RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERANTONIO LEGOVINI

Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali - II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 47-51

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__47_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali - II.

PIERANTONIO LEGOVINI (*)

Scopo di questo lavoro è di fornire una caratterizzazione di una classe di gruppi introdotta in [3], e precisamente della classe dei gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali (brevemente SP-gruppi). Per tali gruppi verrà dato, nel paragrafo 1, un teorema di struttura. Nel paragrafo 2 verrà esaminata la sottoclasse degli SP-gruppi formata dai gruppi (finiti e risolubili) i cui sottogruppi sono o subnormali o p-normalmente immersi per ogni primo p (brevemente SNE-gruppi); anche per i gruppi di questa classe viene data una caratterizzazione.

In tutto il lavoro per *gruppo* si intenderà sempre gruppo *finito*. Le notazioni e le nozioni che vengono usate senza particolari chiarimenti sono standard, e si possono comunque trovare in [2].

1. Come in [3], diremo che un sottogruppo H di un gruppo G è *propriamente pronormale* (*subnormale*) in G se H è pronormale (subnormale), ma non normale, in G. Ancora indicheremo con $T(G)$ il sottogruppo caratteristico di G generato dai suoi sottogruppi primari propriamente subnormali, e con $T_p(G)$ il sottogruppo di G generato dai p-sottogruppi propriamente subnormali. $T(G)$ è nilpotente e $T_p(G) \in \in \mathrm{Syl}_p\,(T(G))$.

1.1 TEOREMA. *Un gruppo G è un* SP-*gruppo se e solo se soddisfa le seguenti condizioni*:

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(i) *G possiede una torre di Sylow del tipo*

$$1 \lhd K_1 \lhd K_1K_2 \lhd \ldots \lhd K_1K_2 \ldots K_r \lhd K_1K_2 \ldots K_rQ \lhd$$
$$\lhd K_1K_2 \ldots K_rQP_1 \lhd K_1K_2 \ldots K_rQP_1P_2 \lhd \ldots \lhd K_1K_2 \ldots K_rQP_1P_2 \ldots P_s\,,$$

con $K_i \in \mathrm{Syl}_{q_i}(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $P_j \in \mathrm{Syl}_{p_j}(G)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, $q > p_1 > p_2 > \ldots > p_s$;

(ii) $K = K_1K_2 \ldots K_r$ *è nilpotente*;

(iii) $T = P_1P_2 \ldots P_s$ *è un t-gruppo*;

(iv) $T(Q) \leqslant C_Q(K)$;

(v) *Se* $A_i \leqslant K_i$ *e* $z \in Q \setminus C_Q(K)$ *con* $A_i^z = A_i$, *allora* $C_{K_i}(z)QT \leqslant \leqslant N_G(A_i)$;

(vi) *Se* A *è un sottogruppo primario di* $KC_Q(K)$ *e* $A^{x_j} = A$, *con* $x_j \in P_j \setminus C_{P_j}(KQP_1 \ldots P_{j-1})$, *allora*

$$C_{KC_Q(K)}(x_j)P_jP_{j+1} \ldots P_s \leqslant N_G(A)\,;$$

(vii) *Se* $C \leqslant Q$ *e* $C \nleqslant C_Q(K)$, *allora* $T \leqslant N_G(C)$.

DIM. Le condizioni (i), (ii), (iii) e (iv) seguono dal Teorema 3.3 di [3]. Passiamo alla (v): $\langle z \rangle$ non può essere subnormale in G, altrimenti centralizzerebbe K, quindi è pronormale. Per [3], Teorema 5.1, $A_i\langle z \rangle$ è pronormale in G. Applicando [3], Corollario 5.4, si ottiene la (v). Per ottenere la (vi) basta rifare il ragionamento precedente con x_j nel ruolo di z, e con $KQP_1 \ldots P_{j-1}$ in quello di K. Quanto a (vii), risulta C pronormale in G, dunque C non possiede coniugati da esso distinti dentro Q. Ne segue che $T \leqslant N_G(Q) \leqslant N_G(C)$.

Sufficienza. Sia U un sottogruppo di G; possiamo supporre, senza perdere in generalità, che $U = V_1V_2 \ldots V_rRW_1W_2 \ldots W_s$, con $V_i = U \cap K_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, $R = U \cap Q$, e $W_j = U \cap P_j$ $(j = 1, \ldots, s)$. Supponiamo inoltre che U non sia subnormale in G. Vogliamo dimostrare che allora U è pronormale in G. Procediamo per induzione su

$$|\pi(U) \cap \{q_1, q_2, \ldots, q_r, q\}| = m(U)\,.$$

Se $m(U) = 0$, $U \leqslant T$ che è un t-gruppo, quindi per [6] U è pronormale in T, e per [4], Lemma 1.1, U è pronormale in G. Sia ora $m(U) = 1$, e sia $R \neq 1$. Se $R \not\leqslant C_Q(K)$, allora per (iv) e (vii) R risulta normale in QT, e ancora per [4], Lemma 1.1, R è pronormale in G, e tale risulta anche U, per [7], 1.8. Sia ora $R \leqslant C_Q(K)$ e supponiamo per assurdo U non pronormale. Allora, per un risultato di Mann [5], il sistema di Sylow $\mathcal{S} = \{K_1, \ldots, K_r, Q, P_1, \ldots, P_s\}$ di G sarebbe riducibile in un coniugato $(RW_1 \ldots W_s)^g$ di $U = RW_1 \ldots W_s$, con $U \neq$ $\neq (RW_1 \ldots W_s)^g$. Essendo i $W_1, \ldots, W_s$ pronormali in G, è $W_i^g = W_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, da cui $(RW_1 \ldots W_s)^g = R^g W_1 \ldots W_s$. Essendo sicuramente, per un opportuno j, $W_j \not\leqslant C_{P_j}(KQP_1P_2 \ldots P_{j-1})$, in virtù di (vi) non è restrittivo supporre $g \in Q$.

Ma allora $g \in C_Q(W_1 \ldots W_s) \leqslant C_Q(x)$, per qualche $x \in W_l \setminus C_{P_l}(KQP_1 \ldots$ $\ldots P_{l-1})$ per un l opportuno. Ma, ancora per (vi), da $R^x = R$ segue $R^g = R$, contraddizione. Quindi U è di nuovo pronormale in G. Una identica argomentazione consente di concludere nel caso $m(U) = 1$ e $R = 1$, e nel caso $m(U) = 2$ e $R \not\leqslant C_Q(K)$ (cioè R pronormale in G).

Passiamo al caso generale $m(U) \geqslant 2$.

Allora, per quanto appena osservato, tra i sottogruppi $V_1, \ldots$ $\ldots, V_r, R$, ce ne sono almeno due non identici e subnormali in G, diciamoli X_1 e X_2.

Detti L_1, L_2 i due complementi di X_1 e X_2 rispettivamente ottenibili dal sistema di Sylow $\{V_1, \ldots, V_r, R, W_1, \ldots, W_s\}$, si ha che nè L_1 nè L_2 possono essere subnormali in G, altrimenti, in entrambi i casi, lo sarebbe U. Ora $m(L_1) = m(L_2) = m(U) - 1$, e quindi L_1, L_2 sono pronormali in G. Ma allora, per [4], Lemma 1.6, anche $U = L_1L_2$ è pronormale in G.

Osservazione. Notiamo che la descrizione data degli SP-gruppi consente di costruire (supposti noti tutti i prodotti semidiretti di due gruppi primari d'ordine coprimo!) l'intera classe degli SP-gruppi.

In [3] si era visto (Teorema 3.3) che, detto W il più grande sottogruppo di Hall di un SP-gruppo G, contenuto in $F(G)$, e detto $Z = P_1 \ldots P_r$ $(P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(Z),\ p_1 > \ldots > p_r)$ un complemento di W in G, risulta $T(G) \leqslant WP_1$, e che quindi esiste al più un primo $p \in \pi(G)$ tale che, se $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, è contemporaneamente $T_p(G) \neq 1$ e $P \ntrianglelefteq G$. Tale primo, quando si presenta, viene detto eccezionale.

Nel teorema che segue vengono individuati gli SP-gruppi dotati di un divisore primo eccezionale.

1.2 Teorema. *Sia G un* SP-*gruppo, e G abbia una descrizione come in* 1.1. *Allora G possiede un divisore primo eccezionale se e solo se $Q \ntrianglelefteq G$ e QT non è un t-gruppo.*

DIM. *Necessità.* Il divisore primo eccezionale di G può essere solamente q; infatti i K_i sono normali in G, e T non può contenere sottogruppi propriamente subnormali di G, in quanto i sottogruppi subnormali di T sono tutti normali in T. Allora, detto $A \leqslant Q$ un sottogruppo propriamente subnormale di G, A deve essere anche propriamente subnormale anche in QT, e quindi QT non può essere un t-gruppo.

Sufficienza. Se QT non è un t-gruppo, allora contiene un sottogruppo primario A propriamente subnormale [6]. Allora $T_q(G) \geqslant T_q(QT) \neq 1$. Inoltre per ipotesi $Q \ntriangleleft G$, e quindi q è eccezionale.

2. La definizione di SP-gruppo, apparentemente simmetrica, presenta alla fine un certo squilibrio. Infatti risulta che i sottogruppi propriamente subnormali vengono ad essere nilpotenti [3], Teorema 5.1, in altre parole ogni sottogruppo di Sylow di un sottogruppo propriamente subnormale risulta a sua volta subnormale; non è invece necessariamente vero che, dato un sottogruppo propriamente pronormale di G, esso abbia tutti i suoi sottogruppi di Sylow pronormali in G, cioè che sia p-normalmente immerso in G per ogni p (vedasi [1]).

Viene quindi naturale considerare la classe dei gruppi in cui ogni sottogruppo è o subnormale o p-normalmente immerso per ogni primo p, gruppi che denomineremo SNE-gruppi.

2.1 TEOREMA. *Un gruppo G è* SNE-*gruppo se e solo se soddisfa le seguenti condizioni*:

(i) *G possiede una torre di Sylow del tipo*

$$1 \lhd K_1 \lhd K_1K_2 \lhd \ldots \lhd K_1K_2 \ldots K_r \lhd K_1K_2 \ldots K_rQ \lhd$$
$$\lhd K_1K_2 \ldots K_rQP_1 \lhd K_1K_2 \ldots K_rQP_1P_2 \lhd \ldots \lhd K_1K_2 \ldots K_rQP_1P_2 \ldots P_s,$$

con $K_i \in \mathrm{Syl}_{q_i}(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $P_j \in \mathrm{Syl}_{p_j}(G)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, *e* $q > p_1 > p_2 > \ldots > p_s$;

(ii) $K = K_1K_2 \ldots K_r$ *e nilpotente*;

(iii) $T = P_1P_2 \ldots P_s$ *è un t-gruppo*;

(iv) $T(Q) \leqslant C_Q(K)$;

(v) *Se A è un sottogruppo primario di $KC_Q(K)$ e $x \in Q \setminus C_Q(K)$ ovvero $x \in P_j \setminus C_{P_j}(KQP_1 \ldots P_{j-1})$, allora da $A^x = A$ segue $A \lhd G$.*

DIM. *Necessità.* Le condizioni (i), (ii), (iii), (iv) discendono dal fatto che G è un SP-gruppo e dal Teorema 1.1. Dimostriamo la (v). Come in 1.1, $\langle x\rangle$ è propriamente pronormale in G, e quindi lo è anche $A\langle x\rangle$. Ne segue che A deve essere pronormale in G, e quindi normale, in quanto contemporaneamente pronormale e subnormale.

Sufficienza. Sia $U = V_1 \dots V_r R W_1 \dots W_s$, con

$$V_i = U \cap K_i \ (i = 1, \dots, r) \ , \ R = U \cap Q \ \text{ e } \ W_j = U \cap P_j \ (j = 1, \dots, s) \ ,$$

un sottogruppo propriamente pronormale di G. Quindi almeno uno dei sottogruppi di Sylow, U_0, di U, è propriamente pronormale in G. Deve essere $U_0 = R$ (nel qual caso $U_0 \nleqslant C_Q(K)$) oppure $U_0 = W_j$ per un j opportuno (e quindi $U_0 \nleqslant C_{P_j}(KQP_1 \dots P_{j-1})$). Supponiamo che ci sia un V_i, con V_i propriamente subnormale in G. Sia $x \in R \setminus C_Q(K)$ se $U_0 = R$, oppure $x \in W_j \setminus C_{P_j}(KQP_1 P_2 \dots P_{j-1})$ se $U_0 = W_j$. Poichè $V_i^x = V_i$, per (v) dobbiamo avere $V_i \lhd G$, contraddizione.

OSSERVAZIONE. La condizione (v) del Teorema 2.1 può essere letta così: se $\mathcal{A}$ è l'insieme dei p-sottogruppi propriamente subnormali di G, e x è un elemento di G d'ordine primo con p, allora x induce per coniugio su $\mathcal{A}$ una permutazione che è o priva di punti fissi o quella identica.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. A. CHAMBERS, *p-normally embedded subgroups of finite soluble groups*, J. Alg., **16** (1970), pp. 442-445.
[2] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen - I*, Springer-Verlag (1967).
[3] P. LEGOVINI, *Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **58** (1977), pp. 129-147.
[4] P. LEGOVINI, *Catene pronormali nei gruppi finiti supersolubili*, in corso di stampa presso i Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.
[5] A. MANN, *A criterion for pronormality*, J. London Math. Soc., **44** (1969), pp. 175-176.
[6] T. A. PENG, *Finite groups with pronormal subgroups*, Proc. Amer. Math. Soc., **20** (1969), pp. 232-234.
[7] J. S. ROSE, *Finite soluble groups with pronormal system normalizers*, Proc. London Math. Soc. (3), **17** (1967), pp. 447-469.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 novembre 1980.