RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

Isomorfismi reticolari e gruppi perfetti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 181-184

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__181_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 67 (1982)

Isomorfismi reticolari e gruppi perfetti.

FRANCO NAPOLITANI

1. Introduzione.

M. Suzuki in [4] (vedasi anche [5]) dimostra che gli isomorfismi reticolari mandano gruppi perfetti finiti in gruppi perfetti.

In questa nota si prova che questo risultato vale senza alcuna ipotesi di finitezza.

TEOREMA A. Gli isomorfismi reticolari mandano gruppi perfetti in gruppi perfetti.

Se G è un gruppo, indichiamo con $S(G)$ l'ultimo termine della serie derivata, eventualmente continuata transfinitamente, di G. Un gruppo G si dice che è un SD-gruppo [2] se $S(G)$ è il sottogruppo identico.

Il Teorema A permette di ottenere i seguenti:

TEOREMA B. Sia G un SD-gruppo. Se $\sigma\colon G \to G^\sigma$ è un isomorfismo reticolare, anche G^σ è un SD-gruppo.

TEOREMA C. Siano G un gruppo e $\sigma\colon G \to G^\sigma$ un isomorfismo reticolare. Allora $\big(S(G)\big)^\sigma = S(G^\sigma)$.

Il Teorema C è l'analogo per i gruppi infiniti del Teorema 13 di [5].

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università di Padova - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

2. Dimostrazioni.

Indispensabile per le dimostrazioni è il recente importante risultato di I. Rips e G. Zacher [6]:

TEOREMA 1. Gli isomorfismi reticolari conservano i sottogruppi di indice finito.

Per rendere più rapida l'esposizione faremo inoltre uso del seguente (che dipende dal Teorema 1) [7, Corollario 3.1]

TEOREMA 2. Siano G un gruppo, $\sigma\colon G \to G^\sigma$ un isomorfismo reticolare ed N un sottogruppo normale di G. Se G^σ è un gruppo perfetto, allora N^σ è quasinormale in G^σ.

LEMMA. Siano H un gruppo e $T \leqslant K$ sottogruppi quasinormali di H. Se T è normale in K ed il reticolo $[H/K]$ dei sottogruppi di H che contengono K è una catena, allora anche $[T^H/T]$ è una catena.

DIM. Sia F un sottogruppo di H della forma $F = K\langle x\rangle$ con x elemento di H. Da $[\langle x\rangle/\langle x\rangle \cap K] \simeq [F/K]$ e quindi catena, e la struttura reticolare dei gruppi ciclici segue che $|\langle x\rangle/\langle x\rangle \cap K| = p^n$ dove p è un primo. Pertanto, eventualmente considerando una opportuna potenza di x, F può essere rappresentato nella forma $K\langle x\rangle$ in modo che x abbia, rispetto a T, ordine potenza di p oppure infinito Con tale scelta di x, poichè $[T^{\langle x\rangle}/T] \subseteq [T\langle x\rangle/T]$ e quest'ultimo è una catena nel primo caso, mentre $T = T^{\langle x\rangle}$ nel secondo [1], otteniamo che $[T^{\langle x\rangle}/T]$ è una catena. Ma T normale in K implica allora $T^F = T^{\langle x\rangle}$ e così $[T^F/T]$ è una catena. Se x e y sono elementi di H, allora, per quanto precede, TT^x e TT^y sono confrontabili tali essendo per le ipotesi $K\langle x\rangle$ e $K\langle y\rangle$. Così anche $\{TT^x;\ x \in H\}$ è una catena. Da $T^H = \langle TT^x;\ x \in H\rangle$ segue allora che se R_1, $R_2 \in [T^H/T]$ sono finitamente generati modulo T, esiste un $x \in H$ tale che TT^x li contiene entrambi e quindi essi sono confrontabili. È adesso immediato che $[T^H/T]$ è una catena.

DIM. DEL TEOREMA A. Siano G un gruppo e $\sigma\colon G \to G^\sigma = H$ un isomorfismo reticolare. Proviamo che $G \neq G^{(1)}$ implica $H \neq H^{(1)}$.

Supponiamo per assurdo $H = H^{(1)}$. Se G contiene un sottogruppo normale di indice primo, allora il Teorema 1 insieme con [3, Lemma 1] contraddice H gruppo perfetto. Pertanto $G/G^{(1)}$ è un gruppo divisibile. Consideriamo in G un sottogruppo N tale che $G > N \geqslant G^{(1)}$, G/N sia indecomponibile e $N/G^{(1)}$ sia divisibile. Posto $K = N^{\sigma}$, per il Teorema 2 K è quasinormale in H; ma non è normale, altrimenti essendo $[H/K]$ isomorfo a $[G/N]$ che è distributivo, $K \geqslant H^{(1)}$. Ciò implica sia che G/N è un gruppo di Prüfer [1] e quindi che $[H/K]$ è una catena in cui ogni sezione terminale non triviale (¹) è infinita, sia che K possiede sottogruppi normali di indice primo. Poichè N è reticolarmente isomorfo a K, il Teorema 1 insieme con [3, Lemma 1] assicura che anche N ha sottogruppi normali di indice primo. Se p è un siffatto primo, sia F l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di indice p di N. Poichè F è normale in G, per il Teorema 2 $F^{\sigma} = T$ è quasinormale in H. Ma allora T è normale in K perchè, essendo N/F un p-gruppo abeliano elementare e $[K/T]$ isomorfo a $[N/F]$, ogni elemento di K non in T ha ordine primo rispetto a T. Il precedente isomorfismo comporta inoltre che K/T è un gruppo modulare localmente finito e quindi metabeliano [5]. Si consideri KT^H. Se si osserva che KT^H è quasinormale in H, che ogni elemento non identico di KT^H/T^H ha ordine primo e si tiene presente che $[H/KT^H]$ è una catena, si vede che $(KT^H)^H$ o coincide con KT^H o lo copre. Ciò esclude $KT^H < H$, perchè altrimenti, essendo $[H/KT^H]$ una catena infinita, $H/(KT^H)^H$ sarebbe un gruppo di Prüfer. Pertanto $KT^H = H$. $H \neq T^H$ comporta H/T^H isomorfo al gruppo metabeliano non identico $K/K \cap T^H$. Ciò forza $T^H = H$ e quindi, per il Lemma, che $[H/T]$ è una catena. Ma allora $[N/F]$ è una catena e quindi $|N/F| = p$. Ciò implica G/F abeliano. F contiene allora $G^{(1)}$ e così N/F è un quoziente di $N/G^{(1)}$ contro $N/G^{(1)}$ divisibile. Quest'ultima contraddizione prova il Teorema.

Dim. del Teorema B. $S(G^{\sigma})$ è un gruppo perfetto. Per il Teorema A anche $\big(S(G^{\sigma})\big)^{\sigma^{-1}}$ è un gruppo perfetto. Poichè sottogruppi di SD-gruppi sono SD-gruppi, è necessariamente $\big(S(G^{\sigma})\big)^{\sigma^{-1}} = 1$ e quindi $S(G^{\sigma}) = 1$.

Dim. del Teorema C. Combinando il Teorema 1 con risultati di [3] si vede facilmente che $\big(S(G)\big)^{\sigma}$, essendo perfetto, è normale in G^{σ}.

Per il Teorema B, $G^{\sigma}/\big(S(G)\big)^{\sigma}$ è un SD-gruppo. Da ciò $\big(S(G)\big)^{\sigma} \geqslant S(G^{\sigma})$. Poichè $\big(S(G)\big)^{\sigma}/S(G^{\sigma})$ deve essere un SD-gruppo perfetto, esso è il gruppo identico.

(¹) Non contenente il solo elemento H.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. H. Bradway, F. Gross and W. R. Scott, *The nilpotence class of core free quasinormal subgroups*, Rocky Mt. J. Math., **1** (1971), pp. 375-382.
[2] A. G. Kurosh, *The theory of groups*, Chelsea, 1956.
[3] R. Schmidt, *Modulare Untergruppen endlicher Gruppen*, Illinois J. Math., **13** (1969), pp. 358-377.
[4] M. Suzuki, *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), pp. 345-371.
[5] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Ergebnisse der Math., Heft 10, Springer.
[6] G. Zacher, *Una caratterizzazione reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo*, Atti Acc. Naz. Lincei 1981.
[7] G. Zacher, *Sulle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 67 (1982).

Pervenuto in redazione il 4 luglio 1981.