N \bar R \underset{\bar a}{\leq} \bar G$ e poichè $\bar R \lhd \bar G$ non può neppure essere $\bar N$ ascendente in $\bar G$.

Necessità. Sia $\{N_\beta\}_{0 \leqq \beta \leqq \mu}$ una catena normale ascendente da N a G. Poniamo $A = \{\alpha \leq \mu | \bar N \underset{\bar a}{\leq} \bar N_\alpha\}$; da $\bar N \underset{\bar a}{\leq} \bar G$ segue $\mu \in A$ e così $A \neq \emptyset$; sia β il minimo di A; sarà $\beta > 0$ e per $\delta < \beta$ è $\bar N \underset{a}{\leq} \bar N_\delta$ per cui β non può essere un ordinale limite. Ora $N_{\beta-1} \lhd N_\beta$ e se fosse $\bar N_{\beta-1} \underset{q}{\leq} \bar N_\beta$ sarebbe $\bar N \underset{a}{\leq} \bar N_\beta$, una contraddizione. Pertanto $\bar N_{\beta-1} \underset{\bar q}{\leq} \bar N_\beta$; in base al teorema D (le veci di N assume ora $N_{\beta-1}$ e quelle di G il gruppo N_β) esiste un naturale i tale che $N_{\beta-1} \leq C_i \lhd N_\beta$ e con $C_{i\bar N_\beta} \wedge \wedge N < N$: infatti altrimenti $\Gamma_{\bar N_\beta} \geq N$ e così $N \leq N_{\beta-1} \wedge \Gamma_{\bar N_\beta}$ e dunque $\bar N \underset{a}{\leq} \bar\Gamma_{\bar N_\beta} \wedge \bar N_{\beta-1} \underset{q}{\leq} \bar N_\beta$ ossia $\bar N \underset{a}{\leq} \bar N_\beta$ una contraddizione. Dunque $C_i \geq N$ e $K = C_{i\bar N_\beta} \ngeq N$; ora $[C_i : K] = p_i (= p)$ per cui $C_i = KN = KN_{\beta-1}$; $\bar C_i = \bar K \bar N = \bar K \bar N_{\beta-1}$ per cui $[N : N \wedge K] = [C_i : K] = p$ mentre $[\bar N : \bar N \wedge \wedge \bar K] = [\bar C_i : \bar K] = q < p$. Usando ora 3.10 esiste un $R = K_\mu \lhd G$ tale che $R \wedge N_\beta = K$ per cui $R \wedge N = (R \wedge N_\beta) \wedge N = K \wedge N$ e dunque $[N : : N \wedge R] = p$ mentre $[\bar N : \bar N \wedge \bar R] = [\bar N : \bar N \wedge \bar K] = q < p$; è ancora $\bar R \lhd \bar G$, $G/R \in P(n, p)$. //

OSSERVAZIONE 6. Sia ora $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività ed $N \underset{q}{<} G$. Sarà $\overline{N} \underset{a}{<} \overline{G}$ e se $\overline{N} \underset{\overline{q}}{\leq} \overline{G}$ dovrà essere $\overline{N} \underset{\overline{a}}{\leq} \overline{G}$ [19] e il viceversa è noto [18]. Se poi $N \underset{a}{\leq} G$, teorema F ci dice che ii) e iii) a pag. 63 sono equivalenti.

Terminiamo il presente numero mettendo in evidenza alcuni interessanti corollari.

3.11 COROLLARIO. *Sia $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività. Allora G è semplice se e solo se tale è $\overline{G}$.*

Dim. Da $\{1\} \neq \overline{N} \underset{\neq}{\lhd} \overline{G}$ segue per teorema D che $N \underset{!q}{<} G$ essendo G perfetto; ma allora G non è semplice [18].

3.12 COROLLARIO. *Sia $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G/N un gruppo privo di sottogruppi normali nilpotenti non banali. Allora $\overline{N} \lhd \overline{G}$.*

DIM. Sia $\overline{N} \ntriangleleft \overline{G}$; esiste un $\bar{g} \in \overline{G}$ con $N^{g} \vee N > N$; per teorema D deve essere $N^{g} \underset{q}{<} G$ e così $N \vee N^{g}/N$ è un sottogruppo ciclico finito (teorema B) non identico e quasinormale di G/N; ciò basta per dire [2] che G/N contiene un sottogruppo nilpotente normale non identico. //

Facciamo qualche ulteriore considerazione. All'uopo sia, di nuovo, $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività ed $N \underset{a}{\leq} G$. Se $\overline{N} \underset{\overline{a}}{\leq} \overline{G}$ per il teorema F esiste un $R \lhd G$ tale che $\overline{R} \lhd \overline{G}$, $G/R \in P(*, p)$ e σ ha una singolarità a p su G/R. Definiamo il seguente insieme π di numeri primi: $p \in \pi$ se e solo se esiste un $K \lhd G$ con $\overline{K} \lhd \overline{G}$, $G/K \in P(n, p)$ e σ è singolare a p su G/K. Per ogni $p \in \pi$ consideriamo il gruppo K_p quale definito in 1.3 v) e poniamo $\mathcal{K} = \bigwedge_p K_p$. Il gruppo $\mathcal{K}$ è un sottogruppo L-invariante univocamente definito da σ e usando le considerazioni in teorema D e) si vede che $G/\mathcal{K}$ è un prodotto diretto (discreto) di P-gruppi di Hall e su ciascun fattore H σ presenta una singolarità a p se $H \in P(*, p)$; essendo $G/\mathcal{K}$ e $\overline{G}/\overline{\mathcal{K}}$ metabeliano sarà $G'' \leq \mathcal{K}$ e $\overline{G}'' \leq \overline{\mathcal{K}}$. Usando teorema D e 3.10 è non difficile vedere che $\overline{N} \underset{a}{\leq} \overline{N}\overline{\mathcal{K}}$ (4) e dunque pure $\overline{N} \wedge \overline{\mathcal{K}} \underset{a}{<} \overline{\mathcal{K}} \lhd \overline{G}$. Quanto detto ci porta a formulare questo altro interessante

3.13 COROLLARIO. *Sia $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività ed $N \leq G$*

(4) Devo ad una gentile comunicazione scritta di Rips una simile osservazione.

i) *se* $N \underset{a}{\leq} G$ *allora* $\bar{N} \underset{a}{\leq} \bar{N} \vee (G'')^\sigma \vee \bar{G}''$, *mentre* $\bar{N} \wedge (G'')^\sigma$, $\bar{N} \wedge \bar{G}''$ *e* $\bar{N} \wedge (G'')^\sigma \wedge \bar{G}''$ *sono ascendenti in* $\bar{G}$,

ii) *se* $N \underset{q}{<} G$ *allora* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{N} \vee (G'')^\sigma \vee \bar{G}''$ *mentre se* $N \lhd G$ *è* $\bar{N} \wedge \wedge (G'')^\sigma \underset{q}{<} \bar{G}$.

Osservazione 7. La 3.13 in particolare ci dice che se G o $\bar{G}$ è perfetto allora σ e σ^{-1} preservano la quasi-normalità. Sfruttando tale fatto Napolitani [8] ha provato recentemente che la classe dei gruppi perfetti è proiettivamente invariante e che $S^\sigma(G) = S(G^\sigma)$ qualora $S(G) = \bigwedge_\alpha G^{(\alpha)}$ ove $\{G^{(\alpha)}\}_\alpha$ è la serie transfinita dei derivati successivi di G. Se G/N è finito, σ: $G/N_{\bar{G}} \to \bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è una proiettività tra gruppi finiti ed allora si sa [22] che se G/N è perfetta risulta $\bar{N} \lhd \bar{G}$; se la cosa sia vera anche se G/N non è finito non ci è noto; per 3.12 possiamo certo affermare che $\bar{Z} \lhd \bar{G}$ se Z/N è il centro di G/N visto che G/Z è privo di sottogruppi nilpotenti normali.

4. Le considerazioni che svolgeremo nel presente numero intendono principalmente estendere ai gruppi infiniti diverse affermazioni contenute in [15] e [16].

4.1 Lemma. *Sia* G *un gruppo,* $M \underset{q}{<} G$, $|M| = p$, *un primo, ed* $M_G = \{1\}$. *Allora valgono i seguenti fatti*: i) M^G *è un* p*-gruppo abeliano elementare non ciclico ed* $M^G \leq \operatorname{Norm} G \leq Z_2(G)$; ii) $M^G = M \times \times M^G \wedge \Omega(Z(G))$ (5); iii) *se* $x \in G - \mathrm{C}(M)$, *allora* $\langle x \rangle \wedge Z(G) \wedge M^G \neq \{1\}$ *ed è* $\mathrm{C}(M) = \mathrm{C}(M^G)$; iv) $G/\mathrm{C}(M)$ *è* p*-abeliano elementare e* $G - \mathrm{C}(M)$ *è formato da elementi periodici a* p*-componente non identica.*

Dim. i) Per 1.3 in [2] è $M^G \leq \mathrm{C}\langle x \in G \mid |x| = 0$ o x un p'-elemento$\rangle$; se poi x è un p-elemento di G è $\langle x \rangle \leqq\cdot \langle M, x \rangle$ per cui $M \leq \mathcal{N}\langle x \rangle$, sicchè $M \leq \bigwedge_{X \leqslant G} \mathcal{N}(X) = \operatorname{Norm} G \leq Z_2(G)$; ii) per i) è $MZ(G) \lhd G$ e così $MZ(G) = M^G Z(G)$ per cui $M^G = M^G \wedge (MZ(G)) = M \times (M^G \wedge Z(G))$ iii) è $[G', Z_2] = \{1\}$ per cui $[M, G'] = \{1\}$ e così $G' \leq \mathrm{C}(M) \lhd G$ e dunque anche $\mathrm{C}(M) = \mathrm{C}^g(M) = \mathrm{C}(M^g)$ per cui $\mathrm{C}(M) = \mathrm{C}(M^G)$; ora $\langle x \rangle \wedge M^G = \{1\}$ implica $\langle x \rangle \times M^G$ visto che $\mathcal{N}\langle x \rangle \geq M^G$ e così $x \in \mathrm{C}(M)$; se $\langle x \rangle \wedge M^G \wedge \Omega(Z(G)) = \{1\}$ allora per ii) è $M^G = (\langle x \rangle \wedge M^G) \times (M^G \wedge \wedge \Omega(Z(G)))$ visto che $\langle x \rangle \wedge M^G \neq \{1\}$ e dunque $M^G \leq \mathrm{C}(x)$ una contraddizione; iv) sia $M = \langle a \rangle$; per i) è $[x, a] = z \in Z(G)$ per cui $a^x = az$, $z \in \Omega(Z(G))$ per cui $a^{x^p} = az^p = a$, ossia $x^p \in \mathrm{C}(M)$ e dunque il gruppo

(5) $\Omega(Z(G))$ è il gruppo generato dagli elementi d'ordine primo di $Z(G)$.

abeliano $G/\mathfrak{C}(M)$ è p-abeliano elementare per iii) ed i) ogni $x \in G -$ $- \mathfrak{C}(M)$ è periodico con ordine divisibile per p. //

4.2 PROPOSIZIONE. *Sia $\sigma\colon G \to \overline{G}$ una proiettività. Allora*

$$\Omega^\sigma\big(Z(G)\big) \lhd \overline{G}\,.$$

DIM. Sia $\Omega_p\big(Z(G)\big)$ una componente p-primaria di $\Omega\big(Z(G)\big)$ e distinguiamo 3 casi:

a) $N^\tau \lhd G$ per ogni $\{1\} < N \leq \Omega\big(Z(G)\big)$ ed ogni $\tau \in P(G)$.

Da $N^\tau \lhd G$ segue che $N^\tau \leq Z(G)$ e dunque $\big(\Omega_p^\sigma(Z(G))\big)^{\bar{g}} \leq \Omega^\sigma\big(Z(G)\big)$ per ogni $\bar{g} \in \overline{G}$.

b) Esiste un $\tau \in P(G)$ ed un $\{1\} < N \leq \Omega_p\big(Z(G)\big)$ tale che $N^\tau \underset{q}{<} G$ e $N^\tau \not\lhd G$.

Posto $M = N^\tau$, sia $q = |M| \neq p$. Detto S un p-Sylow di G, sarà $N \leq S$ e poichè per ogni $x \in S$ da $|\langle N, x\rangle| \neq |\langle N, x\rangle^\tau|$ e $N^\tau \underset{q}{<} G$ segue che $\langle N, x\rangle$ è ciclico, S è necessariamente uno $Z(p^\alpha)$-gruppo $1 \leq \alpha \leq \infty$; ciò comporta che $N^\tau \lhd S^\tau$ e dunque $N^\tau \lhd G$ contro ipotesi. Si ha dunque $|M| = p = |N|$. Per ogni p-elemento x di $G - \mathfrak{C}(M)$ è $\Omega\big(Z(G)\big) =$ $= \Omega\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big)$: infatti da $\Omega\big(Z(G)\big) \leq \Omega\big(Z(G)\big) \vee \langle x\rangle$ segue $\Omega\big(Z(G)\big) \leq$ $\leq \Omega\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big)$; sia $y \in \Omega\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big)$ e possiamo supporre y d'ordine primo q; se $q \neq p$, poichè x è un p-elemento, sarà $y \in \Omega\big(Z(G)\big)$; se poi $q = p$ da $y = zx^r$ con $[z, x] = 1$ e $z^p = 1$ si ha $1 = y^p =$ $= z^p x^{rp} = x^{rp}$ per cui $|x^r| \leq p$ e così per 4.1 iii) è $x^r \in \langle x\rangle \wedge \Omega\big(Z(G)\big)$ e infine $y \in \Omega\big(Z(G)\big)$. Pertanto si ha $\Omega^\sigma\big(Z(G)\big) = \Omega^\sigma\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big) =$ $= \Omega\big(\Omega^\sigma(Z(G)) \vee \langle x\rangle^\sigma\big) \lhd \Omega^\sigma\big(Z(G)\big) \vee \langle x\rangle^\sigma$; $\Omega_p^\sigma\big(Z(G)\big)$ è centralizzato da $\langle g\rangle^\sigma$ se $|g| = 0$ o p'-elemento; per $x \in G - \mathfrak{C}(M)$ scomposto $\langle x\rangle =$ $= \langle x_p\rangle \times \langle x'\rangle$, $\langle x_p\rangle$ la p-componente, da $\Omega_p^\sigma\big(Z(G)\big) \underset{c}{<} \Omega^\sigma\big(Z(G)\big)$ segue che $\Omega_p^\sigma\big(Z(G)\big)$ è normalizzato da $\langle x_p\rangle^\sigma$ e centralizzato da $\langle x'\rangle^\sigma$ per cui $\langle x\rangle^\sigma$ normalizza $\Omega_p^\sigma\big(Z(G)\big)$; ma $\bigvee_{x \in G - \mathfrak{C}(M)} \langle x\rangle = G$ per cui $\Omega_p^\sigma\big(Z(G)\big) \lhd \overline{G}$.

c) Esiste un $\{1\} < N \leq \Omega\big(Z(G)\big)$ e un $\tau \in P(G)$ con $N^\tau \underset{q}{<} G$.

Posto $G^\tau = \overline{G}$, in virtù del teorema E è $G = \overline{G} = (N^\tau)^{\overline{G}} \times T$ con $(N^\tau)^{\overline{G}} = P$ un P-gruppo e fattore di Hall di $\overline{G} = G$; ne segue che P è L-invariante per cui $N \leq P$ e così P è abeliano elementare essendo $N \leq Z(P)$; ma allora $N^\tau \lhd G$, una contraddizione.

Per *a*) e *b*) abbiamo dunque che per ogni $\bar{g} \in \overline{G}$, $\big(\Omega_p^\sigma(Z(G)\big)^{\bar{g}} \leq$ $\leq \Omega^\sigma\big(Z(G)\big)$ e da qui $\big(\Omega^\sigma(Z(G))\big)^{\bar{g}} = \big(\bigvee_p \Omega_p^\sigma(Z(G))\big)^{\bar{g}} = \bigvee_p \big(\Omega_p^\sigma(Z(G))\big)^{\bar{g}} \leq$ $\leq \Omega^\sigma\big(Z(G)\big)$ ossia $\Omega^\sigma\big(Z(G)\big) \lhd \overline{G}$. //

4.3 Teorema. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* N *un sottogruppo normale d'ordine primo* p. *Allora una ed una sola delle seguenti circostanze è presente*: i) $\bar{N} \lhd \bar{G}$, ii) $N^{\bar G} \leq \Omega(Z(G))$ *e* $\bar{N}^{\bar G} = \bar{N} \times \left(\bar{N}^{\bar G} \wedge \Omega(Z(\bar{G}))\right) \leq Z_2(\bar{G})$ *con* $\bar{N}^{\bar G}$ *p-gruppo abeliano elementare non ciclico isomorfo ad* $N^{\bar G}$, iii) $G = (P = N^{\bar G}) \times T$, $\bar{G} = \bar{P} \times \bar{T}$, G *e* $\bar{G}$ *periodici*, P, $\bar{P}$ *in* $P(n, p)$, $2 \leq n \leq \infty$ *e fattori di Hall*, $\bar{P}$ *non abeliano e* σ *singolare a* p *su* P.

Dim. Sia $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$. Se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$, per 4.1 è $\bar{N}^{\bar G} = \bar{N} \times \bar{N}^{\bar G} \wedge \Omega(Z(\bar{G})) \leq Z_2(\bar{G})$. Sia $q = |\bar{N}|$; per 1.3 in [2] esiste un q-elemento $\bar{x} \in \bar{G}$ con $\bar{x} \notin \mathcal{N}(\bar{N})$; pertanto [22] $|\langle \bar{N}, \bar{x} \rangle| = |\langle \bar{N}, \bar{x} \rangle^{\sigma^{-1}}|$ sicchè $q = |\bar{N}| = |N| = p$. Se ora $|x| = 0$ o p'-elemento, per 1.3 in [2] sarà $\langle x \rangle^{\sigma} \times \bar{N}$ e così $\langle x \rangle \times N$ per cui $N \leq Z(G)$. Abbiamo così $N \leq \Omega(Z(G))$ e dunque per 4.2 sarà $P = N^{\bar G} \leq \Omega(Z(G))$ e $\bar{P} = \bar{N}^{\bar G}$ p-abeliano elementare per cui $P \simeq \bar{P}$. Se poi $\bar{N} \underset{\bar q}{\leq} \bar{G}$, si usi teorema E per concludere. //

Osservazione 8. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un sottogruppo normale minimo di G. Se $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$, N è necessariamente p-abeliano elementare: infatti da $N' = N$ segue $\bar{N} \lhd \bar{G}$ (1.7); sarà $N' = \{1\}$ e dunque N abeliano privo di sottogruppi caratteristici e non divisibile (1.7); ma allora N è p-abeliano elementare. Se poi N non è ciclico è $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$: infatti per 3.4 è $N_{\bar{G}} = \{1\}$ e per teorema E se $\bar{N} \underset{\bar q}{\leq} \bar{G}$ è $[N : N_{\bar{G}}] = p$, una contraddizione. È poi anche N isomorfo ad $\bar{N}$ dovendo essere $\bar{N}$ residualmente nilpotente finito (3.7), sempre se N non è ciclico. Ne viene anche che σ conserva l'ordine dei p-gruppi ciclici. Se N è finito, inoltre, e non ciclico è $\bar{N} \lhd \bar{G}$: infatti se no è $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ con $\bar{N}_{\bar{G}} = \{1\}$; allora Busetto [6] ha provato che $[\bar{G} : \mathrm{C}(\bar{N})] = p^m$ per cui $N \leq Z_\infty(G)$ e questo implica $|N| = p$, una contraddizione.

4.4 Proposizione. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* N *un sottogruppo normale ciclico di* G. *Allora i gruppi* $N^{\bar G}$, $\bar{N}^{\bar G}$ *sono iperciclicamente immersi.*

Dim. *a*) N d'ordine finito.

Se $|N| = p$, un primo, la cosa consegue da 4.3; usando 3.4 ed induzione sul numero dei fattori primi di $|N|$ si conclude.

b) N è d'ordine infinito.

È ora $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ (teorema C) e così per 2.2 e 2.9 in [2] è $\bar{N}^{\bar G} = \bar{N}\,\mathcal{T}(\bar{N}^{\bar G})$ con $\mathcal{T}(\bar{N}^{\bar G}) \leq Z_\omega(\bar{G})$ per cui $\bar{N}^{\bar G}$ è iperciclicamente immerso in $\bar{G}$. È $\mathcal{T}(N^{\bar G}) \underset{c}{<} N^{\bar G} \lhd G$ (3.4) per cui per concludere basta provare che $\mathcal{T}(N^{\bar G})$

[6] Communicazione orale.

è ipercilicamente immerso in G. All'uopo basterà provare che se $K \lhd G$, se K è periodico e iperciclicamente immerso in G allora $\bar{K}$ è iperciclicamente immerso in $\bar{G}$. Esiste una catena ascendente $\{K_\alpha\}_{0 \leqq \alpha \leqq \gamma}$ di sottogruppi normali di G con $K_0 = \{1\}$, $K_\gamma = K$ e $K_{\alpha+1}/K_\alpha$ d'ordine primo. Ora usando 3.4 e 4.3, mediante un ragionamento d'induzione transfinita su α, si conclude che $\bar{K}^{\bar{G}}$ e dunque anche $\bar{K}$ è iperciclicamente immerso in $\bar{G}$. //

4.5 Teorema. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività. Posto $\varrho(G) = \langle X \leq G | X$ iperciclicamente immerso in $G\rangle$, risulta $\varrho^\sigma(G) = \varrho(\bar{G})$.*

Dim. Esiste una catena ascendente $\{N_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ di sottogruppi normali di G con $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ ciclico, $N_0 = \{1\}$, $N_\gamma = \varrho(G)$. Posto $K_\alpha = N_\alpha^{\bar{G}}$ per 3.4 è $\{K_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ una catena ascendente di sottogruppi normali di G per cui si ha $\sigma\colon G/K_\alpha \to \bar{G}/\bar{K}_\alpha$; ora $N_{\alpha+1}K_\alpha/K_\alpha$ è ciclico e normale in G/K_α e si ha $(N_{\alpha+1}K_\alpha/K_\alpha)^{\bar{G}} = K_{\alpha+1}/K_\alpha$; per 4.4 sono dunque $K_{\alpha+1}/K_\alpha$ e $\bar{K}_{\alpha+1}/\bar{K}_\alpha$ iperciclicamente immersi. Ne segue che $\varrho^\sigma(G) \leq \bar{K}_\gamma \leq \varrho(\bar{G})$; similmente $\varrho^{\sigma^{-1}}(\bar{G}) \leq \varrho(G)$ e dunque $\varrho^\sigma(G) = \varrho(\bar{G})$. //

Volgiamo ora la nostra attenzione al comportamento del radicale di Hirsch-Plotkin rispetto alle proiettività.

4.6 Lemma. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un p-gruppo normale di G contenuto nel radicale di Hirsch-Plotkin di G. Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ allora $G = N^{\bar{G}} \times T$ con $N^{\bar{G}}$ un P-gruppo e fattore di Hall di G; σ è singolare su N.*

Dim. N è localmente finito è da $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ segue che σ ha una singolarità su N per cui N è p-abeliano elementare oppure uno $Z(p^\alpha)$-gruppo.

a) N è uno $Z(p^\alpha)$-gruppo.

a$_1$) $\alpha = 1$.

Per 4.3 si conclude

a$_2$) $\alpha > 1$.

Per teorema E è $G/N_{\bar{G}} = P/N_{\bar{G}} \times G/N_{\bar{G}}$ ove $P/N_{\bar{G}} = (N/N_{\bar{G}})^{\bar{G}}$ è un P-gruppo; ora P è localmente finito con il p-Sylow S normale e σ su S ha una singolarità per cui P stesso è un P-gruppo relativo a p e dunque $|N| = p$ una contraddizione.

b) N abeliano elementare non ciclico.

Per ogni $X \leq N$ è $X \lhd G$ (3.8); ora esiste un $\{1\} < M \leq N$ con

$\overline{M} \underset{q}{\leq} \overline{N}$ e da qui abbiamo $M \lhd G$, $\overline{M} \underset{q}{\leq} \overline{G}$. Per 4.3 è ora $G = M^{\bar{G}} \times T$ con $M^{\bar{G}} \geq N$ e risulta un S-fattore relativo a p; dunque $N^{\bar{G}} \leq M^{\bar{G}}$ e così $N^{\bar{G}} = M^{\bar{G}}$ e $G = N^{\bar{G}} \times T$, $N^{\bar{G}} \in P(n, p)$. //

Sia σ: $G \to \overline{G}$ una proiettività; diremo che σ ha *una p-singolarità su G* se e solo se G è un S-gruppo e vi esiste un S-fattore $P \in P(n, p)$ tale che σ è singolare a p su P o σ^{-1} è singolare a p su $\overline{P}$. Ciò premesso passiamo a dimostrare

TEOREMA G. *Sia σ: $G \to \overline{G}$ una proiettività ed $R(G)$ il radicale di Hirsch-Plotkin di G. Allora risulta $R^{\sigma}(G) = R(\overline{G})$ se e solo se σ non ha alcuna p-singolarità su G.*

DIM. *a*) G gruppo misto.

Posto $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(R(G))$, se $\mathfrak{T} = R(G)$, poichè $G/\mathfrak{T}$ è misto, sarà $R^{\sigma}(G) \underset{q}{\leq} \overline{G}$ (teorema B) e σ su $\mathfrak{T}$ conserva gli indici (2.9) per cui $\mathfrak{T}$ è pure localmente nilpotente e dunque $R^{\sigma}(G) \leq R(\overline{G})$ [12]; se poi $R(G)$ è misto, è ancora $R^{\sigma}(G) \underset{q}{\leq} \overline{G}$ (teorema C) ed $R^{\sigma}(G)$ è anche localmente nilpotente, sicchè di nuovo $R^{\sigma}(G) \leq R(\overline{G})$; in definitiva, per simmetria, $R^{\sigma}(G) = R(\overline{G})$.

b) G gruppo periodico.

$R(G)$ si presenta come il prodotto diretto dei suoi Sylow-gruppi, che risultano localmente nilpotenti. Sia ora G non S-gruppo ed S un Sylow-gruppo di $R(G)$; è $S \lhd G$ e per 4.6 sarà $\overline{S} \underset{q}{\leq} \overline{G}$ ed $\overline{S}$ ancora localmente nilpotente a meno che S non sia abeliano elementare non ciclico e σ singolare su S. Esiste allora un $\{1\} < M \leq S$ con $\overline{M} \underset{q}{\leq} \overline{G}$ e per 3.8 è $M \lhd G$. Ma allora per 4.3 G è un S-gruppo, contro ipotesi. Dunque, in ogni caso, $\overline{S}$ è localmente nilpotente e quasi-normale in $\overline{G}$ per cui $\overline{S} \leq R(\overline{G})$ e in definitiva $R^{\sigma}(G) \leq R(\overline{G})$. Se G non è un S-gruppo tale non è $\overline{G}$ per cui, in definitiva, $R^{\sigma}(G) = R(\overline{G})$; ed ora è facile raggiungere la sufficienza.

Sia viceversa $R^{\sigma}(G) = R(\overline{G})$; è allora di immediata verifica che σ non può avere alcuna p-singolarità. //

4.7 COROLLARIO. *Sia $G = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times K$ la scomposizione del gruppo periodico G nel prodotto dei suoi S-fattori e K non S-gruppo. Allora $\bigvee_{\tau \in P(G)} R^{\tau}(G) = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times R(K)$.*

DIM. È $R^{\tau}(K) = R(K)$ per $\tau \in P(G)$ (teorema G) mentre $\bigvee_{\tau \in P(G)} S_i^{\tau} = P_i$ se S_i è il p_i-Sylow normale di P_i. //

4.8 Corollario [9]. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività. Allora* $\mathfrak{R}^\sigma(G) = \mathfrak{R}(\bar{G})$ *se* $\mathfrak{R}(G)$ *è l'iperradicale di Hirsch-Plotkin di* G.

Osservazione 9. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, G non S-gruppo ed $R_n(G)$ l'n-esimo termine della serie ascendente degli iterati radicali di Hirsch-Plotkin. Allora $R_n^\sigma(G) = R_n(\bar{G})$ come si desume facilmente nel caso di G misto dal fatto che $R_n^\sigma(G) \underset{q}{\leq} \bar{G}$ (teorema B e C) ed usando teorema G; per G periodico si usi ancora teorema G e che $R_i(G)$ è localmente finito per cui se σ ha una singolarità di seconda specie su $R_i(G)/R_{i-1}(G)$, σ ne ha una su $R(G)$ e G sarebbe un S-gruppo. Da qui è poi anche facile vedere che $R_n^\sigma(G) = R_n(\bar{G})$ sempre se n è naturale maggiore o uguale a 2.

4.9 Corollario. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività non p-singolare su* G *per alcun primo* p. *Allora* $g^\sigma(G) = g(\bar{G})$ *se* $g(G)$ *è il radicale di Gruenberg* (7) *di* G.

Dim. Sia $\langle x\rangle \underset{a}{\leq} G$; allora $\langle x\rangle \leq R(G)$ e per teorema G ed F sarà $\langle x\rangle^\sigma \underset{a}{\leq} R(\bar{G}) \lhd \bar{G}$ per cui $g^\sigma(G) \leq g(\bar{G})$ e dunque, per simmetria, $g^\sigma(G) = g(\bar{G})$. //

Terminiamo il numero rivolgendo la nostra attenzione al comportamento dell'ipercentro $Z_\infty(G)$ di G rispetto alle proiettività.

Osserviamo che $Z_\infty(G) \leq R(G) \wedge \varrho(G)$ e che da $N \lhd G$ ed $N \leq Z_\infty(G)$ segue $Z_\infty(G/N) = Z_\infty(G)/N$ ed $R(G/N) = R(G)/N$. In $Z_\infty(G)$ gli elementi periodici formano un sottogruppo $\mathfrak{T}$; definiamo in $\mathfrak{T}$ la seguente serie centrale ascendente: $H_0 = \{1\}$, $H_{\alpha+1}$ la controimmagine nell'omomorfismo canonico $G \to G/H_\alpha$ del gruppo $\Omega(Z(G/H_\alpha))$ e $H_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} H_\beta$ se α è ordinale limite. Risulta $\mathfrak{T} = H_\mu$ per un certo ordinale μ. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività; usando 4.2 abbiamo $\bar{H}_\alpha \lhd \bar{G}$ per $\alpha \leq \mu$. Fatte queste premesse passiamo a dimostrare il seguente

Teorema H. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività. Allora* $Z_\infty^\sigma(G) = Z_\infty(\bar{G})$ *se e solo se* σ *e* σ^{-1} *sugli eventuali S-fattori abeliani di* G *e* $\bar{G}$ *conservano la abelianità.*

Dim. Sufficienza. Non sarà restrittivo supporre G (e dunque anche $\bar{G}$) privo di eventuali S-fattori non abeliani. Da $N \lhd G$ ed $N \leq R(G)$, poichè per teorema G è $R^\sigma(G) = R(\bar{G})$, sarà $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$. Da qui ed usando

(7) Per la definizione vedasi [12].

4.3 si ricava che $\bar{H}_{\alpha+1}/\bar{H}_\alpha \leq Z_2(\bar{G}/\bar{H}_\alpha)$; si ha ora $\bar{H}_\alpha \leq \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$: è $\bar{H}_1 \leq \leq \mathcal{T}(Z_2(\bar{G})) \leq \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$ per 4.3 e da $\bar{H}_\alpha \leq Z_\infty(\bar{G})$, poichè $\bar{H}_{\alpha+1}/\bar{H}_\alpha \leq \leq \Omega(Z_2(\bar{G}/\bar{H}_\alpha))$ segue $\bar{H}_{\alpha+1} \leq \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$; infine se α è ordinale limite, da $\bar{H}_\beta \leq \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$ per $\beta < \alpha$ segue $\bar{H}_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \bar{H}_\beta \leq \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$; pertanto $\bar{\mathcal{T}} \leq \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$ e per simmetria sarà $\mathcal{T}^\sigma(Z_\infty(G)) = \mathcal{T}(Z_\infty(\bar{G}))$.

Se allora $Z_\infty(G)$ è periodico, abbiamo la conclusione. Sia dunque $Z_\infty(G)$ misto e visto che $\bar{\mathcal{T}} = \bar{H}_\mu \lhd \bar{G}$, ragioniamo modulo $\mathcal{T}$. Sia $\{1\} < < Z_1 < \ldots < Z_\alpha < \ldots < Z_\gamma = Z_\infty(G)$ la serie centrale ascendente di G; poniamo per induzione transfinita su α che $Z_\alpha^\sigma(G) = Z_\alpha(\bar{G})$: la cosa è banale se $\alpha = 0$ oppure se α è un ordinale limite. Poichè Z_∞ è senza torsione tale è Z_∞/Z_α; sia $\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha(\bar{G})$ e $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha = Z(G/Z_\alpha)$. Ragionando modulo Z_α siamo ricondotti a provare che $\bar{Z}(G) = Z(\bar{G})$. La cosa è chiara se $Z(G)$ non ha rango inferiore a 2 [22]. Abbia dunque $Z(G)$ rango 1 e sia $1 \neq z \in Z(G)$; è (teorema C) $\langle\bar{z}\rangle \leq_q \bar{G}$ e se $\langle\bar{z}\rangle \lhd \bar{G}$ è anche $\langle\bar{z}\rangle \leq \leq Z(\bar{G})$. Sia dunque, per ipotesi assurda, $\langle\bar{z}\rangle \ntriangleleft \bar{G}$; per 2.1 in [2] sarà $\{1\} \neq \mathcal{T}(\langle\bar{z}\rangle^{\bar{G}}) \leq Z^\infty(\bar{G})$; ma allora è pure $\mathcal{T}(Z_\infty(G)) \neq \{1\}$, una contraddizione. In definitiva $Z^\sigma(G) \leq Z(\bar{G})$ e per simmetria $Z^\sigma(G) = Z(\bar{G})$.

La necessità è ovvia. //

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Colloquim Publ. 25, New York (1948).

[2] G. Busetto, *Proprietà di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **62** (1980), pp. 269-84.

[3] G. Busetto, *Sottogruppi normali e proiettività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67** (1982).

[4] L. Fuchs, *Infinite abelian groups I*, Acad. Press, New York (1970).

[5] F. Gross, *p-subgroups of core free quasinormal subgroups*, Rochy Mountain J. Math., **1** (1971), pp. 541-50.

[6] F. Menegazzo, *Normal subgroups and projectivities of finite groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **59** (1978), pp. 11-15.

[7] F. Menegazzo, *Immagini di sottogruppi normali nelle proiettività tra gruppi*, Coferenza - Convegno di teoria dei gruppi, 4-9 giugno 1979, Povo (TN).

[8] F. Napolitani, *Isomorfismi reticolari e gruppi perfetti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67** (1981).

[9] A. S. Pekelis, *Lattice isomorphisms of radical groups*, Soviet Math. Doklady, **13** (1972), pp. 649-53.

[10] B. I. Plotkin, *Radical and semisimple groups*, Trudy Moscow Mat. Obsc., **6** (1957), pp. 299-36.

[11] E. Rips, *Lattice isomorphism of groups, subgroups of finite index and normality*, manoscritto.

[12] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Erg. der Math., **62**, Springer-Verlag, Berlin.

[13] R. Schmidt, *Modulare Untergruppen endlicker Gruppen*, Ill. J. Math., **13** (1969), pp. 538-77.

[13] R. Schmidt, *Modular subgroups of finite groups II*, Ill. J. Math., **14** (1970), pp. 344-62.

[15] R. Schmidt, *Verbandsisomorphismen endlicher auflösbarer Gruppen*, Arch. Math., **23** (1972), pp. 449-58.

[16] R. Schmidt, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London Math. Soc., **30** (1975), pp. 287-300.

[17] R. Schmidt, *Untergruppenverbände involutorisch erzeugter Gruppen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **63** (1980).

[18] S. E. Stonehewer, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[19] S. E. Stonehewer, *Modular subgroups of infinite groups*, Symposia Mathematica, **17** (1976), pp. 207-14.

[20] S. E. Stonehewer, *Modular subgroup structure in infinite groups*, Proc. London Math. S., **32** (1976), pp. 63-100.

[21] M. Suzuki, *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. S., **70** (1951), pp. 345-71.

[22] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Erg. der Math., 10, Springer-Verlag, Berlin (1956).

[23] G. Zacher, *Una caratterizzazione reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo*, Att. Acc. Naz., dei Lincei in corso di stampa).

[24] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, Chelsea, New York, second edition (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1981, ed in forma revisionata il 1° settembre 1981.