RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDVIGE PUCCI

Determinazione delle classi di moto del solido pesante caratterizzate da un invariante polinomiale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 85-106

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__85_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

Determinazione delle classi di moto del solido pesante caratterizzate da un invariante polinomiale (*).

EDVIGE PUCCI (**)

1. Il moto di un solido pesante C, fissato senza attrito per un suo punto 0, è regolato dalle equazioni di Eulero Poisson, che, proiettate su una terna principale d'inerzia $T(0, e_1, e_2, e_3)$, sono, con l'usuale simbologia:

$$
(1.1) \qquad
\begin{aligned}
&A\dot{p} - (B - C)qr = \xi_2 c_3 - \xi_3 c_2 \\
&B\dot{q} - (C - A)pr = \xi_3 c_1 - \xi_1 c_3 \\
&C\dot{r} - (A - B)pq = \xi_1 c_2 - \xi_2 c_1 \\
&\dot{c}_1 = c_2 r - c_3 q \\
&\dot{c}_2 = c_3 p - c_1 r \\
&\dot{c}_3 = c_1 q - c_2 p \,.
\end{aligned}
$$

Queste equazioni ammettono gli integrali primi classici:

$$
(1.2) \qquad E = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\xi_1 c_1 - 2\xi_2 c_2 - 2\xi_3 c_3 = E_0
$$

$$
(1.3) \qquad K \cdot c = Apc_1 + Bqc_2 + Crc_3 = K_0
$$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, via Vanvitelli 2 - 06100 Perugia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo G.N.F.M. del C.N.R.

e l'integrale primo particolarizzato:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \,. \tag{1.4}$$

La conoscenza di un ulteriore integrale primo indipendente dai precedenti permette di ricondurre il moto alle quadrature, ossia di determinare, attraverso sole operazioni di integrazione, tutte le ∞^5 soluzioni di (1.1) associate alla (1.4) e corrispondentemente tutti gli ∞^6 moti possibili di $\mathcal{C}$.

Nell'ambito della ricerca di soluzioni per quadrature di (1.1) Poincaré [1] ed Husson [2] e successivamente per altra via Burgatti [3] e Quatela [4], hanno dimostrato che non esiste un ulteriore integrale primo polinomiale in p, q, r, c_1, c_2, c_3 se non nei casi di Eulero-Poinsot, Lagrange-Poisson e Kowalewsky.

La naturale generalizzazione del problema di Poincaré ed Husson porta a ricercare l'esistenza di classi di ∞^4 soluzioni di (1.1), associate a (1.4), e cioè di classi di ∞^5 moti di $\mathcal{C}$, determinabili per quadrature a partire da una relazione polinomiale.

Detto $f(p, q, r, c_1, c_2, c_3)$ un polinomio in p, q, r, c_1, c_2, c_3 questo può accadere nelle due eventualità:

a) $f = 0$ è un invariante del sistema (1.1);

b) $f =$ costante è un integrale primo (indipendente dai classici) associato alla particolarizzazione di uno dei detti integrali primi o di una loro combinazione (1).

Oggetto della presente nota è la determinazione, per un solido asimmetrico ($A > B > C$, $0 \neq G$) di tutte le possibili classi di moti del tipo *a*) è cioè caratterizzate da un invariante polinomiale (2).

Si riconosce che l'unico invariante polinomiale (irriducibile) per il sistema di Eulero Poisson sussiste se e solo se il corpo rigido è sospeso in modo che sia verificata la condizione di Hess ed è l'invariante di Hess.

2. Dato un sistema differenziale $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{F}(F_1, \ldots, F_n)$ e $\boldsymbol{x}(x_1, \ldots, x_n)$, sia $\mathcal{L}$ l'operatore di Lie [5], [6] associato al sistema.

(1) Si intende con ciò [3] che la relazione $f =$ costante sussiste non per tutte le soluzioni del sistema (1.1) ma per tutte quelle che, oltre alla $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, verificano l'integrale primo particolarizzato $G(E, K\cdot c) = 0$.

(2) Per il caso $A = B$ cfr. [2].

È noto [8] che condizione necessaria e sufficiente affinchè $f = 0$ sia un invariante per il sistema è che esista una funzione regolare $\varrho(\boldsymbol{x})$, detta moltiplicatore, tale che risulti, identicamente in $\boldsymbol{x}$ (3):

$$\mathfrak{L}f = \varrho f \,. \tag{2.1}$$

Riferendosi al sistema (1.1) l'operatore $\mathfrak{L}$ ha la forma:

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{B-C}{A}\,qr + \frac{\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2}{A}\right)\frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{C-A}{B}\,pr + \frac{\xi_3 c_1 - \xi_1 c_3}{B}\right)\frac{\partial}{\partial q} + \\ + \left(\frac{A-B}{C}\,pq + \frac{\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1}{C}\right)\frac{\partial}{\partial r} + (c_2 r - c_3 q)\frac{\partial}{\partial c_1} + \\ + (c_3 p - c_1 r)\frac{\partial}{\partial c_2} + (c_1 q - c_2 p)\frac{\partial}{\partial c_3}\,.$$

È utile premettere alcune definizioni e proprietà riguardanti gli invarianti polinomiali di (1.1).

DEFINIZIONE 1. Si definisce peso di un monomio la somma degli esponenti di p, q, r, e del doppio degli esponenti di c_1, c_2, c_3.

Si dice peso del polinomio il massimo dei pesi dei monomi che lo costituiscono.

L'operatore di Lie del sistema (1.1), quando opera su un polinomio annulla il termine costante e aumenta di 1 il peso di ogni monomio di peso non nullo, e quindi aumenta di uno il peso del polinomio.

Da questa osservazione e dal principio di identità dei polinomi discende ovviamente il

LEMMA 2.1. Il moltiplicatore di un invariante polinomiale del sistema (1.1) è un polinomio di peso 1.

Un'analisi più accurata permette di dimostrare il seguente

TEOREMA 1. Ogni invariante polinomiale che non sia equipesato è la somma di invarianti polinomiali equipesati di peso non nullo; ai singoli invarianti equipesati è associato come moltiplicatore lo stesso polinomio equipesato di peso 1, cioè $\varrho = ap + bq + cr$.

(3) Ovviamente se il moltiplicatore ϱ è identicamente nullo, $f = 0$ è un integrale primo particolarizzato del sistema.

Dim. Dalla (2.1), tenuto conto del lemma 2.1, si ottiene per ogni polinomio non equipesato:

$$\mathfrak{L}f_h + \mathfrak{L}f_{h-1} + \dots + \mathfrak{L}f_1 = (\varrho_1 + \varrho_0)(f_h + f_{h-1} + \dots + f_1 + f_0)$$

avendo indicato con f_j i termini equipesati di peso j.

Dal principio di identità dei polinomi si ottiene:

$$\varrho_0 f_0 = 0$$

$$\varrho_1 f_0 + \varrho_0 f_1 = 0$$

$$\varrho_1 f_j + \varrho_0 f_{j+1} = \mathfrak{L}f_j \qquad (j = 1, \dots, h-1)$$

$$\varrho_1 f_h = \mathfrak{L}f_h \,.$$

Supposto per assurdo $\varrho_0 \neq 0$ da queste si ottiene $f_0 = f_1 = \dots = f_h = 0$; posto allora $\varrho_0 = 0$ si ottiene $f_0 = 0$ e $\mathfrak{L}f_j = \varrho_1 f_j$ $(j = 1, \dots, h)$.

Teorema 2. Ogni polinomio invariante non primo (riducibile) è il prodotto di polinomi primi invarianti.

Dim. Sia $\bar{f}$ un fattore primo del polinomio invariante f. È allora

$$f = \bar{f}^k \bar{\bar{f}} \qquad \text{con } \bar{\bar{f}} \text{ non divisibile per } \bar{f}.$$

Applicando l'operatore di Lie si ha:

$$k\bar{f}^{k-1}\bar{\bar{f}}\mathfrak{L}\bar{f} + \bar{f}^k \mathfrak{L}\bar{\bar{f}} = \varrho \bar{f}^k \bar{\bar{f}}$$

e quindi

$$k\bar{\bar{f}}\mathfrak{L}\bar{f} = (\varrho\bar{\bar{f}} - \mathfrak{L}\bar{\bar{f}})\bar{f}$$

poichè $\bar{f}$ è primo e non è contenuto in $\bar{\bar{f}}$, deve essere contenuto in $\mathfrak{L}\bar{f}$ e quindi è

$$\mathfrak{L}\bar{f} = \lambda \bar{f} \,.$$

In base ai teoremi 1 e 2 la ricerca degli invarianti polinomiali è ricondotta a quella degli invarianti che siano polinomi primi equipesati. Ogni invariante polinomiale è ottenibile sommando prodotti di invarianti polinomiali primi. Si ottiene un invariante se e solo se ai singoli addendi è associato lo stesso moltiplicatore.

3. Per il seguito conviene decomporre l'operatore di Lie del sistema (1.1) nella somma dei tre operatori:

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{B-C}{A} qr \frac{\partial}{\partial p} + \frac{C-A}{B} pr \frac{\partial}{\partial q} + \frac{A-B}{C} pq \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2}{A} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\xi_3 c_1 - \xi_1 c_3}{B} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1}{C} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\mathfrak{L}_3 = (c_2 r - c_3 q) \frac{\partial}{\partial c_1} + (c_3 p - c_1 r) \frac{\partial}{\partial c_2} + (c_1 q - c_2 p) \frac{\partial}{\partial c_3},$$

e scrivereil generico polinomio equipesato di peso s nella forma:

$$f = \sum_{k \geq 0,\, s-2k \geq 0} Q_{s-2k,k} \tag{3.1}$$

con $Q_{h,k}$ polinomio omogeneo di grado h in p, q, r e di grado k in c_1, c_2, c_3.

L'operatore $\mathfrak{L}_1$ annulla i polinomi $Q_{0,k}$ e trasforma i polinomi $Q_{h,k}$ $(h \geq 1)$ in polinomi $Q'_{h+1,k}$, cioè in polinomi omogenei di grado $h+1$ in p, q, r e di grado k in c_1, c_2, c_3; l'operatore $\mathfrak{L}_2$ annulla i polinomi $Q_{0,k}$ e trasforma i polinomi $Q_{h,k}$ $(h \geq 1)$ in polinomi $Q'_{h-1,k+1}$; l'operatore $\mathfrak{L}_3$ annulla i polinomi $Q_{h,0}$ e trasforma i polinomi $Q_{h,k}$ $(k \geq 1)$ in polinomi $Q'_{h+1,k}$.

L'equazione

$$\mathfrak{L}_1 f + \mathfrak{L}_2 f + \mathfrak{L}_0 f = \varrho f$$

per il principio di identità dei polinomi risulta verificata se e solo se sono verificate le relazioni:

$$\mathfrak{L}_1 Q_{s-2k,k} + \mathfrak{L}_2 Q_{s-2(k+1),k-1} + \mathfrak{L}_3 Q_{s-2k,k} = \varrho Q_{s-2k,k} \quad k = 0, 1, \ldots, \leq s/2 \tag{3.2}$$

con la convenzione che $\mathfrak{L}_i Q_{h,k} = 0$ se $h < 0$ o $k < 0$.

La prima di queste equazioni $(h = 0)$ ha la forma:

$$\mathfrak{L}_1 Q_{s,0} = \varrho Q_{s,0} \tag{3.3}$$

per essa sussiste il seguente

TEOREMA 3. Ogni soluzione non identicamente nulla di (3.3) con ϱ non identicamente nullo è del tipo

$$(3.4)\qquad Q_{s,0}=\left(\alpha p+\frac{n}{|n|}\beta r\right)^{|n|}\bar{Q}_{s-|n|,0}(K,T)\,,\qquad \text{con } \varrho=nbq\,,\ n\neq 0\in\mathbb{Z}\,,$$

essendo $\alpha=\sqrt{A(A-B)}$, $\beta=\sqrt{C(B-C)}$, $b=\sqrt{(A-B)(B-C)/AC}$, $\bar{Q}_{s-|n|,0}(K,T)$ polinomio omogeneo in $K\equiv\alpha^2p^2-\beta^2r^2$ e $T\equiv Ap^2+$ $+Bq^2+Cr^2$.

DIM. In base al teorema 2 che sussiste chiaramente per l'operatore $\mathcal{L}_1$ è sufficiente limitare la ricerca degli invarianti a quelli irriducibili. All'operatore $\mathcal{L}_1$ è associato il sistema differenziale di Poinsot per il quale sussistono i due integrali primi algebrici indipendenti:

$$(3.5)\qquad \alpha^2p^2-\beta^2r^2=\gamma_1$$

$$(3.6)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=\gamma_2\,.$$

Le traiettorie in $R^3(p,q,r)$ (polodie) sono dunque parti di curve algebriche del 4° ordine, simmetriche rispetto ai tre piani coordinati. Per l'invariante $Q_{s,0}$ si hanno due possibilità:

1) la superficie $Q_{s,0}=0$ è formata genericamente da quartiche irriducibili;

2) la superficie $Q_{s,0}=0$ contiene una infinità di coniche che sono parti di quartiche degeneri.

Nella prima eventualità, tenuto conto che $Q_{s,0}$ è omogenea, $Q_{s,0}=0$ rappresenta un cono simmetrico rispetto ai tre piani coordinati. Ciò è possibile soltanto per s pari e con

$$Q_{s,0}=P(p^2,q^2,r^2)$$

essendo P polinomio omogeneo di grado $s/2$.

La (3.3) diviene:

$$(3.7)\qquad 2pqr\left[\left(\frac{B-C}{A}\right)\frac{\partial P}{\partial p^2}+\left(\frac{C-A}{B}\right)\frac{\partial P}{\partial q^2}+\left(\frac{A-B}{C}\right)\frac{\partial P}{\partial r^2}\right]=$$
$$=(ap+bq+cr)P\,.$$

L'identità tra i due polinomi, espressa dalla (3.7) non può realizzarsi se non quando i due polinomi sono identicamente nulli, perchè nessun monomio del primo polinomio è simile ad alcun monomio del secondo polinomio. Pertanto o è $P = 0$ oppure, essendo $\varrho = 0$, P è un integrale primo del sistema $\mathfrak{L}_1$ e quindi è $P = P(K, T)$.

Per quanto riguarda la seconda eventualità, si osserva che le quartiche, intersezione di (3.5) e (3.6), si spezzano solo quando è $\gamma_1 = 0$ e in tal caso esse sono le intersezioni di (3.6) con il piano $\alpha p + \beta r = 0$ oppure con il piano $\alpha p - \beta r = 0$.

Se la varietà contiene ∞^1 coniche di uno di questi piani, essa contiene il piano e, essendo irriducibile, coincide con esso.

In definitiva gli invarianti irriducibili sono $Q' \equiv \alpha p + \beta r$ e $Q'' \equiv \alpha p - \beta r$ con moltiplicatori bq e $-bq$ rispettivamente. Ogni altro invariante è quindi del tipo (3.4). Un controllo diretto permette di individuare l'espressione del moltiplicatore.

Qualora siano $Q_{s-2k,k}$ identicamente nulli per $k = 0, 1, \ldots, j-1$, la prima equazione delle (3.2) è

$$\mathfrak{L}_1 Q_{s-2j,j} + \mathfrak{L}_3 Q_{s-2j,j} = \varrho Q_{s-2j,j}\,. \tag{3.8}$$

Per essa sussiste il seguente

Teorema 4. Ogni soluzione non identicamente nulla con ϱ non identicamente nullo di (3.8) è del tipo:

$$Q_{s-2j,j} = \left(\alpha p + \frac{n}{|n|}\beta r\right)^{|n|} \bar{Q}_{s-|n|-2j,j}(K, K\cdot c, T, c)$$

$$\text{con } \varrho = nbq\,,\ n \neq 0 \in \mathbf{Z}\,,$$

$\bar{Q}_{s-|n|-2j,j}$ polinomio omogeneo di grado j in c_1, c_2, c_3 a coefficienti polinomiali omogenei in p, q, r e $c \equiv c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$.

Dim. Essendo

$$Q_{s-2j,j} = \sum_{\substack{h,k=0\\ h\geqslant k}}^{j} H_{j-h,h-k,k}(p, q, r)\, c_1^{j-h} c_2^{h-k} c_3^k$$

condizione necessaria affinchè $Q_{s-2j,j}$ sia soluzione di (3.8) è che

$$\Phi(p, q, r) = \sum_{\substack{h,k=0\\ h\geqslant k}}^{j} (j-h)!(h-k)!(k)!\, H^2_{j-h,h-k,k}(p, q, r) \tag{3.9}$$

verifichi l'equazione

$$\mathfrak{L}_1 \Phi = 2\varrho\Phi . \tag{3.10}$$

Infatti, dovendo la (3.8) essere identicamente verificata (in p, q, r, c_1, c_2, c_3), devono annullarsi (identicamente in p, q, r) i coefficienti di $c_1^{j-h}c_2^{h-k}c_3^k$ per ogni h, $k=0, \ldots, j$; $h \geqslant k$.

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1 H_{j-h,h-k,k} &+ (j-h+1)[rH_{j-h+1,h-k-1,k} - qH_{j-h+1,h-k,k-1}] + \\ &+ (h-k+1)[pH_{j-h,h-k+1,k-1} - rH_{j-h-1,h-k+1,k}] + \\ &+ (k+1)[qH_{j-h-1,h-k,k+1} - pH_{j-h,h-k-1,k+1}] = \varrho H_{j-h,h-k,k}\end{aligned} \tag{3.11}$$

convenendo che sia $H_{a_1,a_2,a_3} = 0$ se almeno una delle $a_i < 0$.

La (3.10) si ottiene moltiplicando ognuna delle (3.11) per $(k)!(h-k)!(j-h)!H_{j-h,h-k,k}$ e sommando.

Dal teorema 3 è dunque

$$\Phi = \left(\alpha p + \frac{m}{|m|}\beta r\right)^{|m|} P(K, T) , \qquad \varrho = \frac{m}{2} bq , \ m \neq 0 \in \mathbb{Z} . \tag{3.12}$$

Da (3.9) e (3.12), essendo $\alpha p + (m/|m|)\beta r$ uno zero reale di ordine $|m|$ per Φ si ha che $\alpha p + (m/|m|)\beta r$ è uno zero reale di ordine $|m|/2$ per ognuna delle $H_{j-h,h-k,k}$ e quindi $m = 2n$ e

$$H_{j-h,h-k,k} = \left(\alpha p + \frac{n}{|n|}\beta r\right)^{|n|} K_{j-h,h-k,k} .$$

Ne segue che è

$$Q_{s-2j,j} = \left(\alpha p + \frac{n}{|n|}\beta r\right)^{|n|} \bar{Q}_{s-|n|-2j,j} .$$

La (3.8) è verificata se e solo se è

$$\mathfrak{L}_1 \bar{Q}_{s-|n|-2j,j} + \mathfrak{L}_3 \bar{Q}_{s-|n|-2j,j} = 0$$

e quindi $\bar{Q}_{s-|n|-2j,j}$ deve essere un integrale primo del sistema di Poinsot-Poisson. Questo sistema ammette i quattro integrali primi polinomiali K,

$K \cdot c$, T, c e non ammette un ulteriore integrale primo polinomiale indipendente ([4]), onde l'asserto.

Dai teoremi 3 e 4 si ha dunque che la prima equazione non identicamente nulla delle (3.2) ha per soluzione:

$$(3.13) \qquad Q_{s-2j,j} = \left(\alpha p + \frac{n}{|n|}\beta r\right)^{|n|} \bar{Q}_{s-|n|-2j,j} \qquad (K, K \cdot c, T, c)\,,$$

$\varrho = nbq$, $n \neq 0 \in \mathbf{Z}$.

4. La successiva equazione delle (3.2) è:

$$(4.1) \qquad \mathcal{L}_1 Q_{s-2j-2,j+1} + \mathcal{L}_3 Q_{s-2j-2,j+1} = nbqQ_{s-2j-2,j+1} - \mathcal{L}_2 Q_{s-2j,j}$$

con $Q_{s-2j,j}$ dato da (3.13).

Per la (4.1) vale il seguente

TEOREMA 5. Condizione necessaria affinchè la (4.1) ammetta soluzione è che risulti $\mathcal{L}_2(\alpha p + (n/|n|)\beta r) = 0$. Questo avviene se e solo se sono verificate le condizioni $\xi_2 = 0$ e $\xi_3 C\alpha = (n/|n|)\,\xi_1 A\beta$.

Per la dimostrazione di questo teorema occorre premettere i seguenti lemmi:

LEMMA 4.1. L'equazione

$$(4.2) \qquad \mathcal{L}_1 Q_{h,k} + \mathcal{L}_3 Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h,k-1} K \cdot c + \omega_{h+1,k-2}\, c$$

$n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $\omega_{h,k}$ polinomi assegnati omogenei equipesati di grado h in p, q, r e di grado k in c_1, c_2, c_3 non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà V: $\alpha p + \beta r = 0$, $K \cdot c = 0$, $c = 0$; le sue eventuali soluzioni hanno dunque la forma:

$$(4.3) \qquad Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r) + Q_{h-1,k-1} K \cdot c + Q_{h,k-2}\, c\,.$$

([4]) L'esistenza di un ulteriore integrale primo polinomiale comporterebbe una periodicità nel moto che non si riscontra, e comporterebbe inoltre una dipendenza algebrica della soluzione generale dalle costanti di integrazione, fatto pure questo che non si riscontra nella espressione della soluzione generale ricavabile, come è noto, per quadrature.

DIM. L'equazione (4.2) comporta che la restrizione Q di $Q_{h,k}$ sulla varietà V sia un invariante con moltiplicatore che sia la restrizione su detta varietà di nbq.

La varietà V si spezza nelle due varietà:

$$V': \quad r = -\gamma p\,, \qquad c_2 = i\sqrt{c_1^2 + c_3^2}\,, \qquad q = p\,\frac{C\gamma c_3 - Ac_1}{iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}\,,$$

$$\tilde{V}': \quad r = -\gamma p\,, \qquad c_2 = -i\sqrt{c_1^2 + c_3^2}\,, \qquad q = p\,\frac{C\gamma c_3 - Ac_1}{-iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}\,,$$

con $\gamma = \alpha/\beta$.

Ciascuna di queste varietà risulta parametrizzata nei parametri p, c_1, c_3 e la restrizione del polinomio $Q_{h,k}$ espressa in funzione di questi parametri assume la forma (5):

$$Q = p^h\,\frac{[\pm i\sqrt{c_1^2 + c_3^2}\,P_1(c_1, c_3) + P_2(c_1, c_3)]}{(\pm iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2})^t} \tag{4.4}$$

con $t \leqslant h$, P_1 e P_2 polinomi omogenei di grado $t + k - 1$ e $t + k$ rispettivamente. La restrizione dell'operatore $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3$ (5) è:

$$\dot{p} = -\frac{B - C}{A}\,\gamma\,\frac{C\gamma c_3 - Ac_1}{\pm iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}\,p^2\,,$$

$$\dot{c}_1 = \frac{B\gamma c_1^2 + Ac_1c_3 + \gamma(B - C)\,c_3^2}{\pm iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}\,p\,,$$

$$\dot{c}_3 = \frac{(B - A)\,c_1^2 + C\gamma c_1c_3 + Bc_3^2}{\pm iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}\,p\,.$$

L'equazione (4.2) comporta che P_1 e P_2 verifichino le equazioni

$$\begin{aligned}(B\gamma c_1^2 + Ac_1c_3 + \gamma(B - C)\,c_3^2)\,\frac{\partial P_a}{\partial c_1} &+ \\ &+ ((B - A)\,c_1^2 + C\gamma c_1c_3 + Bc_3^2)\,\frac{\partial P_a}{\partial c_3} = \varrho_a P_a\,,\end{aligned}$$

(5) I segni $+$ e $-$ si hanno nelle restrizioni su V' e $\tilde{V}'$ rispettivamente.

$a = 1, 2$ con

$$\varrho_1 = c_1\gamma[B(t-h-n-1) + C(h+n)] + \\ + c_3[B(t-h-n-1) + A(h+n)]$$

e

$$\varrho_2 = c_1\gamma[B(t-h-n) + C(h+n)] + c_3[B(t-h-n) + A(h+n)] .$$

Essi devono dunque essere invarianti del sistema

$$\dot{c}_1 = B\gamma c_1^2 + Ac_1c_3 + \gamma(B-C)c_3^2$$
$$\dot{c}_3 = (B-A)c_1^2 + C\gamma c_1c_3 + Bc_3^2$$

con moltiplicatori ϱ_1 e ϱ_2 rispettivamente.

Dalla teoria dei raggi invarianti ([6]) si riconosce che il sistema ammette i tre invarianti irriducibili:

$I_1 \equiv c_1 + ic_3$

con moltiplicatore $\quad c_1[B\gamma + i(A-B)] + c_3[B + i\gamma(B-C)]$

$I_2 \equiv c_1 - ic_3$

con moltiplicatore $\quad c_1[B\gamma - i(A-B)] + c_3[B - i\gamma(B-C)]$

$I_3 \equiv (A-B)c_1 + \gamma(B-C)c_3$

con moltiplicatore $\quad C\gamma c_1 + Ac_3 .$

Ogni altro invariante ha per moltiplicatore una somma dei moltiplicatori trovati. Con nessuna somma di questo tipo è però possibile ottenere i moltiplicatori ϱ_1 e ϱ_2; ne consegue che P_1 e P_2 sono identicamente nulli; è pertanto nullo Q e quindi $Q_{h,k}$ ha la forma (4.3).

LEMMA 4.II. L'equazione

$$\mathfrak{L}_1Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h,k-1}k\cdot c + \omega_{h-1,k}T \tag{4.5}$$

$n \geqslant 1$, $h \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla

([6]) Cfr. [7], pag. 63.

varietà $W: \alpha p + \beta r = 0$, $K \cdot c = 0$, $T = 0$. Le eventuali soluzioni hanno dunque la forma:

$$Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r) + Q_{h-1,k-1} K \cdot c + Q_{h-2,k} T \,. \tag{4.6}$$

DIM. L'equazione (4.5) comporta che la restrizione $\bar{Q}$ di $Q_{h,k}$ sulla varietà W sia un invariante con moltiplicatore che sia la restrizione su detta varietà di nbq.

La varietà W si spezza nelle tre varietà:

$$W': \quad p = q = r = 0 \,,$$

$$W'': \quad p = -\frac{\beta}{\alpha} r \,, \qquad q = -i \frac{\mu}{\lambda} r \,, \qquad c_3 = \frac{A\beta}{C\alpha} c_1 - i \frac{B\mu}{C\lambda} c_2 \,,$$

$$\tilde{W}'': \quad p = -\frac{\beta}{\alpha} r \,, \qquad q = i \frac{\mu}{\lambda} r \,, \qquad c_3 = \frac{A\beta}{C\alpha} c_1 + i \frac{B\mu}{C\lambda} c_2 \,,$$

con $\mu = \sqrt{C(A-C)}$ e $\lambda = \sqrt{B(A-B)}$.

Essendo $h \geqslant 1$ la restrizione di $Q_{h,k}$ su W' è nulla.

Le varietà W'' e $\tilde{W}''$ sono parametrizzate nei parametri r, c_1, c_2 e la restrizione di $Q_{h,k}$ su dette varietà assume la forma:

$$\bar{Q} = r^h P_k(c_1, c_2) \tag{4.7}$$

con P_k polinomio omogeneo di grado k.

L'operatore $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3$ ha come restrizione:

$$\dot{r} = \mp i \sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AB}}\, r^2 \,,$$

$$\dot{c}_1 = \pm i \frac{r}{A-B} \sqrt{A(B-C)} \left(- \sqrt{\frac{A-C}{B}}\, c_1 \pm i \sqrt{\frac{B-C}{A}}\, c_2 \right),$$

$$\dot{c}_2 = \frac{r}{A-B} \sqrt{B(A-C)} \left(- \sqrt{\frac{A-C}{B}}\, c_1 \pm i \sqrt{\frac{B-C}{A}}\, c_2 \right),$$

dove il segno superiore vale per la restrizione su W'' e quello inferiore per la restrizione su $\tilde{W}''$.

Si consideri la restrizione di $Q_{h,k}$ su W''; l'equazione (4.5) si traduce nella

$$\left(\frac{i}{A-B}\sqrt{A(B-C)}\frac{\partial P_k}{\partial c_1}+\frac{\sqrt{B(A-C)}}{A-B}\frac{\partial P_k}{\partial c_2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\sqrt{\frac{A-C}{B}}c_1+i\sqrt{\frac{B-C}{A}}c_2\right)=i(h+n)\sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AB}}P_k$$

e comporta quindi che P_k sia un invariante del sistema

$$\dot c_1=\frac{i}{A-B}\sqrt{A(B-C)}\left(-\sqrt{\frac{A-C}{B}}c_1+i\sqrt{\frac{B-C}{A}}c_2\right),$$
$$\dot c_2=\frac{1}{A-B}\sqrt{B(A-C)}\left(-\sqrt{\frac{A-C}{B}}c_1+i\sqrt{\frac{B-C}{A}}c_2\right),$$

con moltiplicatore

$$i(h+n)\sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AB}}\,.$$

Dalla teoria dei raggi invarianti si riconosce che il sistema ammette i due invarianti irriducibili:

$$I_1'\equiv-\sqrt{\frac{A-C}{B}}c_1+ic_2\sqrt{\frac{B-C}{A}}$$
$$\text{con moltiplicatore } -i\sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AB}}\,,$$

$$I_2'\equiv\sqrt{B(A-C)}\,c_1-ic_2\sqrt{A(B-C)}\qquad\text{con moltiplicatore } 0\,.$$

In nessun modo è possibile ottenere il moltiplicatore assegnato come somma dei moltiplicatori. Analogo ragionamento può ripetersi per la varietà $\tilde W''$. Si deduce quindi che è nulla la restrizione di $Q_{h,k}$ su W per cui vale la (4.6).

LEMMA 4.III. L'equazione

$$\mathfrak{L}_1Q_{h,k}+\mathfrak{L}_3Q_{h,k}=nbqQ_{h,k}+\omega_{h,k}(\alpha p+\beta r)+\omega_{h,k-1}K\cdot c \tag{4.8}$$

$n\geqslant 1$, $k\geqslant 1$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà U:

$\alpha p + \beta r = 0$, $K \cdot c = 0$. Le eventuali soluzioni hanno dunque la forma:

$$Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r) + Q_{h-1,k-1} K \cdot c \,. \tag{4.9}$$

DIM. In base al lemma 4.I il polinomio $Q_{h,k}$ ha la forma (4.3).

Supposto per assurdo che $Q_{h,k-2}$ non sia identicamente nullo su U la sua restrizione $\overline{\overline{Q}}$ deve essere, in base alla equazione (4.8) un invariante per la restrizione di $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3$ con moltiplicatore la restrizione di nbq; infatti c è un integrale primo anche del sistema ridotto. Posto $\overline{\overline{Q}} = c^j \overline{\overline{Q}}'$ con $j \geqslant 0$ e $\overline{\overline{Q}}'$ non divisibile per c, $\overline{\overline{Q}}'$ interseca la varietà $c = 0$ dando luogo ad un invariante del tipo (4.4) sulla varietà V. Poichè, come si è visto, un siffatto invariante non esiste, è assurda l'ipotesi che $Q_{h,k-2}$ non sia identicamente nullo sulla varietà U; è quindi

$$Q_{h,k-2} = Q_{h-1,k-2}(\alpha p + \beta r) + Q_{h-1,k-3} k \cdot c \,.$$

onde l'asserto.

In maniera analoga si dimostrano i seguenti lemmi:

LEMMA 4.IV. L'equazione

$$\mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h-1,k} c$$

$n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà U': $\alpha p + \beta r = 0$, $c = 0$. Le eventuali soluzioni hanno quindi la forma:

$$Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r) + Q_{h,k-2} c \,.$$

LEMMA 4.V. L'equazione

$$\mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h-1,k} T$$

$n \geqslant 1$; h, $k \geqslant 1$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà U'': $\alpha p + \beta r = 0$, $T = 0$. Le eventuali soluzioni hanno dunque la forma:

$$Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r) + Q_{h-2,k} T \,.$$

LEMMA 4.VI. L'equazione

$$\mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r)$$

$n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà $\alpha p + \beta r = 0$. Le eventuali soluzioni hanno dunque la forma:

$$Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r)\,.$$

Con iterate applicazioni dei lemmi precedenti si dimostrano i due seguenti

LEMMA 4.VIII. Ogni eventuale soluzione $Q_{h,k}$ di

$$\begin{aligned}(4.10)\qquad & \mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \\ & + \omega_{h-m_1+1,k}(\alpha p + \beta r)^{m_1} + \omega_{h+1-m_2,k-m_2} K\cdot c^{m_2} + \omega_{h+1,k-2m_3} c^{m_3}\end{aligned}$$

$n, k, m_1, m_2, m_3 \geqslant 1$ ha la forma:

$$(4.11)\qquad Q_{h,k} = Q_{h-l,k}(\alpha p + \beta r)^l + Q_{h-m_2,k-m_2} K\cdot c^{m_2} + Q_{h,k-2m_3} c^{m_3}$$

$l = \min(n, m_1)$, con $Q_{h-m_2,k-m_2} = 0$ se è $\omega_{h+1-m_2,k-m_2} = 0$ o $h - m_2 + 1 = 0$ e con $Q_{h,k-2m_3} = 0$ se è $\omega_{h+1,k-2m_3} = 0$.

LEMMA 4.VIII. Ogni eventuale soluzione $Q_{h,k}$ di

$$\begin{aligned}(4.12)\qquad & \mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = nbqQ_{h,k} + \omega_{h-m_1+1,k}(\alpha p + \beta r)^{m_1} + \\ & \qquad + \omega_{h+1-m_2,k-m_2} K\cdot c^{m_2} + \omega_{h+1-2m_4,k} T^{m_4}\,,\end{aligned}$$

con $h, n, k, m_1, m_2, m_4 \geqslant 1$ ha la forma:

$$(4.13)\qquad Q_{h,k} = Q_{h-l,k}(\alpha p + \beta r)^l + Q_{h-m_2,k-m_2} K\cdot c^{m_2} + Q_{h-2m_4,k} T^{m_4}$$

con $Q_{h-m_2,k-m_2} = 0$ se $\omega_{h+1-m_2,k-m_2} = 0$ o $h - m_2 + 1 = 0$ e con $Q_{h-2m_4,k} = 0$ se $\omega_{h+1-2m_4,k} = 0$ o $h - 2m_4 + 1 = 0$.

LEMMA 4.IX. L'equazione

$$(4.14)\qquad \mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h,k-1} K\cdot c + \omega_{h+1,k-2} c$$

$k \geqslant 1$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà V. Le eventuali soluzioni hanno dunque la forma (4.3).

DIM. $Q_{h,k}$ deve essere tale che la sua restrizione su V sia un integrale primo algebrico e quindi una funzione algebrica ψ della restrizione di T su detta varietà, essendo T l'unico integrale primo algebrico su questa varietà. La restrizione di T su V (parametrizzata in p, c_1, c_3) è

$$\overline{T}(p, c_1, c_2) = p^2 \frac{(C\gamma c_1 + Ac_3)^2}{+ B(c_1^2 + c_3^2)}$$

mentre la restrizione di $Q_{h,k}$ è data da (4.4). Si riconosce che è $\psi \equiv 0$. Infatti per ottenere che $\psi(\overline{T}(p, c_1, c_3))$ sia del tipo (4.4) è necessario che sia $\psi(\overline{T}) = \mu_0 \overline{T}^{h/2}$ e che sia

$$\mu_0 \frac{(C\gamma c_1 + Ac_3)^h}{[-B(c_1^2 + c_3^2)]^{h/2}} = \frac{\pm i\sqrt{c_1^2 + c_3^2}\, P_1(c_1, c_3) + P_2(c_1, c_3)}{[\pm iB\sqrt{c_1^2 + c_3^2}]^t} .$$

Poichè P_2 è un polinomio omogeneo di grado $t + k$ questa relazione è verificata soltanto se è $\mu_0 = 0$, $P_1 \equiv P_2 \equiv 0$.

Essendo nulla la restrizione su V, $Q_{h,k}$ ha la forma (4.3).

Lemma 4.X. L'equazione

$$\mathcal{L}_1 Q_{h,k} + \mathcal{L}_3 Q_{h,k} = \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h,k-1} K \cdot c + \omega_{h-1,k} T$$

h, $k \geqslant 1$ non ammette soluzioni che non siano nulle sulla varietà W. Le eventuali soluzioni hanno dunque la forma (4.6).

Dim. $Q_{h,k}$ ha restrizione nulla su W', ed ha restrizione del tipo (4.7) su W'' e $\tilde{W}''$ (parametrizzate in r, c_1, c_2). Poichè, come si controlla agevolmente, non è possibile ottenere (essendo $h \geqslant 1$) $\overline{Q}$ come funzione algebrica della restrizione di c (7) su W'' o $\tilde{W}''$, si riconosce, essendo nulla restrizione di $Q_{h,k}$ su W, la validità della (4.6).

Lemma 4.XI. Ogni eventuale soluzione $Q_{h,k}$ di

$$\mathcal{L}_1 Q_{h,k} + \mathcal{L}_3 Q_{h,k} = \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r) + \omega_{h,k-1} K \cdot c$$

$k \geqslant 1$ è del tipo

$$Q_{h,k} = Q_{h-1,k}(\alpha p + \beta r) + Q_{h-1,k-1} K \cdot c + Q_{0,0} T^{h/2} c^{k/2} \tag{4.15}$$

con $Q_{0,0}$ costante nulla se h o k sono dispari.

(7) c è l'unico integrale primo algebrico sulla varietà W.

DIM. La restrizione sulla varietà U di $Q_{h,k}$ deve essere un integrale primo algebrico e quindi una funzione algebrica φ della restrizione di T e c su detta varietà (8). Parametrizzata U in p, c_1, c_2, c_3, c coincide con la sua restrizione, mentre le restrizioni di T e $Q_{h,k}$ sono rispettivamente:

$$\overline{\overline{T}} = p^2[(A + C\gamma^2)B^2c_2^2 + B(C\gamma c_3 - Ac_1)^2]/Bc_2^2$$

$$\overline{Q} = p^h P(c_1, c_2, c_3)/(Bc_2)^t \qquad P \text{ polinomio di grado } t + k,\ t \leqslant h.$$

Si riconosce che è

$$\overline{\overline{Q}} = \varphi(\overline{\overline{T}}, c) = \mu_0\, \overline{\overline{T}}^{h/2} c^{k/2} \qquad \mu_0 = \text{costante}.$$

Risulta nulla su U la restrizione di $Q_{h,k} - Q_{0,0}T^{h/2}c^{k/2}$ e quindi $Q_{h,k}$ ha la forma (4.15).

LEMMA 4.XII. Ogni eventuale soluzione $Q_{h,k}$ di

$$\mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = \omega_{h,k}(\alpha p + \beta r)$$

è del tipo

$$Q_{h,k} = (\alpha p + \beta r) Q_{h-1,k} + P(K\cdot c, T, c)\,. \tag{4.16}$$

DIM. $Q_{h,k}$ deve essere tale che la sua restrizione sulla varietà $\alpha p + \beta r = 0$ sia un integrale primo polinomiale e quindi una funzione polinomiale delle restrizioni su $\alpha p + \beta r = 0$ di $K\cdot c$, T, c che, come si riconosce, sono polinomiali (9). Risulta dunque nulla su $\alpha p + \beta r = 0$ la restrizione di $Q_{h,k} - P(K\cdot c, T, c)$ essendo P un polinomio omogeneo equipesato. Ne segue che $Q_{h,k}$ è del tipo (4.16).

OSSERVAZIONE. Considerando invece di $Q' \equiv \alpha p + \beta r$, $Q'' \equiv \alpha p - \beta r$ si ottengono con gli stessi procedimenti dei lemmi analoghi ai precedenti 4.IX, 4.X, 4.XI, 4.XII.

LEMMA 4.XIII. Ogni eventuale soluzione $Q_{h,k}$ di

$$\mathfrak{L}_1 Q_{h,k} + \mathfrak{L}_3 Q_{h,k} = \omega_{h+1-2m,k}(\alpha p + \beta r)^m(\alpha p - \beta r)^m$$

(8) T e c sono i soli integrali primi algebrici sulla varietà U.
(9) $K\cdot c$, T, c sono i soli integrali primi polinomiali sulla varietà $\alpha p + \beta r = 0$.

è del tipo

$$Q_{h,k} = (\alpha p + \beta r)^m (\alpha p - \beta r)^m Q_{h-2m,k} + P(K, K\cdot c, T, c) .$$

La dimostrazione si ottiene con iterate applicazioni del lemma 4.XII, e utilizzando l'osservazione precedente.

DIM. TEOREMA 5. Si dimostra questo teorema nel caso $n \geqslant 0$, essendo l'altro caso perfettamente analogo.

Scritto

$$Q_{s-2j,j} = (\alpha p + \beta r)^{n+m} (\alpha p - \beta r)^m \bar{Q}_{s-2(j+m)-n,j}(K, K\cdot c, T, c) \qquad m \geqslant 0$$

$\bar{Q}_{s-2(j+m)-n,j}$ primo rispetto a K, nella (4.1) $\mathcal{L}_2 Q_{s-2j,j}$ assume la forma esplicita:

$$(4.17') \quad \mathcal{L}_2 Q_{s-2j,j} = (\alpha p + \beta r)^{n+m-1} (\alpha p - \beta r)^{m-1} \{\Omega'(\alpha p + \beta r) + (n+m)\cdot \\ \cdot (\alpha p - \beta r)\mathcal{L}_2(\alpha p + \beta r)[\omega_1' K\cdot c + \omega_2' T + \omega_3' c]\} \qquad \text{se } m \geqslant 1$$

e

$$(4.17'') \quad \mathcal{L}_2 Q_{s-2j,j} = (\alpha p + \beta r)^{n-1} \{\Omega''(\alpha p + \beta r) + n\mathcal{L}_2(\alpha p + \beta r)\cdot \\ \cdot [\omega_1'' K\cdot c + \omega_2'' T]\} \qquad \text{se } m = 0.$$

I polinomi ω' e ω'' sono omogenei ed equipesati e le forme tra parentesi quadra sono omogenee ed equipesate ([10]); tali che

$$\omega_1' = \omega_1'(K\cdot c, T, c) , \qquad \omega_2' = \omega_2'(T, c) , \qquad \omega_3' = \omega_3'(c) ,$$
$$\omega_1'' = \omega_1''(K\cdot c, T, c) , \qquad \omega_2'' = \omega_2''(T, c) .$$

Escluso il caso in cui sia $\mathcal{L}_2 Q_{s-2j,j}$ identicamente nullo (nel qual caso è ovvia la necessità della condizione $\mathcal{L}_2(\alpha p + \beta r) = 0$), utilizzando i lemmi 4.VII e 4.XIII, si riconosce che la (4.1) è verificata se è $m > 0$ se e solo se è

$$Q_{s-2(j+1),j+1} = (\alpha p + \beta r)^n [K^{m-1} Q_{s-2(j+m)-n,j+1} + P(K, K\cdot c, T, c)]$$

([10]) Si osservi che, essendo $Q_{s-2(j+m)-n,j}$ primo rispetto a K le forme tra parentesi quadra non sono identicamente nulle.

con $Q_{s-2(j+m)-n,j+1}$ soluzione di

$$(4.18') \qquad \mathfrak{L}_1 Q_{s-2(j+m)-n,j+1} + \mathfrak{L}_3 Q_{s-2(j+m)-n,j+1} = -\Phi'$$

se è $m=0$ se e solo se è

$$Q_{s-2(j+1),j+1} = (\alpha p + \beta r)^{n-1} Q_{s-2j-n-1,j+1}$$

con $Q_{s-2j-n-1,j+1}$ soluzione di

$$(4.18'') \qquad \mathfrak{L}_1 Q_{s-2j-n-1,j+1} + \mathfrak{L}_3 Q_{s-2j-n-1,j+1} = bqQ_{s-2j-n-1,j+1} - \Phi''$$

in cui per brevità si sono indicati con Φ' e Φ'' i termini tra parentesi graffa in (4.17′) e (4.17″) rispettivamente.

Caso $m > 0$ — equazione (4.18′).

Essendo $\omega_3' = \gamma_0 c^{j/2-1}$ con γ_0 costante si hanno le due eventualità: $\gamma_0 = 0$ (necessariamente per j dispari) oppure $\gamma_0 \neq 0$.

L'eventualità $\gamma_0 \neq 0$ si ha se e solo se, essendo la forma tra parentesi quadra in (4.17′) pura in c, è $s - 2(j+m) - n = 0$; si ha allora anche $\omega_2' = \omega_3' = 0$ e $\bar{Q}_{0,j} = \gamma_0 c^{j/2}$.

La (4.18′ assume la forma semplificata:

$$\mathfrak{L}_3 Q_{0,j+1} = -c^{j/2}\gamma_0[(n+m)(\alpha p - \beta r)\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) + \\ + m(\alpha p + \beta r)\mathfrak{L}_2(\alpha p - \beta r)]$$

Con una verifica diretta si riconosce che affinchè questa equazione abbia soluzione è necessario che sia $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ e quindi in particolare $\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) = 0$.

Nell'eventualità $\gamma_0 = 0$ è $s - 2(j+m) - n \geqslant 1$. Essendo $\omega_2' = \gamma_1 T^{(s-2(j+m)-n)/2-1} c^{j/2}$ con γ_1 costante si hanno le due eventualità $\gamma_1 = 0$ o $\gamma_1 \neq 0$.

Se $\gamma_1 \neq 0$ (caso che avviene solo per $s-n$ e j pari), dai lemmi 4.IX e 4.X applicati iterativamente si ha:

$$Q_{s-2(j+m)-n,j+1} = Q_{s-2(j+m)-n-1,j+1}(\alpha p + \beta r) + Q_{s-2(j+m)-n-1,j} K \cdot c + \\ + Q_{0,1} T^{(s-2(j+m)-n)/2} c^{j/2}.$$

Sostituendo in (4.18′) si ottiene

$$\mathfrak{L}_3 Q_{0,1} = \gamma_1(\alpha p - \beta r)\,\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) + \mu_0 K\cdot c + \mu_1(\alpha p + \beta r)$$

con μ_0 costante e μ_1 forma lineare in c_1, c_2, c_3.

Con una verifica diretta si riconosce che affinchè questa equazione abbia soluzione è necessario che risulti $\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) = 0$.

Se è $\gamma_1 = 0$ si riconosce dal lemma 4.XI che è

$$Q_{s-2(j+m)-n,j+1} = Q_{s-2(j+m)-n-1,j+1}(\alpha p + \beta r) + Q_{s-2(j+m)-n-1,j} K\cdot c + \\ + Q_{0,0} T^{(s-2(j+m)-n)/2} c^{(j+1)/2}$$

con $Q_{0,0} = 0$ se $s - n$ o $j + 1$ sono dispari.

Dalla (4.18′) si ha

$$\mathfrak{L}_1 Q_{s-2(j+m)-n-1,j} + \mathfrak{L}_3 Q_{s-2(j+m)-n-1,j} = -\psi'$$

con ψ' che ha la stessa forma di Φ'.

Procedendo in analogia a sopra con successive applicazioni, si arriva a considerare il caso in cui sia:

$$\omega_1' = \gamma_2 K\cdot c^{j-2v-1} T^a c^v \qquad a = (s - 3 - 2m + 2v - n)/2$$

con γ_2 costante non nulla.

Applicando iterativamente il lemma 4.XI risulta

$$Q_{s-2(j+m)-n,j+1} = Q_{s-2(j+m)-n-1,j+1}(\alpha p + \beta r) + Q_{2a,2v+1} K\cdot c^{j-2v} + \\ + Q_{0,0} T^{(s-2(j+m)-n)/2} c^{(j+1)/2}$$

e dalla (4.18′) si ha

$$\mathfrak{L}_1 Q_{2a,2v+1} + \mathfrak{L}_3 Q_{2a,2v+1} = \\ = \gamma_2 T^a(\alpha p - \beta r) \subset^v (n + m)\,\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) + \Omega^*(\alpha p + \beta r)\,. \tag{4.19}$$

Se è $a = 0$ la (4.19) è verificata, come si è già riconosciuto, solo se è $\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) = 0$; la stessa condizione si riconosce anche nel caso $a > 0$, utilizzando il lemma 4.X.

Caso $m = 0$ — equazione (4.18″).

Essendo $\omega_2'' = \delta_1 c^{j/2} T^{(s-2j-n)/2-1}$ con δ_1 costante si hanno le due eventualità $\delta_1 = 0$ (necessariamente per j o $s - n$ dispari) oppure $\delta_1 \neq 0$. Se è $\delta_1 \neq 0$, $Q_{s-2j-n-1,j+1}$ per il lemma 4.VIII è della forma

$$(4.20) \qquad Q_{s-2j-n-1,j+1} = Q_{s-2j-n-2,j+1}(\alpha p + \beta r) + Q_{s-2j-n-2,j} K\cdot c\,.$$

Si riconosce agevolmente che, affinchè la (4.18″) sia verificata deve risultare $\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) = 0$.

Se è $\delta_1 = 0$ dal lemma 4.VII $Q_{s-2j-n-1,j+1}$ ha ancora la forma (4.20), e dalla (4.18″) si ha

$$\mathfrak{L}_1 Q_{s-2j-n-2,j} + \mathfrak{L}_3 Q_{s-2j-n-2,j} = bq Q_{s-2j-n-2,j} - \psi''$$

con ψ'' polinomio che ha la stessa forma di Φ''.

Procedendo in analogia a sopra con successive applicazioni ci si riporta a considerare il solo caso in cui sia

$$\omega_1'' = \delta_2 K\cdot c^{j-2v-1} T^a c^v\,, \qquad \delta_2 \neq 0\,, \qquad a = (s - 3j - n + 2v)/2\,.$$

Dai lemmi 4.VII e 4.VIII si ha

$$Q_{s-2j-n-1,j+1} = (\alpha p + \beta r) Q_{s-2j-n-2,j+1}\,.$$

Affinchè la (4.18″) sia verificata è agevole riconoscere che deve risultare $\mathfrak{L}_2(\alpha p + \beta r) = 0$.

5. Si è riconosciuto che un invariante polinomiale può sussistere soltanto se il corpo rigido è sospeso in modo da verificare le condizioni $\xi_2 = 0$ $\alpha C \xi_3 = (n/|n|)\beta A \xi_1$ e cioè di soddisfare la condizione di Hess [8]; a detto invariante è associato il moltiplicatore nbq.

Per il solido sospeso alla Hess, come è noto, sussiste l'invariante $I_1 = (\alpha p + (n/|n|)\beta r)^{|n|}$ con moltiplicatore nbq.

Ogni altro invariante I_2 con moltiplicatore nbq è tale che

$$I_2/I_1 = \text{costante}$$

è un integrale primo del sistema di Eulero Poisson.

È noto altresì che il sistema di Eulero Poisson non ammette integrali primi fratti che non siano funzioni dei tre integrali primi polinomiali E, $K\cdot c$, c [9].

Si conclude quindi che è

$$I_2 = I_1 P(K\cdot c,\, T - U,\, c)\,.$$

Si può quindi enunciare il

TEOREMA 6. L'unico invariante polinomiale irriducibile per il sistema di Eulero Poisson è $I = \alpha p + (n/|n|)\beta r$; questo invariante sussiste se e solo se il corpo rigido asimmetrico è sospeso in modo che sia verificata la condizione di Hess:

$$\xi_2 = 0\,, \qquad \alpha C \xi_3 = (n/|n|)\beta A \xi_1$$

$\left(\alpha = \sqrt{A(A-B)},\ \beta = \sqrt{C(A-C)}\right)$ ed è l'invariante di Hess.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Celeste*, Dover Publications (1957).

[2] E. Husson, *Recherche des Intégrales Algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **2**, 8 (1906).

[3] P. Burgatti, *Dimostrazione della non esistenza di integrali algebrici* (*oltre i noti*) *nel problema del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **29** (1910).

[4] F. Quatela, *Estensione di una dimostrazione del Burgatti nel problema del giroscopio pesante*, Giorn. Mat. Battaglini, **67** (1929).

[5] W. Grobner, *Serie di Lie e loro applicazioni*, Ed. Cremonese, serie Poliedro 18, Roma (1973).

[6] E. Leimanis, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*, Springer Tracts in Nat. Phil., **7** (1965).

[7] G. Sansone - R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Ed. Cremonese, Roma (1956).

[8] T. Levi-Civita - U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Zanichelli, Bologna (1974).

[9] R. Liuoville, *Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points*, Acta Mat., **20** (1897).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1981.