RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO BUSETTO

Sottogruppi normali e proiettività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 105-110

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__105_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 67 (1982)

Sottogruppi normali e proiettività.

GIORGIO BUSETTO (*)

Se G e $\bar{G}$ sono gruppi, una proiettività $\sigma\colon G \to \bar{G}$ è un isomorfismo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G sul reticolo $\mathfrak{L}(\bar{G})$ dei sottogruppi di $\bar{G}$. Nel seguito denoteremo semplicemente con una barra soprassegnata le immagini proiettive dei sottogruppi di G. Se N è un sottogruppo normale di G, porremo per brevità $(N_{\bar{G}})^\sigma = \bar{N}_{\bar{G}}$, il nocciolo di $\bar{N}$ in $\bar{G}$, e $(N^{\bar{G}})^\sigma = \bar{N}^{\bar{G}}$, la chiusura normale di $\bar{N}$ in $\bar{G}$.

Se $N \trianglelefteq G$ (N sottogruppo normale di G) in generale $\bar{N}$ non è normale ma è certamente di Dedekind in $\bar{G}$. Ricordiamo che un sottogruppo M di un gruppo G si dice di Dedekind in G, e si scriverà $M \underset{d}{\leq} G$, se

$$(U \vee M) \wedge V = U \vee (M \wedge V)$$

per ogni $U \leq V \leq G$ e

$$(U \vee M) \wedge V = (U \wedge V) \vee M$$

per ogni $V \leq G$, $U \leq G$ con $M \leq V$; M si dice invece quasinormale in G, e si scriverà $M \underset{q}{\leq} G$, se $XM = MX$ per ogni $X \leq G$. È chiaro che $M \underset{q}{\leq} G$ implica $M \underset{d}{\leq} G$.

R. Schmidt in [3] ha provato il seguente utile e interessante teorema:

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Sia G un gruppo finito, σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un sottogruppo normale di G. Allora $N_{\bar{G}}$ e $N^{\bar{G}}$ sono sottogruppi normali di G.

Scopo della presente nota è provare che tale risultato sussiste tale e quale anche nei gruppi non finiti.

Incominciamo con la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività. Allora per un $N \trianglelefteq G$ è $N^{\bar{G}} \trianglelefteq G$ se e solo se $N_{\bar{G}} \trianglelefteq G$.*

DIM. Sia $H = N_{\bar{G}} \ntrianglelefteq G$ $(K = N^{\bar{G}} \ntrianglelefteq G)$. Allora $H \neq H^G \leq N$ $(N \leq \leq K_G \neq K)$ e poichè $\bar{H} \trianglelefteq \bar{G}$ $(\bar{K} \trianglelefteq \bar{G})$, sarà per ipotesi $\bar{H}^G \trianglelefteq \bar{G}$ $(\bar{K}_G \trianglelefteq \bar{G})$ per cui

$$\bar{N} \geq \overline{(H^G)} = \bar{H}^G \trianglelefteq \bar{G} \qquad (\bar{N} \leq \overline{(K_G)} = \bar{K}_G \trianglelefteq \bar{G})$$

e dunque

$$\bar{N}_{\bar{G}} \geq \bar{H}^G \underset{\neq}{>} \bar{H} = \bar{N}_{\bar{G}} \qquad (\bar{N}_{\bar{G}} \leq \bar{K}_G \underset{\neq}{<} \bar{K} = \bar{N}^{\bar{G}}),$$

una contraddizione.

In virtù della Proposizione 1 ci sarà dunque sufficiente dimostrare che $N_{\bar{G}}$ è normale in G.

Per arrivare a tale conclusione ci serviremo di un recente risultato di Zacher (cfr. Lemma 3.3 in [6]) e di uno nostro stabilito in [1] (Lemma 1.3).

Riportiamo tali enunciati per comodità nostra e del lettore.

PROPOSIZIONE 2 (Zacher). *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, N un sottogruppo normale di G e G/N un gruppo finitamente generato. Allora valgono i seguenti fatti:*

a) $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *è un gruppo nilpotente di esponente finito.*

Se poi $\bar{N}$ non è quasinormale in $\bar{G}$, allora $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è periodico ed ha la seguente struttura:

b) $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}} = \overline{P_1}/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \overline{P_t}/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{K}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *è un prodotto diretto di un numero finito di sottogruppi di Hall con* $\overline{P_i}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *un P-gruppo* (1) *non abeliano finito d'ordine* $p_i^{\alpha_i} q_i$, $q_i < p_i$, $1 \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq t$.

c) $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}} = \overline{Q_1}/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \overline{Q_t}/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{Q}/\bar{N}_{\bar{G}}$, $\overline{Q_i} = \bar{N} \wedge \overline{P_i}$, $|\overline{Q_i} : \bar{N}_{\bar{G}}| = q_i$, $\overline{Q_i}^{\bar{G}} = \overline{Q_i}^{\overline{P_i}} = \overline{P_i}$, $\bar{Q} = \bar{K} \wedge \bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$, $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{N}\bar{K}$.

d) $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}} = \overline{P_1}/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \overline{P_t}/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$, *con* $\bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *gruppo nilpotente periodico di esponente finito.*

PROPOSIZIONE 3 (Busetto). *Sia G un gruppo e M un sottogruppo quasinormale ma non normale di G di ordine primo p. Allora M^G centralizza i sottogruppi ciclici infiniti e i p'-sottogruppi di G.*

Passiamo ora a provare il risultato annunciato.

TEOREMA. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un sottogruppo normale di G. Allora $N_{\bar{G}}$ e $N^{\bar{G}}$ sono normali in G.*

DIM. Come già detto, in virtù della Proposizione 1 basterà dimostrare che $N_{\bar{G}} \trianglelefteq G$.

Osserviamo innanzitutto che è sufficiente provare il risultato supponendo G/N finitamente generato. Siano infatti F, F_1 due sottoinsiemi finiti di G con $F \subseteq F_1$. Posto $\overline{H_{F_1}} = \bar{N}_{\overline{\langle N, F_1\rangle}}$, risulta $H_{F_1} \trianglelefteq \langle N, F_1\rangle$ e dunque $H_{F_1} \trianglelefteq \langle N, F\rangle$ da cui $N_{\bar{G}} = \bigwedge_{F_1 \supseteq F} H_{F_1} \trianglelefteq \langle N, F\rangle$ per ogni insieme finito F e pertanto $N_{\bar{G}} \trianglelefteq G$.

Supponiamo allora nel seguito G/N finitamente generato. Posto per semplicità $H = N_{\bar{G}}$, per la Proposizione 2 $\bar{N}/\bar{H}$ è un gruppo nilpotente periodico di esponente finito.

Supponiamo per assurdo $H \ntrianglelefteq G$ e sia $M = H^G \leq N$. Sia $\Pi = \{p \mid p$ è un primo ed esiste un elemento di $\bar{M}/\bar{H}$ di ordine $p\}$; si noti che Π è un insieme finito poichè $\bar{N}/\bar{H}$ ha esponente finito.

Per ogni $p \in \Pi$ sia $g_p \in G$ tale che $\overline{H^{\langle H, g_p\rangle}}/\bar{H}$ contenga un sottogruppo $\overline{R_p}/\bar{H}$ di ordine p. Poichè $H \underset{d}{\leq} G$, $\overline{H^{\langle H, g_p\rangle}}/\bar{H}$ è ciclico e di Dedekind in $\bar{G}/\bar{H}$ e ivi ovviamente anche privo di nocciolo. Dalla struttura di $\bar{G}/\bar{H}$ (cfr. Proposizione 2), tenendo conto che sottogruppi di sottogruppi quasinormali ciclici sono quasinormali ([1], Prop. 1.7), si deduce facilmente che $\overline{R_p}/\bar{H}$ è di Dedekind (privo di nocciolo) in $\bar{G}/\bar{H}$.

Sia $x \in G$ tale che $\overline{\langle x\rangle H}/\bar{H}$ non normalizza $\overline{R_p}/\bar{H}$ per qualche $p \in \Pi$. Vogliamo provare che allora $\bar{M}/\bar{H} \wedge \overline{\langle x\rangle H}/\bar{H}$ è un $\Pi \setminus \{p\}$-gruppo.

(1) Per la definizione di P-gruppo si veda [5], pag. 11.

Distinguiamo all'uopo due casi:

i) $\overline{R_p}/\overline{H} \underset{q}{\leq} \overline{G}/\overline{H}$. Dalla Proposizione 3 discende allora facilmente che $\overline{R_p}/\overline{H} \leqslant \mathrm{Norm}\,(\overline{G}/\overline{H})$, la norma di $\overline{G}/\overline{H}$ (²). Pertanto

$$[\overline{R_p}/\overline{H},\ \overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}] \leq \overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}.$$

D'altra parte $\mathrm{Norm}\,(\overline{G}/\overline{H}) \leq Z_2(\overline{G}/\overline{H})$, il secondo centro di $\overline{G}/\overline{H}$ ([3]) e perciò $[\overline{R_p}/\overline{H},\ \overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}]$ è un p-gruppo, essendo tale $\overline{R_p}^{\overline{G}}/\overline{H}$, non identico, perchè $\overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}$ non normalizza $\overline{R_p}/\overline{H}$, contenuto in $Z(\overline{G}/\overline{H})$. Dunque $\overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}$ contiene un p-sottogruppo non identico del centro di $\overline{G}/\overline{H}$. Essendo ora $\overline{M}/\overline{H}$ privo di nocciolo in $\overline{G}/\overline{H}$, $\overline{M}/\overline{H} \wedge \overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}$ non può contenere sottogruppi non banali di $Z(\overline{G}/\overline{H})$ ed è quindi un $\Pi\diagdown\{p\}$-gruppo.

ii) $\overline{R_p}/\overline{H}$ non è quasinormale in $\overline{G}/\overline{H}$. Allora $\overline{R_p}/\overline{H} \nleqslant \overline{Q}/\overline{H}$, ove $\overline{Q}$ è il sottogruppo quasinormale di $\overline{G}$ che compare nell'enunciato della Proposizione 2, altrimenti $\overline{R_p}/\overline{H} \lhd\lhd \overline{Q}/\overline{H} \underset{q}{\leq} \overline{G}/\overline{H}$ e dunque $\overline{R_p}/\overline{H} \underset{q}{\leq} \overline{G}/\overline{H}$ ([4], Prop. 1), contro l'ipotesi. Dalla Proposizione 2 segue allora che $\overline{R_p}/\overline{H}$ coincide con $S_p(\overline{N}/\overline{H}) = S_p(\overline{M}/\overline{H})$, il p-sottogruppo di Sylow di $\overline{N}/\overline{H}$ e $\overline{M}/\overline{H}$ rispettivamente, $\overline{G}/\overline{H}$ è periodico e $(\overline{R_p}/\overline{H})^{\overline{G}/\overline{H}} = \overline{P}/\overline{H}$, un P-gruppo non abeliano, e quindi un $\{p, q\}$-gruppo ove q è un primo e $q > p$, che risulta essere un fattore diretto di Hall in $\overline{G}/\overline{H}$. Se per assurdo $\overline{M}/\overline{H} \wedge \overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}$ non è un $\Pi\diagdown\{p\}$-gruppo, allora $S_p(\overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}) = \overline{R_p}/\overline{H}$. Necessariamente allora $S_q(\overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}) = \{1\}$ perchè in $\overline{G}/\overline{H}$ un elemento di ordine p non commuta mai con un elemento di ordine q. Poichè $\overline{P}/\overline{H}$ è un fattore diretto in $\overline{G}/\overline{H}$, il $\{p, q\}' = \{p\}'$-sottogruppo di Hall di $\overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}$ centralizza $\overline{R_p}/\overline{H}$. In definitiva $\overline{\langle x\rangle}\overline{H}/\overline{H}$ normalizza $\overline{R_p}/\overline{H}$, assurdo.

Sia ora $y \in G$. Vogliamo provare che y normalizza H.

Se $|\langle y\rangle : \langle y\rangle \wedge H| = \infty$, essendo $\overline{M}/\overline{H}$ periodico, risulta

$$\overline{M} \wedge \overline{\langle y, H\rangle} = \overline{H}$$

e dunque $M \wedge \langle y, H\rangle = H \trianglelefteq \langle y, H\rangle$.

Altrimenti $|\overline{\langle y\rangle}\overline{H}/\overline{H}| < \infty$. Per ogni primo r sia $\langle y_r\rangle \leq \langle y\rangle$ tale che $\overline{\langle y_r\rangle}\overline{H}/\overline{H} = S_r(\overline{\langle y\rangle}\overline{H}/\overline{H})$. Poichè $\langle y, H\rangle = \bigvee_r \langle y_r, H\rangle$, è sufficiente

(²) La norma di un gruppo G è il massimo sottogruppo di G che normalizza tutti i sottogruppi di G.

provare che y_r normalizza H. Posto $\bar{R}/\bar{H} = \prod_{p\in\Pi} \overline{R}_p/\bar{H}$ e $\overline{\langle y_r\rangle} = \langle \bar{y}_r\rangle$, distinguiamo due casi:

a) $\langle \bar{y}^r\rangle\bar{H}/\bar{H}$ normalizza $\bar{R}/\bar{H}$. Per ogni $p \in \Pi$ sia $\overline{\langle z_p\rangle} = \langle \bar{z}_p\rangle$ tale che $\langle \bar{z}_p\rangle\bar{H}/\bar{H}$ è un p-gruppo che non normalizza $\overline{R}_p/\bar{H}$. L'esistenza di $\bar{z}_p$ è garantita dal fatto che $\overline{R}_p/\bar{H}$ è centralizzato dai $\{p'\}$-sottogruppi e dai sottogruppi ciclici infiniti se $\overline{R}_p/\bar{H} \underset{q}{\leq} \bar{G}/\bar{H}$ (Prop. 3), mentre $(\overline{R}_p/\bar{H})^{\bar{G}/\bar{H}}$ è un P-gruppo non abeliano fattore diretto di Hall in $\bar{G}/\bar{H}$ se $\overline{R}_p/\bar{H}$ non è quasinormale in $\bar{G}/\bar{H}$ (Prop. 2). Da ciò si deduce anche che

$$[\langle \bar{z}_p\rangle\bar{H}/\bar{H},\ \overline{R}_s/\bar{H}] = \{1\} \qquad \text{per } s \in \Pi\setminus\{p\}\,.$$

Pertanto $\bar{R}_{\langle \bar{R},\ \prod_{p\in\Pi} \bar{z}_p\rangle} \leq \bar{H}$. Sia $\overline{\langle z\rangle} = \langle \bar{z}\rangle$ ove $\bar{z} = \prod_{p\in\Pi} \bar{z}_p$. Risulta anche $\bar{R}_{\langle \bar{R},\bar{y}_r\bar{z}\rangle} \leq \bar{H}$. Di conseguenza, per quanto visto precedentemente $\bar{M}/\bar{H} \wedge \langle \bar{z}\rangle\bar{H}/\bar{H}$ e $\bar{M}/\bar{H} \wedge \langle \bar{y}_r\bar{z}\rangle\bar{H}/\bar{H}$ sono $\Pi\setminus\Pi$-gruppi e dunque identici. Ne segue che

$$M \wedge \langle z, H\rangle = H \trianglelefteq \langle z, H\rangle$$

e, se $\overline{\langle t\rangle} = \langle \bar{y}_r\bar{z}\rangle$, anche

$$M \wedge \langle t, H\rangle = H \trianglelefteq \langle t, H\rangle\,.$$

Ma $\overline{\langle t, z\rangle} = \langle \bar{y}_r\bar{z}, \bar{z}\rangle \geq \langle \bar{y}_r\rangle$ e perciò $\langle t, z\rangle \geq \langle y_r\rangle$ e così y_r normalizza H.

b) $\langle \bar{y}_r\rangle\bar{H}/\bar{H}$ non normalizza $\bar{R}/\bar{H}$. Allora esiste $b \in \Pi$ tale che $\langle \bar{y}_r\rangle\bar{H}/\bar{H}$ non normalizza $\overline{R}_b/\bar{H}$. Come si è visto in precedenza $\bar{M}/\bar{H} \wedge \langle \bar{y}_r\rangle\bar{H}/\bar{H}$ risulta allora essere un $\Pi\setminus\{b\}$-gruppo e dunque identico se $b = r$. Se $b \neq r$ allora necessariamente $\overline{R}_b/\bar{H}$ non è quasinormale in $\bar{G}/\bar{H}$ (perchè i b-sottogruppi quasinormali sono normalizzati dai $\{b\}'$-elementi) e dunque come prima $(\overline{R}_b/\bar{H})^{\bar{G}/\bar{H}}$ è un P-gruppo non abeliano fattore diretto di Hall in $\bar{G}/\bar{H}$. Dunque gli unici elementi di $\bar{G}/\bar{H}$ d'ordine potenza di un primo che non normalizzano $\overline{R}_b/\bar{H}$ sono elementi di $\bar{P}/\bar{H}$. Dunque $\bar{P}/\bar{H}$ è un $\{b, r\}$-gruppo e pertanto $r \notin \Pi$. In ogni caso dunque risulta $\bar{M}/\bar{H} \wedge \langle \bar{y}_r\rangle\bar{H}/\bar{H} = \{1\}$ da cui $M \wedge \langle y_r, H\rangle = H \trianglelefteq \langle H, y_r\rangle$.

In conclusione y-normalizza H e pertanto $H \trianglelefteq G$, un assurdo.

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Busetto, *Proprietà di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **63** (1980), pp. 269-284.
[2] E. Schenkman, *On the norm of a group*, Illinois J. Math., **4** (1960), pp. 150-152.
[3] R. Schmidt, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London Math. Soc., **30** (1975), pp. 287-300.
[4] S. E. Stonehewer, *Modular subgroups of infinite groups*, Symposia Mathematica, **17** (1976), pp. 207-214.
[5] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Erg. der Math., **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1956.
[6] G. Zacher, *Sulle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **67** (1982).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 giugno 1981.