Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Carlo Toffalori

Strutture esistenzialmente complete per certe classi di anelli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 57-71

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__57_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

Strutture esistenzialmente complete per certe classi di anelli.

CARLO TOFFALORI (*)

SUMMARY - For every $m \geqslant 2$, we consider the class $\mathcal{R}_m$ ($\mathcal{R}_m^*$) of commutative rings R whose nilradical $N(R)$ is nil (nilpotent) of exponent m: we prove that $\mathcal{E}\mathcal{R}_m$ ($\mathcal{E}\mathcal{R}_m^*$) is not an elementary class.

Considereremo le classi $\mathcal{R}_m$ ($\mathcal{R}_m^*$) degli anelli commutativi unitari R il cui nilradicale $N(R)$ sia nil (nilpotente) di esponente m prefissato. Dimostreremo che, per ogni m tale che $2 \leqslant m < \infty$, la sottoclasse degli anelli esistenzialmente completi in $\mathcal{R}_m$ ($\mathcal{R}_m^*$) non è elementare. I casi $m = 1$, $m = \infty$ sono già considerati nella letteratura ([2], [3], [6]).

Si rimanda il lettore a [1] per le premesse di algebra commutativa, a [4] per quelle di teoria dei modelli; sulle ultrapotenze e sulle loro proprietà, si veda [5].

§ 1. Sia $\mathcal{R}_m$ la classe degli anelli commutativi unitari R tali che il nil-radicale $N(R)$ è nil di nil-esponente m (cioè, per ogni $a \in N(R)$, $a^m = 0$). Questa ultima condizione è facilmente esprimibile al 1° ordine nel linguaggio $L = (+, \cdot, -, 0, 1)$ degli anelli commutativi unitari tramite l'enunciato

$$\varphi_m\colon \forall v (v^{2m} = 0 \rightarrow v^m = 0) .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « U. Dini », Università, Viale Morgagni 67/A - 50134 Firenze.

Chiaramente, infatti, se $R \in \mathfrak{R}_m$, R soddisfa φ_m. Viceversa, ammettiamo che R soddisfi φ_m, e sia $a \in N(R)$, così che $a^n = 0$ per un opportuno $n > 0$: si può supporre $n = 2^k m$, con $k \geqslant 1$. Segue

$$(a^{2^{k-1}})^{2m} = 0$$

così che

$$a^{2^{k-1}m} = 0 \; .$$

Ripetendo k volte il procedimento, si ottiene infine $a^m = 0$.

Supporremo d'ora in poi $m \geqslant 2$: i casi $m = 1$ e $m = \infty$ saranno discussi al termine del paragrafo.

Lemma 1. Se $R \in \mathfrak{R}_m$, $R' = R[x]/(rx\colon r \in N(R))$ appartiene a $\mathfrak{R}_m$.

Dimostrazione. Si noti che R' è estensione di R, e che un polinomio $p(x) \in R[x]$ è equivalente a 0 in R' se e solo se, posto $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, si ha

$$p_0 = 0 \qquad p_1, \ldots, p_n \in N(R) \; .$$

Sia dunque $p^{2m}(x) = 0$ in R', segue in $R[x]$

$$p_0^{2m} = 0 \qquad p^{2m}(x) \in N(R[x]) \; .$$

quindi $p(x)$ e, di conseguenza, $p^m(x)$ sono nilpotenti in $R[x]$, inoltre $p_0^m = 0$. Dunque $p^m(x) = 0$ in R'.

Osservazione. Conviene mettere in evidenza che in R', x^{m+1} *non* divide x^m: altrimenti, si avrebbe in $R[x]$, per un opportuno polinomio $q(x)$, $x^m - x^{m+1}q(x) \in N(R[x])$ e quindi, in particolare, $1 \in N(R)$ (assurdo).

Lemma 2. Se $R \in \mathfrak{R}_m$ ed $a \in R$, allora $R' = R[x]/(x - ax^2)$ appartiene a $\mathfrak{R}_m$.

Dimostrazione. Va provato che, se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ appartiene a $R[x]$, allora

$$p^{2m}(x) \in (x - ax^2) \Rightarrow p^m(x) \in (x - ax^2) \; .$$

Sia $p^{2m}(x) = (x - ax^2)\,q(x)$ per un opportuno polinomio $q(x) = \sum_{j=0}^{2mn-2} q_j x^j$. Confrontando i coefficienti si ha:

$$p_0^{2m} = 0 \qquad (\text{così che } p_0^m = 0)$$

e, ancora, per ogni $i = 1, \ldots, 2mn - 1$, il coefficiente del termine di grado i in $p^{2m}(x)$ eguaglia $q_{i-1} - aq_{i-2}$ (ponendo $q_{-1} = 0$); più precisamente,

$$\sum c_{h_{i0}\ldots h_{in}} p_0^{h_{i0}} p_1^{h_{i1}} \ldots p_n^{h_{in}} = q_{i-1} - aq_{i-2}$$

dove la somma è estesa a tutte le sequenze di naturali $(h_{i0}, \ldots, h_{in})$ tali che

$$h_{i0} + \ldots + h_{in} = 2m \qquad 0 \cdot h_{i0} + \ldots + n \cdot h_{in} = i\,,$$

e $c_{h_{i0}\ldots h_{in}}$ rappresenta un'opportuna costante. Infine, per $i = 2mn$, si ha

$$p_n^{2m} = -\,aq_{2mn-2}\,.$$

Segue

$$p_n^{2m} = -\,aq_{2mn-2}\,,$$

$$\binom{2m}{1} a p_{n-1} p_n^{2m-1} = aq_{2mn-2} - a^2 q_{2mn-3}$$

e, ancora,

$$\sum c_{h_{i0}\ldots h_{in}} (a^n p_0)^{h_{i0}} (a^{n-1} p_1)^{h_{i1}} \ldots (p_n)^{h_{in}} = a^{2mn-i} \sum c_{h_{i0}\ldots h_{in}} p_0^{i0} \ldots p_n^{in} =$$
$$= a^{2mn-i} q_{i-1} - a^{2mn-i+1} q_{i-2}$$

per ogni $i = 0, \ldots, 2mn - 2$, dove, per ciascun i, la somma si intende estesa a tutte le sequenze di naturali $(h_{i0}, \ldots, h_{in})$ sopra descritte.

Sommando membro a membro le precedenti eguaglianze, si ottiene

$$(a^n p_0 + a^{n-1} p_1 + \ldots + p_n)^{2m} = 0$$

così che

$$(a^n p_0 + a^{n-1} p_1 + \ldots + p_n)^m = 0\,.$$

È nostro proposito trovare un polinomio $r(x) = \sum_{k=0}^{mn-2} r_k x^k$ tale che

$$p_0^m = 0$$

e, per ogni $i = 1, \ldots, mn-1$, posto $r_{-1} = 0$,

$$\sum d_{k_{i0} \ldots k_{in}} p_0^{k_{i0}} \ldots p_n^{k_{in}} = r_{i-1} - ar_{i-2}$$

(dove la somma è estesa a tutte le sequenze di naturali $(k_{i0}, \ldots, k_{in})$ tali che $k_{i0} + \ldots + k_{in} = m$ e $0 \cdot k_{i0} + \ldots + n \cdot k_{in} = i$, e $d_{k_{i0} \ldots k_{in}}$ è un'opportuna costante), finchè

$$p_n^m = -ar_{mn-2} \, .$$

La prima di queste eguaglianze è già stata provata; dalle successive (fino alla penultima) è possibile ricavare $r_0, \ldots, r_{mn-2}$, così che resta semplicemente da provare l'ultima uguaglianza, che segue tuttavia da

$$(a^n p_0 + a^{n-1} p_1 + \ldots + p_n)^m = 0 \, .$$

LEMMA 3. Se $R \in \mathfrak{R}_m$, $R' = R[x]/(x^n, rx\colon r \in N(R))$ appartiene a $\mathfrak{R}_m$, per ogni n tale che $2 \leqslant n \leqslant m$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo per semplicità con I l'ideale $(x^n, rx\colon r \in N(R))$ di $R[x]$. Ogni polinomio di $R[x]$ è equivalente modulo I ad un polinomio della forma

$$(\circ) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$. Inoltre un tale polinomio appartiene ad I se e solo se

$$a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1, \ldots, a_{n-1} \in N(R) \, .$$

Sia dunque $p(x) = \sum_{i=0}^{t} p_i x^i \in R[x]$ tale che $p^{2m}(x) \in I$: appartiene di conseguenza ad I ogni polinomio equivalente a $p^{2m}(x)$ della forma $(\circ)$, si noti che il termine noto di un tale polinomio è comunque p_0^{2m}, quindi

$$p_0^{2m} = 0 \quad \text{e dunque } p_0^m = 0 \, .$$

Consideriamo allora $p^m(x)$, al solito possiamo ridurci a esaminare il polinomio della forma (∘), equivalente a $p^m(x)$ rispetto ad I, che si ottiene considerando i termini di grado minore di n in $p^m(x)$, e dimostrare che il termine noto di $p^m(x)$ è 0, e che i coefficienti dei successivi termini fino al grado $n-1$ sono tutti nilpotenti, per dedurne, finalmente, che $p^m(x) \in I$. Circa il termine noto, esso è $p_0^m = 0$. Basterà provare che p_0 divide i successivi coefficienti fino al grado $n-1$: il coefficiente del termine di grado i è la somma

$$\sum c_{h_{i0}\ldots h_{it}} p_0^{h_{i0}} \ldots p_t^{h_{it}}$$

estesa a tutte le sequenze $(h_{i0}, \ldots, h_{it})$ di naturali tali che $h_{i0} + .. + h_{it} = m$ e $0 \cdot h_{i0} + \ldots + t \cdot h_{it} = i$.

Se per una tale sequenza si ha $h_{i0} = 0$, allora

$$1 \cdot h_{i1} + \ldots + t \cdot h_{it} = i < n \leqslant m = h_{i1} + \ldots + h_{it}$$

(assurdo). Dunque p_0 divide tale coefficiente.

Si noti, infine, che R' è estensione di R; e che, in R', x è distinto da ogni elemento di R, e $x^{n-1} \neq 0$.

LEMMA 4. Se $R \in \mathfrak{R}_m$, l'anello totale dei quozienti $\bar{R}$ di R appartiene a $\mathfrak{R}_m$.

DIMOSTRAZIONE. Ovvia.

Consideriamo a questo punto la sottoclasse $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ delle strutture esistenzialmente complete di $\mathfrak{R}_m$: ricordiamo che un anello $R \in \mathfrak{R}_m$ si dice esistenzialmente completo quando, per ogni sistema finito di equazioni e disequazioni a coefficienti in R, se esiste un'estensione $S \in \mathfrak{R}_m$ di R in cui tale sistema ammette soluzioni, allora il sistema ha già soluzioni in R; o, equivalentemente, con una terminologia più rigorosa dal punto di vista della teoria dei modelli, quando, per ogni $\exists_1$-enunciato $\varphi(\boldsymbol{r})$ del linguaggio L degli anelli commutativi unitari, con parametri $\boldsymbol{r}$ in R, se esiste un'estensione $S \in \mathfrak{R}_m$ di R tale che $S \models \varphi(\boldsymbol{r})$, allora $R \models \varphi(\boldsymbol{r})$.

Si rimanda il lettore a [4] per un'esposizione delle proprietà delle strutture esistenzialmente complete di una classe assiomatica di strutture. Riguardo a $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ possiamo enunciare la seguente:

PROPOSIZIONE 1. Sia $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$. Allora si ha:

(1.1) R è chiuso rispetto ai quozienti;

(1.2) $N(R)$ contiene infiniti nilpotenti per ogni possibile esponente n tale che $2 \leqslant n \leqslant m$;

(1.3) se $a \in R$, $a \notin N(R)$ se e solo se a divide un idempotente non nullo di R;

(1.4) $N(R) = J(R)$.

DIMOSTRAZIONE. (1.1) segue dal lemma 4.

(1.2) dal lemma 3.

(1.3) se a divide un idempotente non nullo, a non è nilpotente; viceversa, si consideri l'estensione R' di R di cui al lemma 2, in essa a divide l'idempotente ax (non nullo perchè $a \notin N(R)$). Segue

$$R' \models \exists x(ax \neq 0 \wedge ax = a^2x^2) ,$$

dunque, essendo $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$,

$$R \models \exists x(ax \neq 0 \wedge ax = a^2x^2) .$$

(1.4) segue da (1.3) in modo ovvio.

Vogliamo ora provare due fatti essenziali su $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$:

Fatto A. Se $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$, esiste $a \in R$, a non preregolare (e cioè tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, a^{n+1} non divide a^n).

Fatto B. Se $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ ed $a \in R$, rad (a) è definibile al 1° ordine in R. Proviamo dapprima il fatto A.

LEMMA 5. Se $R \in \mathfrak{R}_m$, sono equivalenti le proposizioni:

(5.1) a non è preregolare;

(5.2) a^{m+1} non divide a^m.

DIMOSTRAZIONE. (5.1) $\Rightarrow$ (5.2) è ovvio.

(5.2) $\Rightarrow$ (5.1): sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $a^n \in (a^{n+1})$, ovvero $a^n(1 - ar) = 0$ per $r \in R$ opportuno. Dunque $a^m(1 - ar)^m = 0$, e, finalmente, $a^m \in (a^{m+1})$.

LEMMA 6. Se $R \in \mathfrak{R}_m$ ed a è un elemento non preregolare di R, esiste un'estensione $R' \in \mathfrak{R}_m$ di R tale che in R' $\mathrm{Ann}(a^m) \subsetneq \mathrm{Ann}(a^{m+1})$.

DIMOSTRAZIONE. – Consideriamo $R' = R[y]/(a^{m+1}y, y^2, ry: r \in N(R))$. Evidentemente R' è estensione di R, ed inoltre in R' si ha

$$a^{m+1}y = 0 .$$

Invece, $a^m y \neq 0$ in R'; altrimenti, si avrebbe in $R[y]$

$$a^m y = a^{m+1}yp(y) + y^2 q(y) + \sum_{i=1}^{s} r_i y q_i(y)$$

per opportuni $r_1, \dots, r_s \in N(R)$ e p, q, $q_1, \dots, q_s \in R[y]$. Indichiamo con a_0 il termine noto di $p(y)$, allora si ha in R

$$a^m - a^{m+1}a_0 \in N(R) .$$

Segue $\big(a^m(1 - a \cdot a_0)\big)^m = 0$, e qunque $a^{m^2} \in (a^{m^2+1})$, in contraddizione con la ipotesi che a non è preregolare. Rimane dunque da provare che $R' \in \mathfrak{R}_m$. Ora, ogni polinomio di $R[y]$ è equivalente in R' ad uno della forma

$$r_0 + r_1 y$$

con r_0, $r_1 \in R$. In particolare, se $p(y) = \sum_{i=0}^{n} p_i y^i \in R[y]$, e $p^{2m}(y) = 0$ in R', si può dedurre

$$p_0^{2m} + \binom{2m}{1} p_0^{2m-1} p_1 y = 0 \qquad \text{in } R' .$$

Di conseguenza, in R, $p_0^{2m} = 0$, così che $p_0 \in N(R)$, $p_0^m = 0$. Perciò

$$p_0^m + \binom{m}{1} p_0^{m-1} p_1 y = 0 \qquad \text{in } R'$$

e, finalmente, $p^m(y) = 0$ in R'.

Siamo finalmente in grado di provare il fatto A. Sia $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$, esiste una estensione $R' \in \mathfrak{R}_m$ di R che ammette un elemento non preregolare x (cfr. lemma 1); per il lemma 6, esiste $R'' \in \mathfrak{R}_m$, estensione di R' e dunque anche di R, ed esiste $y \in R''$ tale che in R''

$$x^m y \neq 0 \qquad \text{e} \qquad x^{m+1} y = 0 .$$

In conclusione

$$R'' \models \exists x \exists y (x^m y \neq 0 \wedge x^{m+1} y = 0) .$$

Sfruttando l'ipotesi che R appartiene a $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$, si ha

$$R \models \exists x \exists y (x^m y \neq 0 \wedge x^{m+1} y = 0) .$$

In particolare l'elemento x di R soddisfacente il precedente enunciato non è preregolare.

Dimostriamo adesso il fatto B.

LEMMA 7. Se $R \in \mathfrak{R}_m$, a, $b \in R$, b è idempotente e $b \notin (a)$, esiste una estensione $R' \in \mathfrak{R}_m$ di R in cui

$$\mathrm{Ann}\,(a) \not\subseteq \mathrm{Ann}\,(b)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ponga $R' = R[y]/(y^2, ay, ry : r \in N(R))$. Come nel lemma 6, si ha che $R' \in \mathfrak{R}_m$, R' è estensione di R e $ay = 0$ in R'. Invece $by \neq 0$ in R', altrimenti si avrebbe (con la stessa notazione del lemma 6)

$$by = ayp(y) + y^2 q(y) + \sum_{i=1}^{s} r_i y q_i(y)$$

in $R[y]$, e quindi in R

$$b - a \cdot a_0 \in N(R) .$$

In particolare, $b = b^m \in (a)$-assurdo.

LEMMA 8. Se $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ ed a, $b \in R$, sono equivalenti le proposizioni:

(8.1) $b \notin \mathrm{rad}\,(a)$;

(8.2) b divide un idempotente non nullo modulo (a).

DIMOSTRAZIONE. (8.2) $\Rightarrow$ (8.1). Sia $0 \neq bx \equiv b^2 x^2 \bmod (a)$; per ogni $n \in \mathrm{N}$, allora, $b^n x^n \notin (a)$, in particolare $b^n \notin (a)$.

(8.1) $\Rightarrow$ (8.2). Si consideri $R' = R[x]/(x - (b - a)x^2)$ che è estensione di R, appartiene a $\mathfrak{R}_m$ per il lemma 2, e soddisfa le seguenti proprietà:

$$(b - a)x = (b - a)^2 x^2 \qquad (b - a)x \notin (a)$$

se fosse, infatti, $(b-a)x \in (a)$ in R', si avrebbe in $R[x]$

$$(b-a)x = ap(x) + \big(x-(b-a)x^2\big)q(x)$$

per opportuni $p(x)$, $q(x) \in R[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j x^j$. Segue

$$\begin{aligned}
b-a &= ap_1 + q_0\\
0 &= ap_2 + q_1 - (b-a)q_0\\
&\dots\dots\dots\dots\\
0 &= ap_n + q_{n-1} - (b-a)q_{n-2}\\
0 &= -(b-a)q_{n-1}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
(b-a)^{n+1} &= (b-a)^n ap_1 + (b-a)^n q_0\\
0 &= (b-a)^{n-1}ap_2 + (b-a)^{n-1}q_1 - (b-a)^n q_0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= (b-a)ap_n + (b-a)q_{n-1} - (b-a)^2 q_{n-2}\\
0 &= -(b-a)q_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro, se ne deduce

$$(b-a)^{n+1} = (b-a)^n ap_1 + (b-a)^{n-1}ap_2 + \dots + (b-a)ap_n$$

e, dunque, $b \in \operatorname{rad}(a)$ (assurdo).

Per il lemma 7, allora, esiste un'estensione R'' di R' (quindi di R) appartenente a $\mathfrak{R}_m$ e contenente un elemento y tale che

$$ay = 0 \qquad (b-a)xy = bxy \neq 0\,.$$

Allora

$$R'' \models \exists x\,\exists y\big((b-a)x = (b-a)^2x^2 \wedge bxy \neq 0 \wedge ay = 0\big)$$

così che

$$R \models \exists x\,\exists y\big((b-a)x = (b-a)^2x^2 \wedge bxy \neq 0 \wedge ay = 0\big)\,.$$

Segue che, in R, b divide l'idempotente bx modulo (a), mentre $bx \notin (a)$ perchè $ay = 0$ e $bxy \neq 0$.

Corollario. Se $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ ed $a \in R$, $\operatorname{rad}(a) = J(a)\big[= \{b \in R$: per ogni $x \in R$, $1 - bx$ è invertibile mod $(a)\}\big]$.

Siamo finalmente in grado di provare:

Teorema 1. Se $m \geqslant 2$, $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ non è una classe elementare.

Dimostrazione. Basterà provare che $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ non è chiusa per ultrapotenze. Sia dunque $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$, e sia $a \in R$ non preregolare; consideriamo la ultrapotenza $R^* = R^\omega/D$ di R mediante un ultrafiltro non principale D su ω: in R^* consideriamo poi gli elementi a e a^*, corrispondenti rispettivamente alle successioni di elementi di R

$$(a,\ a,\ \ldots,\ a,\ \ldots) \qquad (a,\ a^2,\ \ldots,\ a^n,\ \ldots)\,.$$

Per ogni $m \in \omega$, $\{n \in \omega\colon a^m \in (a^n)\} = \{0, 1, \ldots, m\} \notin D$, così che $a^m \notin (a^*)$ in R^*. D'altra parte, $\{n \in \omega\colon a \in \operatorname{rad}(a^n)\} = \omega \in D$, quindi, se $R^* \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$, $a \in \operatorname{rad}(a^*)$. Segue che $R^* \notin \mathcal{E}\mathfrak{R}_m$.

Osservazione. Se $m = 1$, $\mathfrak{R}_1$ è la classe degli anelli commutativi unitari privi di nilpotenti $\neq 0$, di cui in Carson [2] e Lipshitz-Saracino [6]: $\mathcal{E}\mathfrak{R}_1$ è elementare, ed è costituita da tutti e soli gli anelli regolari privi di idempotenti minimali ed integralmente chiusi.

Se, invece, $m = \infty$, $\mathfrak{R}^\infty$ è evidentemente la classe di tutti gli anelli commutativi unitari: $\mathcal{E}\mathfrak{R}^\infty$ non è elementare (Cherlin [3]).

§ 2. Sia $\mathfrak{R}_m^*$ la classe degli anelli commutativi unitari R tali che $N(R)$ è un ideale nilpotente di esponente m (e cioè tale che, se $a_1, \ldots, a_m \in N(R)$, allora $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m = 0$). $\mathfrak{R}_m^*$ è una classe elementare: in particolare, la condizione che $N(R)$ sia un ideale nilpotente di esponente m si può esprimere al 1° ordine nel linguaggio L degli anelli unitari con gli enunciati

$$\varphi_m\colon \forall v(v^{2m} = 0 \to v^m = 0)$$

$$\psi_m\colon \forall v_1 \ldots \forall v_m\Big(\bigwedge_{i=1}^{m} v_i^m = 0 \to v_1 \cdot \ldots \cdot v_m = 0\Big)\,.$$

Il principale risultato del § 1, che $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ non è una classe elementare, vale anche per $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m^*$, con lo stesso metodo di dimostrazione. Naturalmente, provare che un dato anello R appartiene a $\mathfrak{R}_m^*$ piuttosto che a $\mathfrak{R}_m$ è assai più laborioso, valgono tuttavia per $\mathfrak{R}_m^*$ alcuni risultati che semplificano certi passi della dimostrazione, Riassumiamo a grandi linee i punti principali, assumendo ancora $m \geqslant 2$: i casi $m = 1$, $m = \infty$ saranno discussi alla fine del paragrafo.

LEMMA 9. Se $R \in \mathfrak{R}_m^*$, $R[x] \in \mathfrak{R}_m^*$.

DIMOSTRAZIONE. Se $p(x) \in R[x]$ e $p^{2m}(x) = 0$, allora $p(x) \in N(R[x]) = N(R)[x]$: segue ovviamente che $p^m(x) = 0$. In modo analogo, se $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in N(R[x])$, allora

$$p_1(x) \ldots p_m(x) = 0 .$$

(Si noti che x non è preregolare in $R[x]$).

LEMMA 10. Se $R \in \mathfrak{R}_m^*$, per ogni $a \in R$, $R' = R[x]/(x - ax^2)$ appartiene a $\mathfrak{R}_m^*$.

DIMOSTRAZIONE. Si è già visto (lemma 2) che, se $R \models \varphi_m$, anche $R' \models \varphi_m$. Supponiamo che R soddisfi anche ψ_m, e mostriamo che altrettanto vale per R'.

Siano $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in \mathrm{rad}\,(x - ax^2)$, si può supporre che questi polinomi abbiano grado comune n, così che si ha, per $j = 1, \ldots, m$,

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{ji} x^i ,$$

e dedurre, come nel lemma 2, che

$$(a^n p_{j0} + a^{n-1} p_{j1} + \ldots + p_{jn})^m = 0 \qquad p_{j0}^m = 0 .$$

Di conseguenza

$$\prod_{j=1}^{m} (a^n p_{j0} + a^{n-1} p_{j1} + \ldots + p_{jn}) = 0 \qquad \prod_{j=1}^{m} p_{j0} = 0 .$$

È nostro proposito trovare un polinomio $s(x) = \sum_{k=0}^{mn-2} s_k x^k$ tale che si abbia $\prod_{j=1}^{m} p_j(x) = s(x)(x - ax^2)$, cioè $\prod_{j=1}^{m} p_{j0} = 0$ (come già osservato) e, posto $s_{-1}=0$, per $i=1,\ldots,mn-1$,

$$\sum\prod_{j=1}^{m} p_{jh_{ij}} = s_{i-1} - as_{i-2}$$

(dove la somma è estesa a tutte le sequenze di naturali $(h_{i1},\ldots,h_{im})$ tali che $h_{i1}+\ldots+h_{im}=i$), finchè

$$\prod_{j=1}^{m} p_{jn} = -\, as_{mn-2}\,.$$

Ricavati $s_0 s_1,\ldots,s_{mn-2}$ dalle precedenti uguaglianze, basta verificare l'ultima: in effetti,

$$-\prod_{j=1}^{m} p_{jn} = \prod_{j=1}^{m}(a^n p_{j0}+\ldots+p_{jn}) - \prod_{i=1}^{m} p_{jn} = as_{mn-2}\,.$$

LEMMA 11. Se $R\in\mathfrak{R}_m^*$, $R'=R[x]/\big(x^n, rx\colon r\in N(R)\big)$ appartiene a $\mathfrak{R}_m^*$ per ogni n tale che $2\leqslant n\leqslant m$.

DIMOSTRAZIONE. Si indichi $I=\big(x^n, rx\colon r\in N(R)\big)$ (cfr. lemma 3): basta provare che R' soddisfa ψ_m.

Siano dunque $p_1(x),\ldots,p_m(x)\in\operatorname{rad} I$, cioè tali che, per ogni $j=1,\ldots,m$, $p_j^m(x)\in I$. Si è già visto che, allora, $p_{j0}^m=0$, e p_{j0} divide i successivi coefficienti di $p_j^m(x)$ fino a quello di grado $n-1$ compreso. Consideriamo

$$\prod_{j=1}^{m} p_j(x)\colon$$

è ovvio che il suo termine noto $\prod_{j=1}^{m} p_{j0}$ è uguale a 0. Circa i successivi coefficienti, essi sono della forma

$$\sum p_{1h_{i1}}\cdot\ldots\cdot p_{mh_{im}}$$

(dove la somma è estesa a tutte le sequenze di naturali $(h_{i1},\ldots,h_{im})$ tali che $h_{i1}+\ldots+h_{im}=i$). Se $i\leqslant n-1<m$, per ognuna di tali sequenze esisterà j tale che $h_{ij}=0$, così che p_{j0} divide il corrispondente

prodotto; segue che, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, il coefficiente di grado i in $\prod_{j=1}^{m}(p_j x)$ è nilpotente. Di conseguenza $\prod_{j=1}^{m} p_j(x) \in I$.

LEMMA 12. Se $R \in \mathfrak{R}_m^*$, l'anello totale dei quozienti $\bar{R}$ di R appartiene a $\mathfrak{R}_m^*$.

PROPOSIZIONE 2. Se $R \in \mathcal{E}\mathfrak{R}_m^*$, si ha:

(2.1) R è chiuso rispetto ai quozienti;

(2.2) $N(R)$ contiene infiniti nilpotenti di ogni possibile ordine n tale che $2 \leqslant n \leqslant m$;

(2.3) se $a \in R$, $a \notin N(R)$ se e solo se a divide un idempotente non nullo;

(2.4) $N(R) = J(R)$.

Si possono provare ancora per $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m^*$ fatti analoghi di quelli A e B dimostrati per $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m$ nel § 1. Nella prova del fatto A, i passi essenziali sono nuovamente la costruzione:

A.1: per ogni $R \in \mathfrak{R}_m^*$, di un'estensione $R' \in \mathfrak{R}_m^*$ di R che ammette un elemento non preregolare;

A.2: per ogni $R \in \mathfrak{R}_m^*$ e per ogni elemento $a \in R$ non preregolare, di un'estensione $R' \in \mathfrak{R}_m^*$ di R in cui $\mathrm{Ann}\,(a^m) \subsetneqq \mathrm{Ann}\,(a^{m+1})$.

La A.1 è assicurata dal lemma 9. Circa la A.2, la sua prova è assai semplice, sulla base del lemma 6.

Per il fatto B, invece, è essenziale la costruzione:

B.1: per ogni $R \in \mathfrak{R}_m^*$, e per ogni coppia a, b di elementi di R tali che $b^2 = b \notin (a)$, di un'estensione $R' \in \mathfrak{R}_m^*$ di R tale che in R' $\mathrm{Ann}\,(a) \not\subseteq \mathrm{Ann}\,(b)$;

B.2: per ogni $R \in \mathfrak{R}_m^*$, e per ogni coppia a, b di elementi di R tali che $b \notin \mathrm{rad}\,(a)$, di un ampliamento $R' \in \mathfrak{R}_m^*$ di R in cui $b - a$ divide un idempotente che non appartiene ad (a).

La dimostrazione dei fatti B.1 e B.2 si ottiene sulla linea di quella dei precedenti lemmi 7 e 8 (salvo le opportune modifiche).

Si hanno finalmente le basi per provare:

TEOREMA 2. Se $m \geqslant 2$, $\mathcal{E}\mathfrak{R}_m^*$ non è una classe elementare.

DIMOSTRAZIONE. Come per il teorema 1.

OSSERVAZIONE. Se $m = 1$, $\mathfrak{R}_1^*$ coincide nuovamente con la classe degli anelli commutativi unitari privi di nilpotenti $\neq 0$, per la quale $\mathcal{E}\mathfrak{R}_1^*$ è elementare ed è stata descritta nel § 1.

Sia $m = \infty$: una buona definizione di $\mathfrak{R}_\infty^*$ pare quella di classe degli anelli commutativi unitari R tali che:

(ψ_∞) se $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ è una successione in $N(R)$, allora

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \ldots a_n) = (0) .$$

Mostreremo che la (ψ_∞) non è esprimibile al 1° ordine neppure con un insieme infinito di enunciati (così che $\mathfrak{R}_\infty^*$ non è elementare), esiste in effetti un anello non soddisfacente (ψ_∞), ultraprodotto di anelli soddisfacenti (ψ_∞). Per la costruzione di un tale anello R^*, si consideri un campo R: definiamo

$$\begin{aligned} R_1 &= R[x_1]/(x_1^2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n &= R[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^2, \ldots, x_n^2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si noti che, in R_n, gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ sono nilpotenti; si ha

$$x_1 x_2 \ldots x_n \neq 0$$

tuttavia R_n soddisfa (ψ_∞): infatti ogni elemento di $R[x_1, \ldots, x_n]$ è equivalente in R_n ad uno della forma

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j + \ldots + a_{1 \ldots n} x_1 \ldots x_n$$

ed un tale elemento è nilpotente in R_n se e solo se $a_0 = 0$, così che il prodotto di $n + 1$ nilpotenti di R_n è costantemente nullo.

Sia dunque $R^* = \prod_{n \in \omega} R_n / D$ l'ultraprodotto della famiglia $\{R_n\}_{n \in \omega}$ mediante un ultrafiltro non principale D su ω, e consideriamo in R^*

gli elementi

$$x_1^* =_D (x_1, x_1, x_1, \ldots, x_1, x_1, \ldots)$$
$$x_2^* =_D (x_1, x_2, x_2, \ldots, x_2, x_2, \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n^* =_D (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_n, \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

tutti nilpotenti di esponente 2. Sia ancora

$$x^* =_D (x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_2 \ldots x_n, \ldots)$$

così che $x^* \neq 0$, tuttavia $x^* \in (x_1^* \ldots x_n^*)$ per ogni n: infatti

$$x_1^* \ldots x_n^* = (0, 0, 0, \ldots, 0, x_1 \ldots x_n, x_1 \ldots x_n, \ldots)$$

e

$$\{m \in \omega\colon (x^*)_m \text{ è divisibile per } (x_1^* \ldots x_n^*)_m\} = \omega - \{0, 1, \ldots, n-1\} \in D\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. Atiyah - I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley (1969).
[2] A. B. Carson, *The model-completion of the theory of commutative regular rings*, J. Algebra, **27** (1973), pp. 136-146.
[3] G. Cherlin, *Algebraically closed commutative rings*, J. Symbolic Logic, **38** (1973), pp. 493-499.
[4] G. Cherlin, *Model-theoretic Algebra. Selected topics*, Lecture Notes in Mathematics 521, Springer-Verlag (1976).
[5] P. Eklof, *Ultraproducts for algebraists*, in: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland (1977), pp. 105-137.
[6] L. Lipshitz - D. Saracino, *The model-companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements*, Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973), pp. 381-387.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 dicembre 1980.