Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Maurizio Trombetta

Sulle topologie collegate con la convergenza puntuale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 73-83

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__73_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

Sulle topologie collegate con la convergenza puntuale.

MAURIZIO TROMBETTA (*)

SUMMARY - Let $\mathcal{H}$ be a set of mappings $X \to Y$ (X any set, Y any topological space). We find necessary and sufficient conditions in order that the topology in $\mathcal{H}$ induced by the product topology of Y^X be the finest among the pointwise-convergence topologies. We deal also with some hereditarity questions in such situations.

1. Introduzione.

In un insieme di funzioni è talvolta (cfr. per es. [1]) chiamata *topologia della convergenza puntuale* una topologia τ_0 (vedi n. 2) dalla quale si deduce la *convergenza puntuale*, trascurando di rilevare il fatto che τ_0 non è, in generale (e nei casi più interessanti), nè l'unica nè la più fine delle topologie dalle quali si deduce una tale convergenza.

Più precisamente: da ogni *struttura di convergenza* λ si *deduce* (cfr. [2]) una topologia $T(\lambda)$ che è la più fine fra quelle, se esistono, nelle quali la convergenza è quella data; ora, la topologia dedotta in tal senso dalla convergenza puntuale non è, in generale, la τ_0.

In questo lavoro, dimostro dapprima (n. 2), mediante due esempi, che, detta $\mathring{\lambda}$ la convergenza puntuale in un insieme $\mathcal{H}$ di funzioni, può aversi $T(\mathring{\lambda}) \neq \tau_0$; e ciò persino nel caso delle funzioni continue definite in $\mathbf{R}$ e a valori reali.

Successivamente (n. 3), stabilisco alcune condizioni per l'uguaglianza $T(\mathring{\lambda}) = \tau_0$, fra le quali una necessaria e sufficiente relativa al

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Trieste, Piazzale Europa 1 - 34127 Trieste.

caso in cui $\mathcal{H}$ sia l'insieme di *tutte* le funzioni definite in un insieme X e con valori in uno spazio topologico Y. Tale risultato prova che l'uguaglianza in questione sussiste soltanto in casi assai poco interessanti. Per esempio, se Y è uno spazio metrico, la topologia dedotta dalla convergenza puntuale, nell'insieme di tutte le funzioni di X in Y, è la τ_0 se e solo se X è (al più) numerabile.

Ho infine affrontato (n. 4) due problemi che si pongono in maniera naturale e riguardano il passaggio da un insieme $\mathcal{H}$ di funzioni ad un suo sottoinsieme $\mathcal{H}'$. Si chiede, precisamente, se la topologia $T(\dot{\lambda})$ per $\mathcal{H}'$ è quella subordinata dalla $T(\dot{\lambda})$ di $\mathcal{H}$ (cosa che si constata immediatamente per la topologia τ_0) e se dall'uguaglianza $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ per $\mathcal{H}$ si ottiene l'analoga uguaglianza anche per $\mathcal{H}'$. Ora dimostro, mediante un esempio, che la risposta ad entrambi i problemi è negativa.

2. Le topologie τ_0 e $T(\dot{\lambda})$.

Sia $\mathcal{H}$ un insieme di funzioni definite in un insieme X e a valori in uno spazio topologico Y. Indichiamo con $\dot{\lambda}$ la struttura di convergenza (nel senso accettato in [2]) che si ottiene dalla convergenza puntuale delle funzioni appartenenti ad $\mathcal{H}$ e scriviamo, eventualmente, $(f_n) \dashrightarrow f_0$ per indicare che la successione di funzioni $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione f_0.

Definizione 1. *La topologia* τ_0. Indicheremo con τ_0 la *topologia della convergenza puntuale* nel senso di Kelley ([1]). Se $f_0 \in \mathcal{H}$, una base di suoi τ_0-intorni è data dagli insiemi del tipo

$$V^{B_1 B_2 \ldots B_n}_{x_1 x_2 \ldots x_n}(f_0) = \{f \in \mathcal{H}\colon f(x_i) \in B_i;\ i = 1, 2; \ldots n\}$$

dove gli x_i sono n arbitrari punti di X e, per ogni i, B_i è un arbitrario intorno di $f_0(x_i)$ in Y.

In particolare, se Y è uno spazio metrico, una base di τ_0-intorni per f_0 è data dagli insiemi del tipo

$$V^{\varepsilon}_{x_1 x_2 \ldots x_n}(f_0) = \{f \in \mathcal{H}\colon |f(x_i), f_0(x_i)| < \varepsilon;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

con $x_i \in X$ ed ε numero reale positivo arbitrario. Come ben si vede, si tratta della topologia subordinata su $\mathcal{H}$ dalla topologia prodotto di Y^X.

DEFINIZIONE 2. *La topologia* $T(\dot{\lambda})$. Indichiamo con $T(\dot{\lambda})$ la topologia dedotta dalla struttura di convergenza $\dot{\lambda}$ nel senso accettato in [2]. In tale topologia, un insieme $A(\subset \mathcal{H})$ è aperto se e solo se, da $(f_n) \dot{\to} f_0 \in A$, con $f_n \in \mathcal{H}$ per ogni n, si ha che la successione (f_n) finisce in A.

L'insieme $\mathcal{H}$, con tale topologia, è quindi uno *spazio sequenziale.* Ne viene che, in questo caso, i chiusi di $\mathcal{H}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi *sequenzialmente chiusi.*

DEFINIZIONE 3. Data una topologia τ su un insieme E, indicheremo con $L(\tau)$ la struttura di convergenza da essa dedotta.

Ricordiamo che sussiste il

TEOREMA 1. *Qualunque sia l'insieme* $\mathcal{H} \subset Y^X$, *si ha* $L(\tau_0) = \dot{\lambda}$.

DIM. *a*) Se $(f_n) \to f_0$, in $L(\tau_0)$, la (f_n) finisce in ogni τ_0-intorno di f_0 e quindi, in particolare, in ogni intorno del tipo

$$V_x^B(f_0) = \{f \in \mathcal{H} \colon f(x) \in B\}\,,$$

con $x \in X$ e B arbitrario intorno di $f_0(x)$. Dunque, per ogni x, $\big(f_n(x)\big) \to$ $\to f_0(x)$, ossia $(f_n) \dot{\to} f_0$.

b) Sia ora $(f_n) \dot{\to} f_0$. Fissiamo un τ_0-intorno di f_0, che si può pensare del tipo $V_{x_1 x_2 \dots x_k}^{B_1 B_2 \dots B_k}(f_0)$, con il solito significato dei simboli. Esistono k interi $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ tali che, per $n > \nu_i$, è $f_n(x_i) \in B_i$. Dunque, per $n > \max\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k\}$ è

$$f_n \in V_{x_1 x_2 \dots x_k}^{B_1 B_2 \dots B_k}(f_0)\,.$$

Si conclude che la successione di funzioni (f_n) è $L(\tau_0)$-convergente ad f_0, dato che finisce in ogni suo τ_0-intorno. c.v.d.

Da questo Teorema si ricava che:

La struttura di convergenza $\dot{\lambda}$ *è deducibile da topologie.*

E quindi, dato che ([2]),

Condizione necessaria e sufficiente offinchè una struttura di convergenza λ *sia deducibile da topologie è che risulti* $LT(\lambda) = \lambda$, si conclude col

COROLLARIO 2. *È sempre* $L(T(\dot{\lambda})) = LT(\dot{\lambda}) = \dot{\lambda}$.

Inoltre *è sempre* $T(\dot{\lambda}) \succ \tau_0$, dato che ([2]), *per ogni* λ, $T(\lambda)$ *è la più fine tra le topologie dalle quali si deduce la struttura di convergenza* λ.

Mostriamo ora, con due esempi, che può essere $T(\dot{\lambda}) \neq \tau_0$.

ESEMPIO 1. Sia $X = [0, 1]$ (o altro insieme non numerabile), $Y = \{0, 1\}$ con la topologia discreta, $\mathcal{H} = \{f\colon X \to Y\}$. Consideriamo il seguente sottoinsieme $\mathcal{E}$ di $\mathcal{H}$

$$\mathcal{E} = \{f\colon f^{-1}(0) \text{ è (al più) numerabile}\}\,.$$

$\mathcal{E}$ *è* $T(\dot{\lambda})$-*chiuso*. Sia $(f_n) \dot{\to} f_0$, con $f_n \in \mathcal{E}$ per ogni n. Si ha

$$f_0^{-1}(0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(0)\,.$$

Essendo numerabile il secondo membro, risulterà tale anche il primo. È dunque $f_0 \in \mathcal{E}$, come si voleva.

$\mathcal{E}$ *non è* τ_0-*chiuso*. La funzione nulla O non appartiene chiaramente a $\mathcal{E}$, ma gli è aderente (in τ_0). Fissiamo, infatti, nella base di intorni di O un elemento

$$V_{x_1 x_2 \ldots x_n}(O) = \{f\colon f(x_i) = 0;\, i = 1, 2, \ldots n\}\,.$$

Ora la funzione f, che vale 0 nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e vale 1 negli altri, appartiene sia a $\mathcal{E}$ che a $V_{x_1 \ldots x_n}$. In questo caso è dunque, come previsto, $T(\dot{\lambda}) \neq \tau_0$.

ESEMPIO 2. Sia $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ (con la topologia ordinaria), $\mathcal{H}$ l'insieme di tutte le funzioni *continue* di X in Y. Indichiamo con μ una misura (σ-additiva) in X per la quale la famiglia degli insiemi misurabili contiene quella dei boreliani. Fissati due numeri reali positivi α ed l, con $l < 1$, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{E}_l^\alpha = \left\{f \in \mathcal{H}\colon \mu(\{x\colon f(x) \geqq \alpha\}) \geqq l\right\}$$

$\mathcal{E}_l^\alpha$ *non è* τ_0-*chiuso*. La funzione nulla 0 non appartiene a $\mathcal{E}_l^\alpha$, dato che è $\{x: O(x) \geqq \alpha\} = \emptyset$ e che tale insieme ha quindi misura nulla. Fissiamo ora un τ_0-intorno della funzione nulla che si potrà sempre pensare del tipo $V^{\varepsilon}_{x_0 x_1 \ldots x_n x_{n+1}}(0)$, con $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ (i punti 0 e 1 si possono sempre aggiungere!). Poniamo poi

$$\sigma = \frac{1-l}{2(n+1)} \quad \text{e} \quad \delta = \min\left\{\sigma, \frac{x_1 - x_0}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}, \ldots, \frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right\}.$$

La funzione (continua!) f avente come grafico la spezzata che si ottiene congiungendo, nell'ordine, i punti $(0, 0)$; $(\delta, 2\alpha)$; $(x_1 - \delta, 2\alpha)$; $(x_1, 0)$; $(x_1 + \delta, 2\alpha)$; $(x_2 - \delta, 2\alpha)$; $(x_2, 0)$; $(x_2 + \delta, 2\alpha)$; ... $(x_n, 0)$; $(x_n + \delta, 2\alpha)$; $(1 - \delta, 2\alpha)$; $(1, 0)$ appartiene ovviamente a $V^{\varepsilon}_{x_0 x_1 \ldots x_n x_{n+1}}(0)$, qualunque sia $\varepsilon > 0$, ed appartiene anche a $\mathcal{E}^{\alpha}_l$. Si ha, infatti,

$$\mu(\{x: f(x) \geqq \alpha\}) > \sum_{i=1}^{n} [(x_{i+1} - \delta) - (x_i + \delta)] = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) +$$
$$- 2(n+1)\delta = 1 - 2(n+1)\delta \geqq 1 - 2(n+1)\sigma = f.$$

La funzione nulla è dunque aderente a $\mathcal{E}^{\alpha}_l$.

$\mathcal{E}^{\alpha}_l$ è $T(\dot{\lambda})$-chiuso. Sia $(f'_n) \dot{\to} f_0 (\in \mathcal{H})$, con $f'_n \in \mathcal{E}^{\alpha}_l$ per ogni n. Proviamo che è anche $f_0 \in \mathcal{E}^{\alpha}_l$. Posto ora, per ogni n, $f_n = f'_n \vee f_0$, si constata subito che la nuova successione converge ancora puntualmente ad f_0. Inoltre le f_n sono continue ed è $\mu(\{x: f_n(x) \geqq \alpha\}) \geqq \mu(\{x: f'_n(x) \geqq \alpha\}) \geqq l$ per ogni n; ossia le f_n appartengono a $\mathcal{E}^{\alpha}_l$. Dato che il nostro obiettivo è solo quello di provare che anche f_0 appartiene a $\mathcal{E}^{\alpha}_l$, possiamo pensare tale funzione come limite della (f_n), anzichè della (f'_n). Poniamo ora, per comodità, $B_n = \{x: f_n(x) \geqq \alpha\}$; $B = \{x: f_0(x) \geqq \alpha\}$;

$$B' = \bigcup_{n \in N}\Big(\bigcap_{k \geqslant n} B_k\Big); \qquad B'' = \bigcap_{n \in N}\Big(\bigcup_{k \geqslant n} B_k\Big).$$

Sappiamo che è $B' \subset B''$. Proviamo che, in questo caso, si ha

$$B' = B'' = B.$$

$B'' \subset B$. Sia $x \in B''$; dunque $x \in \bigcup_{k \geqslant n} B_k$, per ogni n. Deve dunque esistere una sottosuccessione di indici $(n_j)_j$ tale che risulti $x \in B_{n_j}$, per ogni j; si ha perciò, sempre per ogni j, $f_{n_j}(x) \geqq \alpha$. Essendo poi $f_0(x) = \lim_{j \to \infty} f_{n_j}(x)$, si conclude che è anche $f_0(x) \geqq \alpha$, ossia che $x \in B$.

$B \subset B'$. Essendo, per ogni $x \in X$ e per ogni naturale n, $f_n(x) \geqq f_0(x)$, si ha che, per ogni $x \in B$, risulta $f_n(x) \geqq f_0(x) \geqq \alpha$, ossia $x \in B_n$, per ogni n, da cui $x \in B'$. Dalle uguaglianze ora provate, si ricava che è $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

L'insieme B, come i B_n, è misurabile e tutti sono sottoinsiemi dell'insieme misurabile $[0, 1]$. Si conclude così che, essendo per ogni n $\mu(B_n) \geqq \alpha$, è

$$\mu(B) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \geqq \alpha .$$

3. Condizioni per l'uguaglianza $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$.

Stabiliamo dapprima una condizione sufficiente.

TEOREMA 3. *Se $X = \{x_n\}$ è numerabile (o finito) e se Y è a base locale numerabile, allora si ha $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$, qualunque sia l'insieme $\mathcal{H} \subset Y^X$.*

DIM. Per ogni $y \in Y$, sia $\mathcal{B}_y = \{B_k^y$, con $k \in \mathbf{N}\}$ una sua base numerabile di intorni, decrescente per inclusione rispetto a k. Fissata ora una $f_0 \in \mathcal{H}$, scriviamo B_k^n in luogo di $B_k^{f(x_n)}$. Consideriamo poi un insieme $U \subset \mathcal{H}$ che non sia τ_0-intorno di f_0. U non contiene, di conseguenza, alcun intorno del tipo

$$V_{k_1 k_2 \dots k_n}(f_0) = \{f \in \mathcal{H}\colon f(x_i) \in B^i_{k_i};\ i = 1, 2, \dots, n\} .$$

Dunque, comunque si fissino gli intorni $B^1_{k_1}$ di $f_0(x_1)$, $B^2_{k_2}$ di $f_0(x_2)$, ..., $B^n_{k_n}$ di $f_0(x_n)$, esiste in $\mathcal{H}$ una funzione

$$f_{k_1 k_2 \dots k_n} \in V_{k_1 k_2 \dots k_n}(f_0) - U .$$

Consideriamo ora la successione (f_n) di elementi di $\mathcal{H}$, così definita

$$f_n = f_{nn\dots n}, \qquad \text{con l'indice ripetuto } n \text{ volte.}$$

Essendo

$$f_n \in V_{nn\dots n}(f_0) ,$$

si ha

$$f_n(x_i) \in B^i_n , \qquad \text{con } i = 1, 2, \dots, n.$$

Fissati un indice i e un intorno B^i_k di $f_0(x_i)$, e posto $\nu = \max(i, k)$, per ogni $n > \nu$, si ha

$$f_n(x_i) \in B^i_n \subset B^i_\nu \subset B^i_k .$$

Risulta dunque $(f_n(x_i)) \to f_0(x_i)$, per ogni i; da cui $(f_n) \dot{\to} f_0$. Tale successione deve, pertanto, finire in ogni $T(\dot{\lambda})$-intorno di f_0. Ora, dato che per nessun n è $f_n \in U$, la successione (f_n) non può certamente finire in esso. U non può perciò essere un $T(\dot{\lambda})$-intorno di f_0. c.v.d.

Veniamo ora a delle condizioni necessarie, valide sotto ipotesi particolari su $\mathcal{H}$.

TEOREMA 4. *Se X è un insieme non numerabile, Y uno spazio topologico con topologia non nulla* (1), *$\mathcal{H}$ l'insieme di tutte le applicazioni di X in Y, si ha $T(\dot{\lambda}) \neq \tau_0$.*

DIM. In Y esiste un punto y_0 dotato di un intorno aperto U diverso da Y.

Consideriamo ora il seguente sottoinsieme di $\mathcal{H}$

$$\mathcal{E} = \{f : f^{-1}(U) \text{ è al più numerabile}\} .$$

$\mathcal{E}$ è $T(\dot{\lambda})$-chiuso. Sia (f_n) una successione di elementi di $\mathcal{E}$ e sia $(f_n) \dot{\to} f_0$, dunque $(f_n(x)) \to f_0(x)$ per ogni $x \in X$. Ora, se per un $x \in X$ è $f_0(x) \in U$, esiste un $\nu(x)$ tale che, per $n > \nu(x)$, è $f_n(x) \in U$. Si ha quindi

$$f_0^{-1}(U) \subset \bigcup_{n \in N} f_n^{-1}(U) .$$

Si conclude che anche $f_0^{-1}(U)$ è al più numerabile e che, di conseguenza, anche f_0 appartiene a $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ non è τ_0-chiuso. Mostriamo che la funzione f_0 di valore costante y_0 è aderente (in τ_0) a $\mathcal{E}$, pur non appartenendovi, dato che $f_0^{-1}(U) = X$ non è numerabile. Fissiamo un elemento y_1 di $Y - U$. Dato un τ_0-intorno di f_0, del tipo $V^{B_1 B_2 \dots B_n}_{x_1 x_2 \dots x_n}(f_0)$, la funzione f, che vale y_0 nei punti x_1, $x_2, \dots, x_n$ e y_1 altrove, appartiene sia a tale intorno che a $\mathcal{E}$, essendo finito l'insieme $f^{-1}(U)$ c.v.d.

(1) Si chiede cioè che in Y esistano aperti diversi da $\emptyset$ e da Y.

Gli ultimi due Teoremi sono in parte riassunti dalla

PROPOSIZIONE 5. *Se $\mathcal{H}$ è l'insieme di tutte le applicazioni di un insieme X in uno spazio topologico Y che sia a base locale numerabile, si ha $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ se e solo se X è al più numerabile.*

TEOREMA 6. *Se $\mathcal{H}(\subset Y^X)$ contiene le costanti, l'uguaglianza $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ è possibile solo se Y è sequenziale.*

DIM. Sia Y uno spazio topologico non sequenziale. Esistono allora un insieme non vuoto $C(\subset Y)$ sequenzialmente chiuso ma non chiuso ed un punto $y_0 \in \overline{C}$ tale che nessuna successione di elementi di C converge ad y_0. Consideriamo ora il sottoinsieme di $\mathcal{H}$

$$\mathcal{E} = \{f: f(X) \subset C\}.$$

$\mathcal{E}$ non è vuoto, contenendo almeno le costanti con valori in C.

$\mathcal{E}$ è $T(\dot{\lambda})$-chiuso. Sia (f_n) una successione di elementi di $\mathcal{E}$ convergente puntualmente ad una funzione f_0. Per ogni x e per ogni n, è $f_n(x) \in C$ e $(f_n(x)) \to f_0(x)$, da cui $f_0(x) \in C$, essendo C sequenzialmente chiuso. È dunque $f_0 \in \mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ non è τ_0-chiuso. Per ogni $y \in Y$, indichiamo con $\bar{y}$ la funzione di valore costante y. È ovviamente $\bar{y}_0 \notin \mathcal{E}$.

Fissiamo un τ_0-intorno di $\bar{y}_0$, che possiamo pensare, come sempre, del tipo $V^{B_1 B_2 \dots B_n}_{x_1 x_2 \dots x_n}(\bar{y}_0)$; anzi, essendo tutti i B_i intorni di y_0, si può porre $B = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ e considerare l'intorno

$$V^{B}_{x_1 x_2 \dots x_n}(\bar{y}_0) = \{f \in \mathcal{H}: f(x_i) \in B\},$$

contenuto nel precedente. Essendo $y_0 \in \overline{C}$, esiste un $y_1 \in C \cap B$. Risulta quindi $\bar{y}_1 \in \mathcal{E} \cap V^{B}_{x_1 x_2 \dots x_n}(\bar{y}_0)$. c.v.d.

Riassumendo i risultati dei Teoremi 4 e 6, si ha la

PROPOSIZIONE 7. *Se $\mathcal{H}$ consta di tutte le applicazioni di un insieme X in uno spazio topologico Y affinchè sia $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ è necessario che X sia al più numerabile e che Y sia sequenziale.*

Tenendo ora presente che, dato un arbitrario insieme H, dotato di una struttura di convergenza λ, la $T(\lambda)$ è l'unica topologia sequenziale da cui si deduce λ, si ha che

L'uguaglianza $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ sussiste se e solo se $\mathcal{H}(\subset Y^X)$ è sequenziale.

Quindi, in particolare,

Se è $\mathcal{H} = Y^X$, con X (al più) numerabile, si ha $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$, se e solo se Y^X, con la topologia prodotto, è sequenziale.

Da queste osservazioni e dalla Proposizione 7 si ricava:

TEOREMA 8. *Dati uno spazio topologico Y e un insieme X, se Y^X, con la topologia prodotto, è uno spazio sequenziale, allora X è (al più) numerabile e Y è sequenziale.*

È da notare peraltro che

Le condizioni della Proposizione 7 non sono sufficienti per l'uguaglianza $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$.

Esistono infatti spazi topologici sequenziali Y per i quali Y^2 non è sequenziale (2).

Osserviamo ancora che, se è $X = \{a\}$, lo spazio Y^X è omeomorfo ad Y, qualora in Y^X si introduca la topologia prodotto, qualunque sia lo spazio topologico Y. Quindi:

PROPOSIZIONE 9. *Se è $X = \{a\}$, Y^X è sequeziale se e solo se lo è Y.*

Sia ora X arbitrario e consideriamo l'insieme $\mathcal{H}$ formato da tutte e sole le applicazioni costanti di X in Y. Per assegnare un elemento di $\mathcal{H}$, occorre e basta assegnarne il valore in un prefissato elemento a di X. Tutto avviene perciò come se X constasse del solo elemento a.

Dalla Proposizione 9 si ricava così il

COROLLARIO 10. *Se $\mathcal{H}$ consta di tutte e sole le applicazioni costanti di un insieme X in uno spazio topologico Y, si ha $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ se e solo se Y è sequenziale.*

4. Sulle topologie subordinate da $T(\dot{\lambda})$ e da τ_0.

Alcuni simboli: Sia, al solito, $\mathcal{H}$ un insieme di applicazioni di un insieme X in uno spazio topologico Y e sia $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$. Indichiamo con λ

(2) Confronta, per es. [3].

e con $\dot{\lambda}'$ le strutture della convergenza puntuale di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{H}'$ rispettivamente. Analogo significato abbiamo i simboli τ_0 e τ_0'. Indichiamo poi con $\bar{\tau}_0$ e $\overline{T(\dot{\lambda})}$ le topologie subordinate su $\mathcal{H}'$ rispettivamente da τ_0 e da $T(\dot{\lambda})$.

È immediato constatare che

TEOREMA 11. *Risulta sempre* $\tau_0' = \bar{\tau}_0$.

DIM. Diciamo σ la topologia prodotto definita in Y^X. Si constata subito che τ_0 e τ_0' sono le topologie subordinate da σ su $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ rispettivamente. Essendo $\bar{\tau}_0$ la topologia subordinata su $\mathcal{H}'$ dalla τ_0, si ha subito la tesi. c.v.d.

Sorge così spontaneo il

PROBLEMA 1. *Se è* $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H} (\subset Y^X)$, *la topologia* $T(\dot{\lambda}')$ *coincide con la topologia* $\overline{T(\dot{\lambda})}$ *subordinata su* $\mathcal{H}'$ *dalla* $T(\dot{\lambda})$?

Proviamo intanto che

TEOREMA 12. *È sempre* $T(\dot{\lambda}') \succ \overline{T(\dot{\lambda})}$.

DIM. Sia $A' (\subset \mathcal{H}')$ un aperto in $\overline{T(\dot{\lambda})}$. Esiste dunque un insieme $A (\subset \mathcal{H})$, aperto in $T(\dot{\lambda})$, per cui si abbia $A' = A \cap \mathcal{H}'$. Sia ora $f_0' \in A'$. Comunque si fissi, in $\mathcal{H}$, una successione (f_n) convergente a f_0', questa finisce in A; ciò accade anche se, in particolare, ogni f_n appartiene ad $\mathcal{H}'$. Si conclude così che ogni successione (f_n') di $\mathcal{H}'$, che converga ad f_0', finisce in A, e, quindi, in $A \cap \mathcal{H}' = A'$. Quindi A' è $T(\dot{\lambda}')$-aperto. c.v.d.

Veniamo ora ad un altro problema collegato con questo. Precisamente:

PROBLEMA 2. *Se per un insieme* $\mathcal{H} \subset Y^X$ *si ha* $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ *e se è* $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ *risulta anche* $T(\dot{\lambda}') = \tau_0'$? *In altre parole, l'uguaglianza* $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$ *è ereditaria per i sottoinsiemi di* $\mathcal{H}$?

Notiamo che (Teor. 11 e 12), dall'essere $T(\dot{\lambda}) = \tau_0$, si ha

$$T(\dot{\lambda}') \succ \overline{T(\dot{\lambda})} = \bar{\tau}_0 = \tau_0'.$$

I Problemi 1 e 2 vengono così ad essere fra loro collegati. Mostriamo, con un esempio, che la risposta a tali problemi è, in generale, negativa.

ESEMPIO 3. Sia $X = \{a\}$; $Y = \{p_{r,s}\} \cup \{q_r\} \cup \{z\}$ con $r, s \in \mathbb{N}$. Definiamo in Y la seguente topologia. I punti $p_{r,s}$ sono isolati. Una base di intorni di q_r è data dagli insiemi del tipo

$$B_r^{\bar{s}} = \{p_{r,s} \colon s > \bar{s}\} \cup \{q_r\} .$$

Una base di intorni per z è data dagli insiemi del tipo

$$B_{\bar{r}}^f(z) = \{p_{r,s} \colon r \geqq \bar{r};\ s \geqq f(r)\} \cup \{q_r \colon r \geqq \bar{r}\} \cup \{z\} ,$$

dove f è un'arbitraria applicazione di $\mathbb{N}$ in sè.

Che si tratti di una topologia lo si constatata senza difficoltà. Assumiamo poi $\mathcal{H} = Y^X$ e $(\mathcal{H} \supset)$ $\mathcal{H}' = \{f \colon f(x) \in Y'\}$ con

$$Y' = \{p_{r,s}\} \cup \{z\} .$$

È poi agevole constatare che Y è uno spazio sequenziale e che Y' non lo è. Per il Corollario 10, si ha quindi

$$T(\dot{\lambda}') \underset{\neq}{>} \overline{T(\dot{\lambda})} = \bar{\tau}_0 = \tau_0' .$$

Osserviamo ancora che

TEOREMA 13. *Risulta sempre* $L(\bar{\tau}_0) = L[\overline{T(\dot{\lambda})}] = \dot{\lambda}'$.

DIM. È, ovviamente, $L(\bar{\tau}_0) = L(\tau_0') = \dot{\lambda}'$. Inoltre, essendo $\overline{T(\dot{\lambda})} \prec \prec T(\dot{\lambda}')$, si ha (cfr. [2])

$$L[\overline{T(\dot{\lambda})}] \prec L[T(\dot{\lambda}')] = LT(\dot{\lambda}') = \dot{\lambda}' ;$$

ed essendo $T(\dot{\lambda}) > \tau_0$, si ha anche $\overline{T(\dot{\lambda})} > \bar{\tau}_0 = \tau_0'$; da cui

$$L[\overline{T(\dot{\lambda})}] > L(\tau_0') = \dot{\lambda}' .$$

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. KELLEY, *General topology*, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
[2] M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie III, **14**, fasc. 1 (1960).
[3] R. ENGELKING, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 gennaio 1981.