RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 21-42

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__21_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1982)

Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali.

GABRIELE H. GRECO (*)

Introduzione.

Analogamente a quanto accade nelle trattazioni usuali della teoria della misura e dell'integrazione (vedi, per es. [1], [5]), nel § 1 di questo articolo, consideriamo una famiglia $\mathbb{H}$ di sottoinsiemi di X, la famiglia $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$ delle funzioni misurabili rispetto ad $\mathbb{H}$, una funzione d'insieme $\delta: \mathbb{H} \to [0, +\infty]$ monotona definita su $\mathbb{H}$; e definiamo l'integrale $\int_X f\, d\delta$ di una qualsiasi funzione $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$ rispetto alla funzione d'insieme δ mediante la posizione $\int_X f\, d\delta = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}\, dt$, dove α è una funzione crescente, definita su $\mathcal{P}(X)$ ed uguale a δ su $\mathbb{H}$ (questa definizione è una buona definizione soltanto quando f è $\mathbb{H}$-misurabile, cioè $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$). Inoltre chiamiamo « integrali » quei funzionali $T: \mathbb{B} \to [0, +\infty]$, definiti su particolari famiglie di funzioni, dette « domini di integrazione », che verificano per ogni $a \in [0, +\infty)$ e per ogni $f, g \in \mathbb{B}$ queste cinque proprietà:

$$T(0) = 0 \; ; \tag{1}$$

$$T(f) \leqslant T(g) \qquad \text{se } f \leqslant g \; ; \tag{2}$$

$$T(f) = T(f \wedge a) + T(f \vee a - a) \; ; \tag{3}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italy.

$$T(f) = \lim_n T(f \wedge n) \; ; \tag{4}$$

$$T(f) = \lim_n T\left(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) ; \tag{5}$$

queste proprietà, che sono tra loro indipendenti (vedi esempi 1, 2, 3), possono essere automaticamente soddisfatte in alcuni casi più o meno evidenti (vedi Proposizioni 1.2 e 1.3; per esempio, se ogni $f \in \mathbf{B}$ è limitata, la (4) è verificata; oppure, se esiste $f \in \mathbf{B}$ con $T(f) < +\infty$, la (1) segue da (3) ...).

Nel § 2 si dimostra nel teorema di rappresentazione che ogni integrale si può rappresentare come integrale rispetto ad una funzione d'insieme monotona, si descrivono *tutte* le funzioni d'insieme che rappresentano un dato integrale; infine, come conseguenza del teorema di rappresentazione, si dimostra che ogni integrale è omogeneo. L'omogeneità degli integrali (presente nella loro definizione in [3] e richiesta in alcune proposizioni in [2]) dipende da tutte e cinque le proprietà che definiscono un integrale (vedi Esempi 1, 2, 3).

Nel § 3 si danno condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia valido l'analogo del lemma di Fatou (vedi Teorema 3.4 e Lemma 3.2) e condizioni sufficienti affinchè sia valido l'analogo del teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata (vedi Corollario 3.8 e Teorema 3.9). Il tipo di convergenza che entra in gioco in questa analisi sulla continuità e semicontinuità degli integrati è la convergenza uniforme di funzioni in $\overline{\mathbf{R}}^X$, dove $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è la retta estesa metrizzata.

Nel § 4 si danno delle condizioni affinchè un dato integrale si possa estendere in maniera univoca su un dato dominio di integrazione; e si afferma il ruolo di integrale inferiore (risp. superiore) dell'integrale $\int_X - d\alpha_T$ (risp. $\int_X - d\beta_T$), dove α_T (risp. β_T) è la minima (risp. massima) funzione d'insieme monotona che rappresenta un dato integrale T.

Le notazioni e la terminologia, usate in questo articolo sono in generale quelle usuali. Se X è un insieme non vuoto, H un suo sottoinsieme, f una funzione definita su X, indichiamo, con $\mathcal{P}(X)$, φ_H, $f|_H$, $\{f > t\}$, rispettivamente l'insieme delle parti di X, la funzione caratteristica di H definita su X da $\varphi_H(x) = 0$ (risp. 1) se $x \notin H$ (risp. se $x \in H$), la restrizione di f ad H, l'insieme $\{x \in X : f(x) > t\}$; con $\sup_H f$ e $\inf_H f$ indichiamo rispettivamente il numero reale finito o infinito $\sup\{f(x) : x \in H\}$ e $\inf\{f(x) : x \in H\}$, qualora $H \neq \emptyset$. Inoltre conve-

niamo che $0\cdot(+\infty) = 0$ e $\inf \emptyset = 0$. Con $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{R}$ indichiamo, rispettivamente, l'insieme dei numeri interi $n > 0$, e l'insieme dei numeri reali; poniamo

$$[0. +\infty] = \{x \in \mathbf{R}: x > 0\} \cup \{+\infty\},$$

$$[0, \infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \geqslant 0\}, \qquad (0, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x > 0\}.$$

Sia $\mathbf{H} \in \mathcal{P}(X)$ una famiglia d'insiemi non vuota, una funzione d'insieme $\delta: \mathbf{H} \to [0, +\infty]$ si dirà « monotona » se $\delta(\emptyset) = 0$, quando $\emptyset \in \mathbf{H}$, e se $\delta(A) \leqslant \delta(B)$, quando $A, B \in \mathbf{H}$ e $A \subset B$. Seguendo le notazioni corrispondenti di Meyer [6], si dirà, per esempio, che una famiglia d'insiemi è « stabile per $(\cap f)$ » e « stabile per $(\cup n)$ », se $\mathbf{H}$ è, rispettivamente, chiusa per intersezioni finite e per unioni numerabili; simboli di stabilità analoghi, sono usati per le operazioni di « inf » (indicata con « $\wedge$ ») e di « sup » (indicata con « $\vee$ »).

Ringrazio il Prof. Mario Miranda con cui ho, più volte, discusso l'argomento trattato in questo articolo.

1. Definizione d'integrale.

Sia X un insieme non vuoto e sia $[0, +\infty]^X$ la classe delle funzioni $f: X \to [0, +\infty]$. Una famiglia di funzioni non vuota $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ si dice *dominio di integrazione su* X, se le funzioni af, $f \wedge a$, $f \vee a - a$ appartengono a $\mathbf{B}$, qualora $a \in [0, +\infty)$ e $f \in \mathbf{B}$. Poichè conveniamo the $0\cdot(+\infty) = 0$, ogni dominio d'integrazione contiene la funzione nulla 0.

Sia $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ un dominio d'integrazione su X, un'applicazione $T: \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ si dice *integrale sul dominio di integrazione* $\mathbf{B}$, se per ogni $f, g \in \mathbf{B}$ e per ogni $a \in [0, +\infty)$ valgono le seguenti proprietà:

$$T(0) = 0, \tag{1}$$

$$\text{se } f \leqslant g, \qquad \text{allora } T(f) \leqslant T(g), \tag{2}$$

$$T(f) = T(f \wedge a) + T(f \vee a - a), \tag{3}$$

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n), \tag{4}$$

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T\left(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Queste cinque proprietà saranno indicate nel seguito come «*proprietà dell'integrale*».

NOTA 1. In [3] ho chiamato «integrale monotono» ogni applicazione T, definita su un dominio d'integrazione, che verifica le cinque proprietà precedenti ed è omogenea, cioè verifica anche la seguente proprietà:

$$(1)' \qquad T(af) = aT(f) \text{ per ogni } a \in [0, +\infty) \text{ e } f \in \mathbf{B}\,;$$

nel seguito si dimostra che ogni integrale, definito come sopra, è omogeneo (vedi Corollario 2.1) e che la proprietà di omogeneità dipende da tutte le cinque proprietà dell'integrale (vedi Esempi 1, 2, 3). ■

L'insieme $[0, +\infty]^X$ delle funzioni numeriche definite su X è il più grande dominio d'integrazione su X; ogni unione o intersezione di domini di integrazione su X è un dominio di integrazione. Il dominio di integrazione su X, generato da una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ è

$$B_f = \{a(f \wedge b - f \wedge c) \colon a, c, b \in [0, +\infty],\ a < +\infty \text{ e } 0 \leqslant c < b \leqslant +\infty\}\,;$$

mentre quello generato da una famiglia di funzioni $\mathbf{D} \subset [0, +\infty]^X$ è $\{0\}$ se $\mathbf{D} = \emptyset$, altrimenti è $\bigcup_{f \in \mathbf{D}} \mathbf{B}_f$. Se $\mathbf{H}$ è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X, il dominio d'integrazione generato da $\mathbf{H}$ è $\{a\varphi_H \colon H \in \mathbf{H} \text{ e } a \in [0, +\infty)\}$, dove $\varphi_H \colon X \to \{0, 1\}$ indica la funzione caratteristica dell'insieme H. Il più importante dominio di integrazione, associato ad una famiglia di insiemi $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$, contenente l'insieme vuoto, è quello delle funzioni $\mathbf{H}$-misurabili (vedi [4]). Una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ è detta $\mathbf{H}$-*misurabile*, se per ogni $a, b \in (0, +\infty)$ con $a > b$ esiste un insieme $H \in \mathbf{H}$ tale che

$$(6) \qquad \{f \geqslant a\} \subset H \subset \{f > b\}\,;$$

la classe delle funzioni $\mathbf{H}$-misurabili, indicata con il simbolo $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è un dominio d'integrazione con queste ulteriori proprietà:

(7) Se $f \wedge 1$, $f \vee 1 - 1 \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, allora $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$.

(8) Se $\{f_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è una rete di funzioni e per ogni $n \in \mathbf{N}$ la rete $\{f_j \wedge n\}_j$ converge uniformemente a $f \wedge n$, allora $f \in \mathcal{M}^+ \cdot (X, \mathbf{H})$.

Inoltre (vedi [4])

(9) $\mathbf{H}$ è stabile per $(\cap f)$ (risp. $(\cup f)$) se e solo se $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è stabile per $(\wedge f)$ e (risp. $(\vee f)$);

(10) $\mathbf{H}$ è stabile per $(\cap f, \cup f)$ se e solo se $\mathcal{M}_+(X, \mathbf{H})$ è stabile per somme finite;

(11) $\mathbf{H}$ è stabile $(\cap n)$ (risp. $(\cup n)$) se e solo se $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è stabile per $(\wedge n)$ (risp. $(\vee n)$); in questo caso una f è $\mathbf{H}$-misurabile se e solo se per ogni $a \in (0, +\infty)$ l'insieme $\{f \geqslant a\}$ (risp. $\{f > a\}$) appartiene a $\mathbf{H}$.

Sia $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \in \mathbf{H}$. Se $\delta: \mathbf{H} \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme monotona, definiamo l'applicazione $\int_X - d\delta: \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) \to [0, +\infty]$ mediante la posizione $\int_X f\, d\delta = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}\, dt$, dove $\alpha: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è una qualsiasi funzione d'insieme monotona tale che $\alpha(A) = \delta(A)$ per ogni $A \in \mathbf{H}$; questa è più che buona definizione, perchè, come si è dimostrato in [4], una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ è $\mathbf{H}$-misurabile se e solo se per ogni coppia di funzioni d'insieme $\gamma, \beta: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ monotone e, tali che $\gamma(A) = \beta(A)$ per ogni $A \in \mathbf{H}$, risulta

$$\int_0^{+\infty} \beta\{f > t\}\, dt = \int_0^{+\infty} \gamma\{f > t\}\, dt\,.$$

L'applicazione $\int_X - d\delta: \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) \to [0, +\infty]$ è l'unico integrale, definito sul dominio d'integrazione $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, che sulle funzioni caratteristiche d'insieme φ_H vale $\delta(H)$ per ogni $H \in \mathbf{H}$; essa è detta «*integrale rispetto alla funzione d'insieme monotona* δ».

Le proprietà (1), (2), (3), (4), (5) dell'integrale sono indipendenti ed, inoltre, ogni applicazione T che verifica solo quattro di esse può non essere omogenea, come si deduce da questi esempi.

Esempio 1. Sia $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ un dominio d'integrazione su X. L'unica applicazione $T: \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ che verifica soltanto le proprietà (2), (3), (4), (5) dell'integrale, è definita dalla posizione $T(f) = +\infty$ per ogni $f \in \mathbf{B}$. ■

Esempio 2. Sia $X = \{0, 1\}$. L'applicazione

$$T\colon [0, +\infty]^X \to [0, +\infty],$$

definita da $T(f) = f(0)\cdot f(1)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^X$ verifica soltanto le proprietà (1), (2), (4), (5) dell'integrale e non è omogenea. ■

Esempio 3. Sia $X = [0, +\infty)$ e sia $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Siano

$$T_1, T_2, T_3\colon \mathbb{B}_f \to [0, +\infty)$$

le applicazioni, definite sul dominio di integrazione $\mathbb{B}_f = \{a(f\wedge b - f\wedge c)\colon a \in [0, +\infty) \text{ e } 0 \leqslant c < b \leqslant +\infty\}$ dalle posizioni

$$T_1(a(f\wedge b - f\wedge c)) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \neq +\infty, \\ a^2 & \text{se } b = +\infty, \end{cases}$$

$$T_2(a(f\wedge b - f\wedge c)) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \neq 0, \\ a^2 & \text{se } c = 0, \end{cases}$$

$$T_3(a(f\wedge b - f\wedge c)) = \begin{cases} 0 & a = 0, \\ b - c & \text{se } a \neq 0, \end{cases}$$

per ogni $a \in [0, +\infty)$ e per ogni $b, c \in [0, +\infty]$ con $0 \leqslant c < b \leqslant +\infty$. L'applicazione T_1 verifica solo le proprietà (1), (2), (3), (5) dell'integrale; l'applicazione T_2 verifica solo le proprietà (1), (2), (3), (4); l'applicazione T_3 verifica solo le proprietà (1), (3), (4), (5). Le applicazioni T_1, T_2, T_3 non sono omogenee. ■

Concludiamo questo paragrafo elencando alcune proposizioni riguardanti le proprietà di un integrale: la Proposizione 1.1 permette di scrivere in forma più compatta le proprietà (4) e (5) dell'integrale mediante la proprieta (4) + (5) (vedi anche la prossima nota 2); le Proposizioni 1.2 e 1.3 presentano alcune situazioni che si trovano in letteratura (vedi, per esempio, Teorema 6.4 in [2]), in ipotesi più forti.

Proposizione 1.1. *Un'applicazione* $T\colon \mathbb{B} \to [0, +\infty]$, *definita sul dominio d'integrazione* $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]$ *è un integrale se e solo se verifica*

le proprietà (1), (2), (3) *dell'integrale e, inoltre, verifica la proprietà*

$$(4)+(5) \qquad T(f)=\lim_{n\to+\infty} T\left(f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\right).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che T sia un integrale, dimostriamo che T verifica (4) + (5). Per ogni $f\in\mathbf{B}$ si hanno le uguaglianze

$$\left(f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\right)\wedge\left(1-\frac{1}{n}\right)=(f\vee 1-1)\wedge(n-1)$$

e

$$\left[\left(f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\right)\vee\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]-\left(1-\frac{1}{n}\right)=(f\wedge 1)\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\,;$$

quindi per la proprietà (3) dell'integrale risulta

$$T\left(f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\right)=T[(f\vee 1-1)\wedge(n-1)]+T\left[(f\wedge 1)\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right];$$

passando al limite per $n\to+\infty$ in questa ultima uguaglianza si ottiene (4) + (5), in virtù di (3), (4), (5). Viceversa, supposto che T verifichi (1), (2), (3) e (4) + (5), dimostriamo che T è un integrale. Per ogni $f\in\mathbf{B}$ e $n\in\mathbf{N}$ si hanno le disuguaglianze

$$f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\leqslant f\wedge n\leqslant f \qquad \text{e} \qquad f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\leqslant f\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\leqslant f\,;$$

da queste risulta, in virtù di (2),

$$T\left(f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\right)\leqslant T(f\wedge n)\leqslant T(f)$$

e

$$T\left(f\wedge n-f\wedge\frac{1}{n}\right)\leqslant T\left(f\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)\leqslant T(f)\,;$$

quindi passando al limite per $n\to+\infty$, si ottiene (4) e (5). ■

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia* $T\colon\mathbf{B}\to[0,+\infty]$ *un'applicazione definita sul dominio di integrazione* $\mathbf{B}$. *Indichiamo con* $\beta_T\colon\mathcal{P}(X)\to[0,+\infty]$ *la*

funzione d'insieme definita da $\beta_T(A) = \inf\{T(f)\colon \varphi_A \leqslant f$ *e* $f \in \mathbf{B}\}$. *Se la applicazione* T *verifica le proprietà* (1), (2), (3), (4) *dell'integrale ed è tale che* $\beta_T\{f > 0\} < +\infty$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$, *allora* T *è un integrale.*

Dimostrazione. Per dimostrare che T verifica la proprietà (5) è sufficiente dimostrare che per ogni $f \in \mathbf{B}$ risulta $\lim_n T(f \wedge 1/n) = 0$, poichè $T(f) = T(f \vee 1/n - 1/n) + T(f \wedge 1/n)$. Essendo $\beta_T\{f > 0\} < +\infty$, esiste una funzione $g \in \mathbf{B}$ tale che $g \geqslant \varphi_{\{f>0\}}$ e $T(g) < +\infty$; quindi, avendosi per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $n > 1$ la diseguaglianza

$$f \wedge \frac{1}{n} \leqslant g \wedge \frac{1}{n-1} - g \wedge \frac{1}{n}, \quad \text{risulta } T\left(f \wedge \frac{1}{n}\right) \leqslant T\left(g \wedge \frac{1}{n-1} - g \wedge \frac{1}{n}\right);$$

passando al limite in questa ultima diseguaglianza si ha $\lim_n T(f \wedge \wedge 1/n) = 0$, perchè

$$T\left(g \wedge \frac{1}{n-1} - g \wedge \frac{1}{n}\right) = T\left(g \wedge \frac{1}{n-1} - T\left(g \wedge \frac{1}{n}\right). \qquad \blacksquare$$

Proposizione 1.3. *Sia* $\mathbf{B}$ *un dominio di integrazione su* X *con una di queste proprietà*

i) $f \in \mathbf{B} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n[f \wedge n - f \wedge (n-1)] \in \mathbf{B}$,

ii) $f \in \mathbf{B} \Rightarrow f^2 \in \mathbf{B}$.

Ogni applicazione $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty)$ *con le proprietà* (2), (3), (5) *dell'integrale, tale che esiste una costante* $a \in (0, +\infty)$ *con* $a \neq 1$ *per la quale* $T(af) = aT(f)$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$, *è un integrale.*

Dimostrazione. Per dimostrare che T è un integrale, è sufficiente verificare che $\lim_n T(f \vee n - n) = 0$ per ogni $f \in \mathbf{B}$. Perciò sia $f \in \mathbf{B}$, chiamiamo g la funzione f^2 o la funzione $\sum_{n=1}^{\infty} n[f \wedge n - f \wedge (n-1)]$, a seconda che $\mathbf{B}$ verifica i) o ii); in ambedue questi casi risulta $(f \vee n - n) \leqslant g/n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Poniamo $b = a$ (risp. $= a^{-1}$) se $a > 1$ (risp. $a < 1$); poichè $T(ah) = aT(h)$ per ogni $h \in \mathbf{B}$, risulta $T(g/b^n) = = T(g)/b^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; quindi, essendo $\lim_n T(g/b^n) = \lim_n T(g)/b^n = 0$, risulta $\lim_n T(g/n) = 0$.

Dunque $\lim_n T(f \vee n - n) = 0$, poichè $T(f \vee n - n) \leqslant T(g/n)$. $\blacksquare$

NOTA 2. La Proposizione 1.1 suggerisce una nuova definizione di integrale T, ottenuta modificando leggermente la definizione di dominio di integrazione (cioè $\mathbf{B}$ si suppone che sia una famiglia non vuota contenente le funzioni af e $f\wedge b - f\wedge c$, ogni qualvolta $f \in \mathbf{B}$, $a, b, c \in [0, +\infty)$ con $0 < c < b < +\infty$) e obbligando T a verificare le proprietà (1), (2), (3), (4) + (5). Questa nuova definizione continua a soddisfare tutte le proposizioni, riguardanti un integrale T, presenti in questo articolo. ■

2. Teorema di rappresentazione ed omogeneità dell'integrale.

Sia $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ un integrale, definito sul dominio d'integrazione $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$; siano $\alpha_T, \beta_T\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ le funzioni d'insieme monotone definite da

$$\alpha_T(A) = \sup\{T(f)\colon f \in \mathbf{B}, f \leqslant \varphi_A\},$$

$$\beta_T(A) = \inf\{T(f)\colon f \in \mathbf{B}, f \geqslant \varphi_A\},$$

dove conveniamo che $\inf \emptyset = +\infty$. Si dirà che una funzione d'insieme $\gamma\colon \mathbf{H} \to [0, +\infty]$, dove $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \in \mathbf{H}$, *rappresenta* l'integrale $T\colon B \to [0, +\infty]$, se $\mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ e $T(f) = \int_X f\, d\gamma$ per ogni $f \in \mathcal{M}^+ \cdot (X, \mathbf{H})$.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE. *Sia $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ un integrale, e $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$ con $\emptyset \in \mathbf{H}$. Una funzione d'insieme monotona $\gamma\colon \mathbf{H} \to [0, +\infty]$ rappresenta T se e solo se $\mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{N})$ e $\alpha_T(H) \leqslant \gamma(H) \leqslant \beta_T(H)$ per ogni $H \in \mathbf{H}$.*

COROLLARIO 2.1 (omogeneità dell'integrale). *Ogni integrale $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty)$ è omogeneo, cioè verifica*

$$(1)' \qquad T(af) = aT(f) \qquad \textit{per ogni } a \in [0, +\infty). \qquad ■$$

Questo corollario segue direttamente dal teorema di rappresentazione, poichè ogni integrale $\int_X \cdot\, d\alpha$ rispetto ad una funzione d'insieme monotona α è omogeneo, e la funzione d'insieme α_T rappresenta T.

Poichè per $\mathbf{H} = \mathcal{P}(X)$ risulta $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) = [0, +\infty)^X$, si osserva facilmente che il teorema di rappresentazione è equivalente alla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia* $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale. Una funzione d'insieme* $\gamma\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *rappresenta* T *se e solo se* $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$.

Alla dimostrazione della Proposizione 2.2 premettiamo questi due lemmi.

LEMMA 2.3. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$. *Valgono le seguenti disuguaglianze per ogni* $n, i \in \mathbf{N}$.

$$\text{(i)} \quad (2f) \wedge \frac{i+1}{2^{n-1}} - (2f) \wedge \frac{i}{2^{n-1}} \leqslant f \wedge \frac{i+1}{2^n} - f \wedge \frac{i-1}{2^n},$$

$$\text{(ii)} \quad f \wedge \frac{i+1}{2^n} - f \wedge \frac{i}{2^n} \leqslant (2f) \wedge \frac{2i}{2^n} - (2f) \wedge \frac{2i-1}{2^n}. \qquad \blacksquare$$

LEMMA 2.4. *Sia* $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale sul dominio di integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$. *Allora* $T(2f) = 2T(f)$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2.4. Dalla diseguaglianza (i) del Lemma 2.3 e dalla proprietà (2) dell'integrale T segue che

$$(*) \quad T\left[(2f) \wedge \frac{i+1}{2^{n-1}} - (2f) \wedge \frac{i}{2^{n-1}}\right] \leqslant T\left(f \wedge \frac{i+1}{2^n} - f \wedge \frac{i-1}{2^n}\right) \qquad \forall i \in \mathbf{N};$$

da $(*)$, in virtù delle proprietà (3), (4) dell'integrale T si ottiene

$$T\left[(2f) \vee \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} T\left[(2f) \wedge \frac{i+1}{2^{n-1}} - (2f) \wedge \frac{i}{2^{n-1}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} T\left(f \wedge \frac{i+1}{2^n} - f \wedge \frac{i}{2^n}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} T\left(f \wedge \frac{i}{2^n} - f \wedge \frac{i-1}{2^n}\right) =$$
$$= T\left(f \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) + T(f),$$

cioè

$$(**) \qquad T\left[(2f) \vee \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \leqslant T\left(f \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) + T(f).$$

Per le proprietà (2) e (5) di T, passando al limite per $n \to +\infty$ in $(**)$, si ottiene

$$(***) \qquad T(2f) \leqslant 2T(f).$$

Dalla disuguaglianza (ii) del Lemma 2.3 e dalla seguente diseguaglianza

$$(2f)\wedge\frac{2i}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}\leqslant(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-2}{2^n},$$

vera per ogni $i, n\in\mathbf{N}$, segue, in virtù della proprietà (2) di T, per ogni $i\in\mathbf{N}$

$$(*)'\qquad T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n}-f\wedge\frac{i}{2^n}\right)\leqslant T\left[(2f)\wedge\frac{2i}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}\right],$$

$$(*)''\qquad T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n}-f\wedge\frac{i}{2^n}\right)\leqslant T\left[(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-2}{2^n}\right].$$

Da $(*)'$, $(*)''$, per le proprietà (3) e (4) di T si ha

$$2T\left(f\vee\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=2\sum_{i=1}^{\infty}T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n}-f\wedge\frac{i}{2^n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}T\left[(2f)\wedge\frac{i}{2^{n-1}}-(2f)\wedge\frac{i-1}{2^{n-1}}\right]=T(2f)\,;$$

cioè

$$(**)'\qquad 2T\left(f\vee\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)\leqslant T(2f)\,.$$

Passando al limite per $n\to+\infty$ nella disuguaglianza $(**)'$, in virtù delle proprietà (2), (3) di T si ha

$$(***)'\qquad 2T(f)\leqslant T(2f)\,.$$

Infine da $(***)$ e da $(***)'$ si ottiene $T(2f)=2T(f)$ per ogni $f\in\mathbf{B}$. ■

Dimostrazione della Proposizione 2.2. Sia $f\in\mathbf{B}$. Dal Lemma 2.4 risulta

$$(*)\qquad T(2^n f)=2^n T(f)\qquad\text{per ogni } n\in\mathbf{N}\,;$$

inoltre si ha

$$(**)\qquad f\wedge n-f\wedge\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\varphi_{\{f>i/2^n\}}\leqslant f\,.$$

Se $\gamma\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme tale che $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$ si ottiene da (*), (**) e dalla proprietà (3) di T, la disuguaglianza

$$(**)' \qquad T\left(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} \gamma\left\{f > \frac{i}{2^n}\right\} \leqslant T(f)\,;$$

passando al limite per $n \to +\infty$, in virtù della Proposizione 1.1, risulta $T(f) = \int f\, d\gamma$, poichè

$$\int_X f\, d\gamma = \lim_n \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} \gamma\left\{f > \frac{i}{2^n}\right\}.$$

Quindi γ rappresenta l'integrale T. Il viceversa, cioè ogni γ che rappresenta T è tale che $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$ è una conseguenza diretta della definizione delle funzioni d'insieme α_T e β_T. ■

3. Sulla continuità e semicontinuità dell'integrale.

Si è visto nel teorema di rappresentazione che ogni integrale è restrizione di un integrale del tipo $\int_X - d\alpha$, dove $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme monotona; quindi nell'analisi, che presentiamo in questo paragrafo, sulla continuità e semicontinuità dell'integrale, non mancheremo di generalità nell'usare solo integrali di questo tipo. Si dirà che una rete di funzioni $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$, indiciata su un insieme diretto J, *converge uniformemente in* $\overline{\mathbf{R}}^X$ verso la funzione $f \in [0, +\infty]^X$, se la rete $\{f_j \wedge n\}_j$ converge uniformemente verso $f \wedge n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si osserva che una condizione necessaria, affinchè valga l'uguaglianza $\int_X f\, d\alpha = \lim_j \int_X f_j\, d\alpha$ per ogni funzione d'insieme monotona α, è che la rete $\{f_j\}_j$ converga uniformemente in $\overline{\mathbf{R}}^X$. A proposito di questo tipo di convergenza uniforme valgono questi tre lemmi, facili da dimostrare:

LEMMA 3.1. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *e* $f \in [0, +\infty]^X$. *La rete* $\{f_j\}_j$ *converge uniformemente in* $\overline{\mathbf{R}}^X$ *verso* f *se e solo se sono verificate le seguenti condizioni*

i) $\operatorname{maxlim}_{j\in J} \left[\sup_X (f \wedge n - f_j)\right] \leqslant 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,

ii) $\operatorname{maxlim}_{j\in J} \left[\sup_X (f_j \wedge n - f)\right] \leqslant 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$. ■

LEMMA 3.2. *Sia* $\{f_{ij}\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* $f \in [0, +\infty]^X$. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J} \left[\sup_X (f \wedge n - f_j)\right] \leqslant 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,

ii) $\inf_A (f) \leqslant \operatorname*{minlim}_{j\in J} \left[\inf_A (f_j)\right]$ *per ogni* $A \in \mathcal{P}(X)$. ■

LEMMA 3.3. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* $f \in [0, +\infty]^X$. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J} \left[\sup_X (f_j \wedge n - f)\right] \leqslant 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,

ii) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J} \left[\sup_A (f_j)\right] \leqslant \sup_A (f)$ *per ogni* $A \in \mathcal{P}(X)$ *con* $A \neq \emptyset$. ■

TEOREMA 3.4. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* $f \in [0, +\infty]^X$. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\inf_A (f) \leqslant \operatorname*{minlim}_{j\in J} \left[\inf_A (f_j)\right]$ *per ogni* $A \in \mathcal{P}(X)$,

ii) $\int_X f\, d\alpha \leqslant \operatorname*{minlim}_{j\in J} \int_X f_j\, d\alpha$ *per ogni* $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *monotona*.

DIMOSTRAZIONE. i) $\Rightarrow$ ii). In virtù del Lemma 3.2 la i) è equivalente alla proprietà

$$(*) \qquad \operatorname*{maxlim}_{j\in J} \left[\sup_X (f \wedge n - f_j)\right] \leqslant 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}\,;$$

quindi dimostriamo che $(*) \Rightarrow$ ii). Fissata la funzione d'insieme monotona α, sia $\{a_n\}_n \subset \mathbf{R}$ una successione tale che $a_n < \int_X f\, d\alpha$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\lim_n a_n = \int_X f\, d\alpha$. In virtù della Proposizione 1.1, per ogni a_n esiste un $k_n \in \mathbf{N}$ tale che

$$(**) \qquad \int_X \left(f \wedge k_n - f \wedge \frac{1}{k_n}\right) d\alpha \geqslant a_n\,.$$

Da (*) segue l'esistenza di un $j_n \in J$ tale che

$$(***) \qquad f \wedge k_n - f_j \leqslant \frac{1}{k_n} \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_n ,$$

cioè

$$(***)' \qquad f \wedge k_n - f \wedge \frac{1}{k_n} \leqslant f_j \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_n .$$

Dalla proprietà (2) dell'integrale $\int_X - d\alpha$, da (**) e da (***)' segue che $a_n \leqslant \int_X f_j \, d\alpha$ per ogni $j \geqslant j_n$. Quindi vale la ii).

ii) $\Rightarrow$ i). Sia A un sottoinsieme di X. L'applicazione T: $[0, +\infty]^X \to [0, +\infty]$, definita da $T(g) = \inf_A (g)$ per ogni $g \in [0, +\infty]^X$, è un integrale rappresentato dalla funzione d'insieme α_A: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definita da $\alpha_A(B) = \inf_A \varphi_B$. Quindi, applicando la proprietà ii), quando α è la funzione d'insieme φ_A, si ottiene la validità di i). ■

COROLLARIO 3.5 (vedi [3]). *Se la rete* $\{f_j\}_{j \in J} \subset [0, +\infty]^X$ *converge uniformemente in* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *verso la funzione* $f \in [0, +\infty]^X$, *allora*

$$\int_X f \, d\alpha \leqslant \min\lim_{j \in J} \int_X f_j \, d\alpha$$

per ogni funzione d'insieme monotona α: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$. ■

COROLLARIO 3.6. *Sia* $\{f_j\}_{j \in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* f *una funzione* $\in [0, +\infty]^X$ *tale che* $f_j \leqslant f$ *per ovni* j. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\{f_j\}_{j \in J}$ *converge uniformemente in* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *verso* f,

ii) $\int_X f \, d\alpha = \lim_{j \in J} \int_X f \, d\alpha$ *per ogni funzione d'insieme monotona* α: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$. ■

TEOREMA 3.7. *Sia* α: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona; sia* $\{f_j\}_{j \in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* $f, g \in [0, +\infty]^X$. *Se* $\int_X g \, d\alpha <$

$< +\infty$, *e* $f_j \leqslant g$ *per ogni* $j \in J$, *se* $\operatorname{maxlim}_{j\in J} [\sup_A (f_j)] \leqslant \sup_A (f)$ *per ogni sottoinsieme* A *non vuoto di* X, *allora* $\int_X f\, d\alpha \geqslant \operatorname{maxlim}_{j\in J} \int_X f_j\, d\alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon \in (0, +\infty)$; in virtù della Proposizione 1.1, poichè $\int_X g\, d\alpha < +\infty$, esiste un $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che

$$(*) \qquad \int_X \left(g \wedge \frac{1}{k_\varepsilon}\right) d\alpha \leqslant \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_X (g \vee k_\varepsilon - k_\varepsilon)\, d\alpha \leqslant \varepsilon\,.$$

In virtù del Lemma 3.3, esiste un $j_\varepsilon \in J$ tale che

$$(**) \qquad f_j \wedge k_\varepsilon - f_j \wedge \frac{1}{k_\varepsilon} \leqslant f \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_\varepsilon\,.$$

Dalla proprietà (3) dell'integrale $\int_X - d\alpha$, risulta per ogni $j \in J$

$$(***) \qquad \int_X f_j\, d\alpha = \int_X \left(f_j \wedge \frac{1}{k_\varepsilon}\right) d\alpha + \\ + \int_X \left(f_j \wedge k_\varepsilon - f_j \wedge \frac{1}{k_\varepsilon}\right) d\alpha + \int_X (f_j \vee k_\varepsilon - k_\varepsilon)\, d\alpha\,.$$

Allora da $(*)$, $(**)$, $(***)$ e dalla proprietà (2) dell'integrale $\int_X - d\alpha$, poichè $f_j \leqslant g$ per ogni $j \in J$, si ottiene $\int_X f_j\, d\alpha \leqslant 2\varepsilon + \int_X f\, d\alpha$ per ogni $j \geqslant j_\varepsilon$. Quindi, data l'arbitrarietà di ε, si ottiene che $\int_X f\, d\alpha \geqslant \operatorname{maxlim}_{j\in J} \int_X f_j\, d\alpha$. ■

COROLLARIO 3.8 (vedi [3]). *Sia* $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona; sia* $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete convergente uniformemente in* $\overline{\mathbf{R}}^X$ *verso la funzione* $f \in [0, +\infty]^X$. *Se esiste una funzione* $g \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $f_j \leqslant g$ *per ogni* $j \in J$ *e* $\int_X g\, d\alpha < +\infty$, *allora*

$$\int_X f\, d\alpha = \lim_{j\in J} \int_X f_j\, d\alpha\,. \qquad ■$$

Sia $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme, $\{f_j\}_{j\in J}$ una rete $\subset [0, +\infty]^X$ e f una funzione $\in [0, +\infty]^X$; si dirà che la rete $\{f_j\}_{j\in J}$

converge *quasi-uniformemente* a f, se per ogni $\varepsilon \in (0, +\infty)$ esiste un insieme $B \in \mathfrak{P}(X)$ tale che $\alpha(B) < \varepsilon$ e la rete $\{f_j \varphi_{X-B}\}_{j \in J}$ converge uniformemente in $\overline{\mathbf{R}}^X$ verso la funzione $f\varphi_{X-B}$.

TEOREMA 3.9. *Sia* α: $\mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona e subadditiva* (*cioè* $\alpha(A \cup B) \leqslant \alpha(A) + \alpha(B)$ *per ogni* $A, B \in \mathfrak{P}(X)$). *Se la rete* $\{f_j\}_{j \in J}$ *converge quasi-*α*-uniformemente verso la funzione* f *e se esiste una funzione* $g \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $f_j \geqslant g$ *per ogni* $j \in J$ *e*

$$\int_X g \, d\alpha < +\infty, \qquad \textit{allora} \qquad \int_X f \, d\alpha = \lim_{j \in J} \int_X f_j \, d\alpha .$$

Premettiamo alla dimostrazione di questo teorema un lemma sull'assoluta continuità dell'integrale.

LEMMA 3.10. *Sia* α: $\mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona e sia* $g \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $\int_X g \, d\alpha < +\infty$. *Allora per ogni* $\varepsilon \in (0, +\infty)$ *esiste un* $\delta \in (0, +\infty)$ *tale che si abbia* $\int_B g \, d\alpha < \varepsilon$, *qualora* $B \in \mathfrak{P}(X)$ *e* $\alpha(B) < \delta$. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.9. Dalla convergenza quasi-α-uniforme della rete $\{f_j\}_{j \in J}$ esiste per ogni $n \in \mathbf{N}$ un insieme $B_n \in \mathfrak{P}(X)$ tale che

(*) $\alpha(B_n) < 1/n$, $\int_{B_n} g \, d\alpha < 1/n$ e la rete $\{f_j \varphi_{X-B_n}\}_j$ converge uniformemente in $\overline{\mathbf{R}}^X$ verso la funzione $f\varphi_{X-B_n}$.

Poichè α è subadditiva, anche le funzioni d'insieme ν_j, ν: $\mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ definite da $\nu_j(A) = \int_A f_j \, d\alpha$ e $\nu(A) = \int_A f \, d\alpha$ per ogni $A \in \mathfrak{P}(X)$ sono subadditive. Sia $S = \{x \in X$: la rete $\{f_j(x)\}_{j \in J}$ non converge a $f(x)\}$; l'insieme S è contenuto in ogni B_n, quindi $\alpha(S) = 0$; in virtù della subadditività di ν, si ha

$$\int_X f \, d\alpha \leqslant \int_{X-S} f \, d\alpha + \int_S f \, d\alpha \leqslant \int_{X-S} g \, d\alpha < \infty ;$$

quindi in virtù del lemma precedente, applicato alla funzione f avente

integrale finito, risulta

$$(**) \qquad \int_X f\,d\alpha = \lim_n \int_{X-B_n} f\,d\alpha\,,$$

poichè $\alpha(B_n) < 1/n$ e $0 \leqslant \int_X f\,d\alpha - \int_{X-B_n} f\,d\alpha \leqslant \int_{B_n} f\,d\alpha$.

Dalla subadditivtà delle funzioni d'insieme ν_j e da $(*)$ si ottengono le diseguaglianze

$$\int_X f_j\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f_j\,d\alpha + \int_{B_n} f_j\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f\,d\alpha + \int_{B_n} g\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f_j\,d\alpha + \frac{1}{n}\,;$$

passando al limite in queste disuguaglianze, in virtù di $(*)$ e del Corollario 3.8, abbiamo per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$(**)' \qquad \max\lim_{j\in J} \int_X f_j\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f\,d\alpha + \frac{1}{n}\,.$$

D'altra parte, poichè $\lim_{j\in J} \int_{X-B_n} f_j\,d\alpha = \int_{X-B_n} f\,d\alpha$, risulta per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$(**)'' \qquad \int_{X-B_n} f\,d\alpha \leqslant \min\lim_{j\in J} \int f_j\,d\alpha\,.$$

Dunque da $(**)$, $(**)'$, $(*,*)''$ segue che $\int_X f\,d\alpha = \lim_{j\in J} \int_X f_j\,d\alpha$. ■

4. Estensione di integrali.

Sia $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ è un integrale sul dominio d'integrazione $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$, una funzione d'insieme $\gamma\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ monotona rappresenta T se e solo se $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$. Sia $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$ con $\emptyset \in \mathbf{H}$ una famiglia d'insiemi e sia $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme monotona, tali che

$$(*) \qquad \mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})\,,$$

$$(**) \qquad \alpha_T \leqslant \alpha \leqslant \beta_T\,;$$

le restrizioni $\alpha|_{\mathbb{H}}: \mathbb{H} \to [0, +\infty]$ costituiscono tutte e sole le funzioni d'insieme che rappresentano l'integrale T. Perciò essendo α_T (risp. β_T) la minima (risp. la massima) funzione d'insieme monotona, definita su $\mathcal{P}(X)$ che rappresenta T, risulta per ogni $\mathbb{H} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che $\emptyset \in \mathbb{H}$ e $\mathbb{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$:

$$\text{i)}\ \alpha_T(A) = \sup\{\alpha_T(H): H \in \mathbb{H} \text{ e } H \subset A\},\ \forall A \in \mathcal{P}(X),$$

$$\text{ii)}\ \beta_T(A) = \inf\{\beta_T(H): H \in \mathbb{H} \text{ e } H \supset A\},\ \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Osservazione. Se $T: \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ è un integrale, diremo che una famiglia d'insiemi $\mathbb{H}$ (può accadere che $\mathbb{B} \not\subset \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$) è *densa per l'integrale* T se sono soddisfatte le precedenti uguaglianze i) e ii). In altre parole la famiglia d'insiemi $\mathbb{H}$ è densa se e solo se una funzione d'insieme monotona $\alpha: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ rappresenta T, ogni qualvolta esiste una $\beta: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ che rappresenta T, tale che $\beta|_{\mathbb{H}} = \alpha|_{\mathbb{H}}$. ■

La funzione d'insieme $\delta_T: \mathcal{R}_T \to [0, +\infty]$, definita sulla famiglia $\mathcal{R}_T = \{A \in \mathcal{P}(X): \alpha_T(A) = \beta_T(A)\}$ degli insiemi *T-regolari* dalla posizione $\delta_T(A) = \alpha_T(A)$ per ogni $A \in \mathcal{R}_T$, ha una certa rilevanza nello studio degli integrali; essa riassume le informazioni possedute da un integrale T, come si è constatato nell'introduzione di [3]. La funzione d'insieme δ_T non solo rappresenta l'integrale T (conseguenza del teorema sulla densità di $\mathcal{R}_T$, vedi Th. 4.2), ma anche permette di stabilire su quali domini di integrazione si può estendere, in maniera univoca, l'integrale T (vedi prossimo Th. 4.3).

Teorema 4.2 (densità di $\mathcal{R}_T$). *Sia $T: \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ un integrale. Per ogni funzione $f \in \mathbb{B}$ l'insieme $\{t \in (0, +\infty): \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ è numerabile.*

Dimostrazione. Nel caso che $f \in \mathbb{B}$ e $T(f) < +\infty$, la numerabilità dell'insieme $\{r \in (0, \infty): \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ segue dall Proposizione 3 di [3]. Invece nel caso che $f \in \mathbb{B}$ e $T(f) = +\infty$, potendo supporre senza mancare di generalità che $f \leqslant 1$, consideriamo il numero $t_0 \in [0, 1]$, definito da $t_0 = \inf\{t \in [0, 1]: T(f \vee t - t) < +\infty\}$. Allora risulta che l'insieme $\{t \in (0, 1]: \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ è numerabile, poichè per ogni $t \in (t_0, 1]$ è $T(f \vee t - t) < +\infty$; mentre l'insieme $\{t \in (0, t_0): \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ è vuoto, perchè $\alpha_T\{f > t\} = +\infty$ per ogni $t \in (0, t_0)$, avendosi

$$f \wedge t_0 - f \wedge t \leqslant \varphi_{\{f > t\}} \quad \text{e} \quad T(f \wedge t_0 - f \wedge t) = +\infty .$$

Quindi il teorema è dimostrato. ■

TEOREMA 4.3 (unicità dell'estensione di un integrale). *Sia* $T\colon \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale sul dominio di integrazione* $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$. *Sia* $\mathbb{B}'$ *un dominio d'integrazione su* X *tale che* $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$. *Allora esiste un'unica estensione* T' *di* T *su* $\mathbb{B}'$ *se e solo se* $\mathbb{B}' \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{R}_T)$; *in tal caso risulta* $T'(f) = \int_X f\, d\delta_T$ *per ogni* $f \in \mathbb{B}'$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue facilmente dal teorema di rappresentazione. ■

Nella teoria classica della misura e dell'integrazione sovente per estendere un integrale si ricorre all'integrale superiore o all'integrale inferiore (vedi [1]), più che alla misura esterna e alla misura interna. Finora si è visto che le estensioni di un integrale T, così come è inteso in questo articolo, sono ottenibili mediante il ricorso alle funzioni d'insieme α_T e β_T (funzioni d'insieme corrispondenti, rispettivamente alla misura interna ed esterna della teoria classica); cosicchè gli integrali $\int_X - d\alpha_T$ e $\int_X - d\beta_T$ vengono a svolgere nella nostra teoria dell'integrale il ruolo, rispettivamente, di integrale inferiore e superiore, benchè questi siano definiti diversamente. Se $T\colon \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ è un integrale sul dominio d'integrazione $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$, i funzionali che corrispondono maggiormente alle definizioni classiche di integrale superiore ed inferiore sono T^* e T_*, definiti da

$$T^*(f) = \inf\{T(g)\colon g \in \mathbb{B},\ g \geqslant f\}\,,$$

$$T_*(f) = \sup\{T(g)\colon g \in \mathbb{B},\ g \leqslant f\}\,;$$

questi funzionali, in ipotesi semplici (vedi Proposizioni 4.4 e 4.5) possono coincidere con gli integrali $\int_X - d\beta_T$ e $\int_X - d\alpha_T$. Infatti consideriamo le applicazioni $T^*\colon \mathbb{B}^* \to [0, +\infty]$ e $T_*\colon [0, +\infty]^X \to [0, +\infty]$, definite come sopra, dove

$$\mathbb{B}^* = \mathbb{B} \cup \{f \in [0, +\infty]^X\colon \text{ esiste } g \in \mathbb{B} \text{ con } f \leqslant g \text{ e } T(g) < +\infty\}\,;$$

si osserva facilmente che $\mathbb{B}^*$ è un dominio di integrazione e che

(*a*) T^* verifica le proprietà (1)′, (2), (4), (5) dell'integrale e $T^*(f) \geqslant T^*(f \wedge 1) + T(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbb{B}^*$,

(*b*) T_* verifica le proprietà (1)′, (2), (4), (5) dell'integrale e $T_*(f) \leqslant T_*(f \wedge 1) + T(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^X$.

Allora valgono le seguenti proposizioni

PROPOSIZIONE 4.4. *Sia* $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale definito sul dominio di integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ *tale che*

(i) $f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \vee g \in \mathbf{B}$,

(ii) $f \wedge 1 \in \mathbf{B}$ *e* $f \vee 1 - 1 \in \mathbf{B} \Rightarrow f \in \mathbf{B}$.

Allora $T_*(f) = \int_X f d\alpha_T$ *per ogni* $f \in [0, +\infty]^X$.

PROPOSIZIONE 4.5. *Sia* $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale, definito sul dominio d'integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ *tale che*

(i) $f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \wedge g \in \mathbf{B}$,

(ii) $f \wedge 1 \in \mathbf{B}$ *e* $f \vee 1 - 1 \in \mathbf{B} \Rightarrow f \in \mathbf{B}$.

Allora $T^*(f) = \int_X f\, d\beta_T$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}^*$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROP. 4.4. Poichè $T_*(\varphi_A) = \alpha_T(A)$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, è sufficiente dimostrare che T_* è un integrale; quindi, in virtù di (a), dimostriamo soltanto che $T_*(f) \geqslant T_*(f \wedge 1) + T_*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^X$. Siano $g_1, g_2 \in \mathbf{B}$ due funzioni tali che $g_1 \leqslant f \wedge 1$ e $g_2 \leqslant f \vee 1 - 1$; poniamo $h_n = [(ng_2) \wedge 1] \vee g_1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Dalle ipotesi (i) e (ii) della Proposizione 4.4, si ottiene che le funzioni h_n e $(h_n + g \vee 1/n - 1/n)$ appartengono a $\mathbf{B}$, poichè

$$\left(h_n + g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \wedge 1 = h_n \quad \text{e} \quad \left(h_n + g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \vee 1 - 1 = g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}.$$

Essendo, inoltre, $g_1 \leqslant h_n \leqslant f \wedge 1$ e $g_2 \vee 1/n - 1/n \leqslant f \wedge 1 - 1$, si ottiene

$$(*) \qquad T(g_1) + T\left(g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant T(h_n) + T\left(g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant T\left(h_n + g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant T_*(f).$$

Passando, infine, al limite per $n \to +\infty$ in $(*)$ si ottiene $T(g_1) + T(g_2) \leqslant T_*(f)$; quindi, data l'arbitrarietà di g_1 e g_2, segue quanto richiesto, cioè $T_*(f \wedge 1) + T_*(f \vee 1 - 1) \leqslant T_*(f)$. ■

DIMOSTRAZIONE DELLA PROP. 4.5. Dimostriamo che $T^*(f) \leqslant T^* \cdot (f \wedge 1) + T^*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbf{B}^* - \mathbf{B}$ limitata. Sia $a = \sup f$ e siano $g_1, g_2 \in \mathbf{B}^*$ due funzioni tali che $f \vee 1 - 1 \leqslant g_1 \leqslant a$, $f \wedge 1 \leqslant g_2 \leqslant 1$, $T(g_1) < +\infty$ e $T(g_2) < +\infty$. La funzione $g_s = g_1 \wedge \big(a(g_2 \vee s - s)\big)$ appartiene a $\mathbf{B}$ per ogni $s \in (0, 1)$; inoltre, la funzione $\big(g_s + (g_2 \wedge s)/s\big)$ appartiene a $\mathbf{B}$ per ogni $s \in (0, 1)$, perchè

$$\left(g_s + \frac{g_2 \wedge s}{s}\right) \wedge 1 = \frac{g_2 \wedge s}{s} \quad \text{e} \quad \left(g_s + \frac{g_2 \wedge s}{s}\right) \vee 1 - 1 = g_s .$$

Poichè $f \wedge 1 \leqslant (g_2 \wedge s)/s$ e $f \vee 1 - 1 \leqslant g_s \leqslant g_1$ si ottengono per ogni $s \in (0, 1)$ le diseguaglianze:

$$T^*(f) \leqslant T\left(\frac{g_2 \wedge s}{s} + g_s\right) = T(g_s) + T\left(\frac{g_2 \wedge s}{s}\right) \leqslant T\left(\frac{g_2 \wedge s}{s}\right) + T(g_1) .$$

Tenuto conto che la rete $\{(g_2 \wedge s)/s\} \downarrow g_2$ converge uniformemente per $s \to 1^-$ e che $T\big((g_2 \wedge s)/s\big) < +\infty$, risulta, in virtù del Corollario 3.8, passando al limite per $s \to 1^-$ nelle ultime diseguaglianze, che $T(g_1) + T(g_2) \geqslant T^*(f)$. Quindi, data la scelta di g_1 e g_2, si ottiene che $T^*(f) \leqslant T^*(f \wedge 1) + T^*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbf{B}^* - \mathbf{B}$ limitata; inoltre, risulta, di conseguenza, che $T^*(f) \leqslant T^*(f \wedge 1) + T^*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbf{B}^*$, poichè T^* verifica la proprietà (4) dell'integrale. Da ciò, in virtù di (*b*), segue che T^* è un integrale su $\mathbf{B}^*$. Quindi l'uguaglianza « $T^*(f) = \int_X f d\beta_T$ per ogni $f \in \mathbf{B}^*$ » è vera, poiché ogni $f \in \mathbf{B}^* - \mathbf{B}$ è misurabile rispetto alla famiglia d'insiemi $\mathrm{H} = \{A \in \mathcal{T}(X) : \beta_T(A) < +\infty\}$ e poichè $T^*(\varphi_A) = \beta_T(A)$ per ogni $A \in \mathrm{H}$. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Integration*, Cap. 3, Hermann, 1965.

[2] E. DE GIORGI - G. LETTA, *Une notion général de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, Ann. Sc. Norm. Pisa, **4** (IV) (1977), pp. 61-99.

[3] G. H. GRECO, *Integrale monotono*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 149-166.

[4] G. H. Greco, *Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles*. Rend. Sem. Mat. Padova, **65** (1981).
[5] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand C., 1969.
[6] L. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 novembre 1980.