RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARGHERITA BARTOLOZZI
ALDO BRESSAN

Sugli atti di moto, eventualmente isocori, più rigidi possibile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 235-249

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__235_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Sugli atti di moto, eventualmente isocori, più rigidi possibile (1).

MARGHERITA BARTOLOZZI - ALDO BRESSAN (*)

PARTE I

Atti di moto isocori più rigidi possibile.

ABSTRACT - The theory of the velocity fields as rigid as possible—see [1]—is extended to isochoric systems. Suitable commutation formulas are stated with regard to a Riemannian m-dimensional manyfold that has a strictly positive metric and is moving in a ν-dimensional Euclidean space S_ν $(0 < m \leqslant \nu)$. Then, the equations of the acceleration field as rigid as possible are derived. Furthermore lasting velocity fields are defined for a membrane, and a dynamic characterization is given to the velocity fields as rigid as possible. The results are finally carried over to continuous tridimensional systems.

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università, Via Archirafi, 34, 90123 Palermo - Istituto di Analisi e Meccanica, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo n. 3 (Fis. Mat.) del C.N.R.

Il contributo di M. Bartolozzi riguarda tutto il lavoro per quanto concerne la presentazione e il controllo dei calcoli. Inoltre, M. Bartolozzi ha elaborato (i) l'analogo per il caso isocoro dello studio del campo delle accelerazioni più rigido possibile, ed (ii) un certo analogo (N. 8) per i corpi elastici 3-dimensionali della relazione tra atti di moto duraturi e atti di moto più rigidi possibile, stabilita nel N. 7 per membrane bidimensionali mobili su superfici assegnate.

1. Introduzione.

In [1] (1) abbiamo generalizzato il concetto di atto di moto rigido, introducendo gli atti di moto *più rigidi possibile* in una porzione $\varDelta\sigma$ di una varietà Riemanniana m-dimensionale $\sigma = \sigma_t$, a metrica definita positiva, mobile in uno spazio Euclideo ν-dimensionale S_ν con $0 < m \leqslant \nu$.

Proseguendo la nostra indagine, prendiamo ora in considerazione i sistemi isocori (parte I) e applichiamo la teoria degli atti di moto più rigidi possibile a tali sistemi: più precisamente, dopo aver dedotto nel N. 2 le equazioni di Eulero relative ai moti isocori più rigidi possibile, dimostriamo, nel N. 3, che un tale atto di moto, analogamente a quanto avviene nel caso degli atti di moto rigidi, è individuato dai valori che, in conseguenza di esso, vengono assunti in un prefissato punto P_0 dalla velocità e dalla velocità angolare locale.

Allo scopo di pervenire poi alle equazioni del campo delle accelerazioni più rigido possibile (parte II), stabilite preliminarmente alcune formule di commutazione con riguardo ad una varietà Riemanniana ad m dimensioni (N. 4), estendiamo tali risultati al caso di una superficie fissa (N. 5) e al caso dei sistemi isocori (N. 6).

Dopo ciò, definiti gli *atti di moto duraturi* per una membrana, mostriamo come la considerazione di tali atti di moto permette di fornire una caratterizzazione dinamica dei moti più rigidi possibile (N. 7).

Infine, si fissa l'attenzione sopra un sistema elastico tridimensionale, e si prova che (per vincoli fissi) gli atti di moto più rigidi possibile e quindi, per quanto dimostrato in [1], gli atti di moto rigido, sono particolari atti di moto duraturi, possibili per un continuo tridimensionale.

2. Preliminari sui moti isocori. — Moti isocori più rigidi possibile e loro equazioni di Eulero.

Sia $\sigma = \sigma_t$ una varietà Riemanniana m-dimensionale, a metrica definita positiva, mobile in uno spazio Euclideo ν-dimensionale S_ν

(1) I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia in fine della Parte I.

$(0 < m \leqslant \nu)$, il cui moto sia definito dalle funzioni di classe $C^{(2)}$

$$(1) \qquad P = P(x^i, t) \text{ oppure } y_\alpha = y_\alpha(x^i, t) \ (i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, \nu)$$

ove t è il tempo, le y_α sono le coordinate cartesiane del punto P descrivente σ_t (in relazione ad una prefissata terna di S_ν), e le x^i sono le coordinate intrinseche di questo su σ_t. Il tensore fondamentale a_{ik} e la metrica ds^2 su σ_t sian definiti da

$$ds^2 = dP \times dP = a_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad \text{ove} \qquad a_{ik} = \frac{\partial P}{\partial x^i} \times \frac{\partial P}{\partial x^k}.$$

La (1) rappresenta anche il moto M di un fluido ideale m-dimensionale $\mathcal{F}$, il cui generico elemento sia individuato dalle x^i. Introduciamo la massa m di $\mathcal{F}$ e la densità locale k nel punto x_r.

Ciò premesso, fissiamo un punto evento $\mathcal{E} = (t, y) = (t, x)$ e sia $\Delta\sigma$ una porzione di σ_t, $\Delta\sigma^*$ la sua immagine nella configurazione di riferimento intesa come il campo di variabilità delle y. Allora l'area di $\Delta\sigma$ è:

$$A_t = \int_{\Delta\sigma^*} \sqrt{a}\, D dy \ \text{ con } \ D = \det \|x^r{}_{,L}\| \ , \ x^r{}_{,L} = \frac{\partial x^r}{\partial y^L} \,{}^{(2)} \ , \ a = \det \|a_{ik}\| \ .$$

Tenendo fisso $\Delta\sigma^*$ si ha

$$\dot{A} = \int_{\Delta\sigma^*} \frac{d\sqrt{a}\, D}{dt}\, dy \, , \qquad \frac{d\sqrt{a}\, D}{dt} = \left(\dot{D} + D \frac{d}{dt} \log \sqrt{a}\right) \sqrt{a} \, .$$

Poichè $Dy^L{}_{,r}$ è il complemento algebrico di $x^r{}_{,L}$ in $\|x^r{}_{,L}\|$, riesce:

$$\dot{D} = Dy^L{}_{,r} \frac{\partial}{\partial t} x^r{}_{,L} = Dy^L{}_{,r}\, v^r{}_{,L} = Dv^r{}_{,r} \, .$$

(2) Qui e nel seguito indichiamo la derivazione parziale rispetto a x^i o a t $(= x^0)$ con una virgola $(f_{,i} = \partial f / \partial x^i,\ f_{,0} = \partial f / \partial t)$. Inoltre intendiamo $2T_{(rs)} = T_{rs} + T_{sr}$, $2T_{[rs]} = T_{rs} - T_{sr}$.

Allora

$$\frac{d\sqrt{a}\,D}{dt} = \left(v^r{}_{,r} + \frac{d}{dt}\log\sqrt{a}\right)\sqrt{a}\,D\,.$$

Ne segue che la condizione di isocorità di M, cioè la $\dot{A} = 0$ $(\forall \Delta\sigma^*)$, equivale alla

$$\text{(2)} \qquad v^r{}_{,r} + \frac{d}{dt}\log\sqrt{a} = v^r{}_{,r} + (\log\sqrt{a})_{,r}v^r + \frac{\partial}{\partial t}\log\sqrt{a} \equiv$$

$$\equiv v^r{}_{/r} + \frac{\partial}{\partial t}\log\sqrt{a} = 0 \ (^3)\,.$$

Poniamo — vedi nota (2)

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} F = V_{rs}V^{rs}\,, & V_{ih} = v_{(i/h)} + b_{hi} \ (^4)\,, \\ \mathcal{G} = F + 2\lambda\left(v^r{}_{/r} + \dfrac{\partial\log\sqrt{a}}{\partial t}\right). \end{cases}$$

Diciamo che *l'atto di moto isocoro* $\boldsymbol{v}_r$ *in* $\Delta\sigma$ *è più rigido possibile se minimizza l'integrale* $\int_{\Delta\sigma} F\,d\sigma$ *nella classe degli atti di moto isocori* [cfr. (2)]. Per questo occorre che il considerato atto di moto, oltre a verificare (2), stante (3), soddisfi la condizione variazionale:

$$\delta\int_{\Delta\sigma}\mathcal{G}\,d\sigma = 0$$

nella classe di tutti gli atti di moto regolari.

(3) Per completezza conviene osservare che essendo $\int_{\Delta\sigma^*} k\sqrt{a}\,D\,dy$ la massa della porzione $\Delta\sigma^*$, la sua costanza per ogni $\Delta\sigma^*$ equivale alla versione generalizzata della equazione di continuità

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (kv^r)_{/r} + \frac{k}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial t} = 0\,.$$

(4) Ove si ponga $a_{r0} = a_{0r} = \partial P/\partial t \times P_{/r}$, $\{s0, i\} = \{0s, i\} = \partial^2 P/(\partial t\,\partial x^s) \times \times \partial P/\partial x^i$, risulta $b_{rs} = \frac{1}{2}a_{rs,0} = b_{sr}$ con $b_{is} = \{0(s,i)\}$, onde il tensore b_{rs} si comporta come un tensore doppio rispetto alle trasformazioni delle x^i non involgenti il tempo (cfr. [1]).

Valgono allora le equazioni di Eulero

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_{h,i}} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_h} = 0 . \tag{4}$$

Essendo $v^r{}_{/r} = a^{rh} v_{r/h}$, risulta $\partial v^r{}_{/r}/\partial v_{h,i} = a^{hi}$, onde per (3) e per essere $\partial F/\partial v_{h,i} = 2V^{hi}$ (cfr. $(18)_2$ in [1]), si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_{h,i}} = 2V^{hi} + 2\lambda a^{hi} . \tag{5}$$

Inoltre risulta $\partial v^r{}_{/r}/\partial v_i = 0$ e in un riferimento localmente geodetico $V^{hi}{}_{/i} \equiv V^{hi}{}_{,i}$, onde, per (3), $\partial \mathcal{G}/\partial v_i = 0$. Allora, stante (5),

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_{h,i}} = 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (V^{hi} + \lambda a^{hi}) = 2(V^{hi} + \lambda a^{hi})_{/i}$$

e le (4) equivalgono [cfr. $(3)_2$] alle:

$$(v^{(h/i)} + b^{hi} + \lambda a^{hi})_{/i} \equiv (V^{hi} + \lambda a^{hi})_{/i} = 0 . \tag{6}$$

Inoltre, sostanzialmente in base al Teor. 3.1 in [1] e per (5) valgono sulla frontiera $\Sigma = \mathcal{F}\, \Delta\sigma$ del $\Delta\sigma$ le

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_{h,i}} n_i \equiv (V^{hi} + \lambda a^{hi}) n_i = 0 . \tag{7}$$

Il problema della determinazione degli atti di moto in $\Delta\sigma$ isocori e più rigidi possibile, è così ricondotto alla risoluzione delle (2) e (6) in $\Delta\sigma$, nelle $(m+1)$ incognite λ e v^i, con le condizioni al contorno (7).

3. Teorema di unicità per l'atto di moto isocoro più rigido possibile.

Supponiamo che (ψ_h, λ) sia la differenza di due soluzioni (v_h', λ') e (v_h'', λ'') delle (6): $\psi_h = \psi_h' - \psi_h''$ e $\lambda = \lambda' - \lambda''$. Allora risulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{(h/i)}{}^i + (\lambda a_{hi})^{/i} = 0 \\ \text{onde} \\ (\psi^h \psi_{(h/i)})^{/i} = \psi^{h/i} \psi_{(h/i)} - \psi^h (\lambda a_{hi})^{/i} . \end{array} \right. \tag{8}$$

Detta n_i la normale esterna al contorno Σ di $\Delta\sigma$, si ha:

$$(9)\qquad \int_\Sigma \psi^h \psi_{(h/i)} n^i \, d\Sigma = \int_{\Delta\sigma} (\psi^h \psi_{(h/i)})^{/i} \, d\sigma = \int_{\Delta\sigma} [\psi^{(h/i)} \psi_{(h/i)} - \psi^h (\lambda a_{hi})^{/i}] \, d\sigma =$$

$$= \int_{\Delta\sigma} [\psi^{h/i} \psi_{(h/i)} - (\psi^h \lambda a_{hi})^{/i} + \lambda \psi^h{}_{/h}] \, d\sigma ,$$

onde

$$(10)\qquad \int_\Sigma \psi^h (\psi_{(h/i)} + \lambda a_{hi}) n^i \, d\Sigma = \int_{\Delta\sigma} (\psi^{h/i} \psi_{(h/i)} + \lambda \psi^h{}_{/h}) \, d\sigma .$$

Per (2) e (7), nelle nostre ipotesi, deve aversi:

$$\psi^h{}_{/h} = 0 \quad \text{in } \Delta\sigma , \qquad (\psi^{(h/i)} + \lambda a^{hi}) n_i = 0 \quad \text{su } \Sigma .$$

Si annulla, quindi, l'integrale a primo membro e si semplifica quello a secondo membro in (10); ne segue

$$\int_{\Delta\sigma} \psi^{h/i} \psi_{(h/i)} \, d\sigma = 0 \qquad \text{per ogni } \Delta\sigma .$$

Allora $\psi^{h/i}\psi_{(h/i)} = 0$ in $\Delta\sigma$ e quindi, come si riconosce facilmente usando un sistema di coordinate geodetiche e ortonormali, $\psi_{h/i} = 0$ in $\Delta\sigma$. Ne deriva, per $(8)_1$, $\lambda_{/h} = 0$ onde $\lambda' - \lambda'' = \text{cost}$. Inoltre, stanti le condizioni al contorno (7), deve aversi $\psi^{h/i} n_i + \lambda n^h = 0$, cioè λ è nulla al contorno ed essendo costante, è nulla ovunque. In ogni caso $(v'_{(h/i)}, \lambda'_{/h}) = (v''_{(h/i)}, \lambda''_{/h})$ in $\Delta\sigma$, ossia sussiste il seguente

TEOREMA 1. *Due atti di moto isocori e rigidi il più possibile hanno la stessa velocità di deformazione in $\Delta\sigma$*, che può quindi dirsi *la più rigida possibile* ivi.

Allora, in base al Teorema 4.1 dimostrato in [1], si ha il seguente

TEOREMA 2. *Esiste al più un atto di moto isocoro v^i più rigido possibile in $\Delta\sigma$ per cui hanno dati valori in un assegnato punto P_0 sia v^i che $v_{[i/h]}$.*

PARTE II

Caratterizzazione dinamica dei campi di velocità più rigidi possibile.

4. Alcune formule di commutazione (con riguardo ad una varietà Riemanniana ad m dimensioni). Equazioni del campo delle accelerazioni più rigido possibile.

Per ogni tensore $T_{\dots}^{\dots}$ $(= T_{a\dots}{}^{b\dots})$ si ha

$$\dot{T}_{\dots}^{\dots} = \frac{D}{Dt} T_{\dots}^{\dots} = T_{\dots}{}^{\dots}{}_{/r} v^r + \frac{\partial T_{\dots}^{\dots}}{\partial t}, \tag{11}$$

onde

$$\frac{D}{Dt} T_{\dots}{}^{\dots}{}_{/l} = T_{\dots}{}^{\dots}{}_{/lr} v^r + \frac{\partial}{\partial t} T_{\dots}{}^{\dots}{}_{/l}, \tag{12}$$

$$\left(\frac{D}{Dt} T_{\dots}^{\dots}\right)_{/l} = T_{\dots}{}^{\dots}{}_{/rl} v^r + T_{\dots}{}^{\dots}{}_{/r} v^r{}_{/l} + \left(\frac{\partial T_{\dots}^{\dots}}{\partial t}\right)_{/l}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/l} - \left(\frac{D}{Dt} T_{a\dots}{}^{b\dots}\right)_{/l} &= T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/lr} v^r + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/l} - T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/rl} v^r - T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/r} v^r{}_{/l} - \left(\frac{\partial T_{a\dots}{}^{b\dots}}{\partial t}\right)_{/l} = \\ &= v^r (- T_{a'\dots}{}^{b\dots} R_a{}^{a'}{}_{lr} + T_{a\dots}{}^{b'\dots} R^b{}_{b'lr}) - T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/r} v^r{}_{/l} + T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{*l}, \end{aligned} \tag{13}$$

con

$$\begin{aligned} T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{*l} = \frac{\partial}{\partial t} T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/l} - \left(\frac{\partial}{\partial t} T_{a\dots}{}^{b\dots}\right)_{/l} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} b \\ sl \end{Bmatrix} T_{a\dots}{}^{s\dots} + \dots - T_{r\dots}{}^{b\dots} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} r \\ al \end{Bmatrix} - \dots . \end{aligned} \tag{14}$$

Identifichiamo il sistema (x) di coordinate (eventualmente mobili) in considerazione, con uno (x^*) tale che, per $t = t^*$, si annulli ovunque la velocità v^r relativa (al fluido ideale associato) ad esso. Allora la (13) si semplifica in

$$(13') \qquad \frac{D}{Dt} T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/l} - \left(\frac{D}{Dt} T_{a\dots}{}^{b\dots}\right)_{/l} = T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{*l} ;$$

inoltre

$$(14') \qquad T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{*l} = 0 \qquad \text{per} \qquad T_{a\dots}{}^{b\dots} = v_{a/b_2\dots b_l} .$$

In particolare, intendendo $a_h = \dot{v}_h$, per (13)-(14) riesce

$$(15) \qquad \frac{D}{Dt} v_{h/i} = a_{h/i} - v_{h/r} v^r{}_{/i} + v^r v_k R_h{}^k{}_{ri} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hi \end{Bmatrix} v_r ,$$

$$(16) \qquad \frac{D}{Dt} v_{h/il} = \left(\frac{D}{Dt} v_{h/i}\right)_{/l} - v_{h/ir} v^r{}_{/l} + v^r (R_h{}^k{}_{rl} v_{k/i} + R_i{}^j{}_{rl} v_{h/j}) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hl \end{Bmatrix} v_{r/i} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} v_{h/r} = a_{h/il} - \left[v_{h/r} v^r{}_{/i} - v^r v_k R_h{}^k{}_{ri} + \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hi \end{Bmatrix} v_r \right]_{/l} -$$
$$- v_{h/ir} v^r{}_{/l} + v^r (R_h{}^k{}_{rl} v_{k/i} + R_i{}^j{}_{rl} v_{h/j}) - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hl \end{Bmatrix} v_{r/i} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} v_{h/r} .$$

Dalle

$$(17) \qquad v_{(h/i)}{}^{i} + b_{hi}{}^{/i} = 0 \ \ (\text{in } \Delta\sigma) , \qquad (v_{(h/i)} + b_{hi}) n^i = 0 \ \text{ su } \mathcal{F}\Delta\sigma$$

segue

$$(18) \quad \frac{D}{Dt} v_{(h/i)}{}^{i} + \frac{D}{Dt} b_{hi}{}^{/i} = 0 , \qquad n^i \left(\frac{D}{Dt} v_{(h/i)} + \dot{b}_{hi}\right) + (v_{(h/i)} + b_{hi}) \dot{n}^i = 0 .$$

Poichè $\dot{a}^{il} = - a^{is} a^{il} \dot{a}_{sj}$, si ha:

$$v_{h/il} \dot{a}^{il} = - a^{is} a^{jl} \dot{a}_{sj} v_{h/il} = - v_h{}^{/sj} \dot{a}_{sj} = - v_h{}^{/sj} \left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial t} + a_{sj,r} v^r\right) .$$

Allora riesce, stante (16),

$$(19)\qquad \frac{D}{Dt} v_{h/i}{}^{i} = \frac{D}{Dt}(a^{il} v_{h/il}) =$$

$$= a^{il} a_{h/il} - a^{il}\left[v_{h/r} v^{r}{}_{/i} - v^{r} v_{k} R_{h}{}^{k}{}_{ri} + \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hi \end{Bmatrix} v_{r}\right]_{/l} +$$

$$+ a^{il}\left[v^{r}(R_{h}{}^{k}{}_{rl} v_{k/i} + R_{i}{}^{j}{}_{rl} v_{h/j}) - v_{h/ir} v^{r}{}_{/l} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hl \end{Bmatrix} v_{r/i} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} v_{h/r}\right] -$$

$$- v_{h}{}^{/sj}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial t} + a_{sj,r} v^{r}\right).$$

Tenendo conto che $b_{hi}{}^{/i} = a^{il} b_{h/il}$, per (13) si ha:

$$(20)\qquad \frac{D}{Dt} b_{hi}{}^{/i} = \dot{a}^{il} b_{h/il} + a^{il}\frac{D}{Dt} b_{hi/l} =$$

$$= -a^{is} a^{jl} \dot{a}_{sj} b_{hi/l} + a^{il}\left[\mathring{b}_{hi/l} - b_{hi/r} v^{r}{}_{/l} + v^{r} R_{h}{}^{k}{}_{rl} b_{ki} + v^{r} R_{i}{}^{k}{}_{rl} b_{hk} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hl \end{Bmatrix} b_{ri} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} b_{hr}\right] = -a^{is}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial t} + a_{sj,r} v^{r}\right) b_{hi}{}^{/j} +$$

$$+ a^{il}\left[\mathring{b}_{hi/l} - b_{hi/r} v^{r}{}_{/l} + v^{r} R_{h}{}^{k}{}_{rl} b_{ki} + v^{r} R_{i}{}^{k}{}_{rl} b_{hk} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hl \end{Bmatrix} b_{ri} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} b_{hr}\right].$$

con

$$\mathring{b}_{hi} = \tfrac{1}{2}(a_{hi,0r} v^{r} + a_{hi,00}).$$

Allora da $(18)_{1,2}$ segue

$$(21)\qquad a^{il} a_{(h/i)l} - a^{il}\left[v_{(h/r} v^{r}{}_{/i)} - v^{r} v_{k} R_{(h}{}^{k}{}_{ri)} + \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hi \end{Bmatrix} v_{r}\right]_{/l} +$$

$$+ a^{il}\left[v^{r}(R_{(h}{}^{k}{}_{rl} v_{k/i)} + R_{(i}{}^{j}{}_{rl} v_{h)/j}) - v_{(h/i)r} v^{r}{}_{/l} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ (hl \end{Bmatrix} v_{r/i)} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ (il \end{Bmatrix} v_{h)/r}\right] -$$

$$- v_{(h}{}^{/s)j}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial t} + a_{sj,r} v^{r}\right) + a^{il}\left[\mathring{b}_{hi/l} - b_{hi/r} v^{r}{}_{/l} + v^{r} R_{(h}{}^{k}{}_{rl} b_{ki)} +\right.$$

$$\left. + v^{r} R_{(i}{}^{k}{}_{rl} b_{h)k} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} r \\ (hl \end{pmatrix} b_{ri)} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ (il \end{Bmatrix} b_{h)r}\right] - a^{is}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial t} + a_{sj,r} v^{r}\right) b_{hi}{}^{/j} = 0$$

e

$$n^i\left(a_{(h/i)}-v_{(h/r}v^r{}_{/i)}+v^r v_k R_{(h}{}^k{}_{ri)}-\frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} r \\ hi \end{Bmatrix} v_r+\dot{b}_{hi}\right)+ \tag{22}$$
$$+\dot{n}^i(v_{(h/i)}+b_{hi})=0$$

con

$$\dot{n}_h=\varepsilon_h{}^{h_2\dots h_m}(\dot{t}_{h_2}{}^{(2)}t_{h_3}{}^{(3)}\dots t_{h_m}{}^{(m)}+\dots+t_{h_2}{}^{(2)}\dots t_{h_{m-1}}{}^{(m-1)}\dot{t}_{h_m}{}^{(m)})= \tag{23}$$
$$=\left(\sum_{i=2}^{m}\varepsilon_h{}^{h_2\dots h_m}t_{h_2}{}^{(2)}\dots t_{h(i-1)}{}^{(i-1)}t_{h(i+1)}{}^{(i+1)}\dots t_{h_m}{}^{(m)}\right)\left(\frac{\partial v_{hi}}{\partial s}-\frac{\partial v_l}{\partial s}t^{(i)l}t_{h_i}{}^{(i)}\right)$$

ove $\boldsymbol{t}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{t}^{(m)}$ è un sistema di versori mutuamente ortogonali appartenenti a $\mathcal{F}\,\Delta\sigma$.

Le (21) *e* (22) *sono le equazioni in* $\Delta\sigma$ *e sul contorno* $\mathcal{F}\,\Delta\sigma$*, rispettivamente, del campo delle accelerazioni più rigido possibile.*

5. Caso di metrica invariabile e in particolare di una superficie σ_t fissa.

Si può osservare che nel caso di vincoli fissi risulta

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/l}\equiv\left(\frac{\partial T_{a\dots}{}^{b\dots}}{\partial t}\right)_{/l},$$

onde per (13)-(14) riesce

$$\frac{D}{Dt}T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/l}-\left(\frac{DT_{a\dots}{}^{b\dots}}{Dt}\right)_{/l}= \tag{24}$$
$$-T_{a\dots}{}^{b\dots}{}_{/r}v^r{}_{/l}-v^r(R_a{}^{a'}{}_{lr}T_{a'\dots}{}^{b\dots}+\dots+-R^b{}_{b'lr}T_{a\dots}{}^{b'\dots}-\dots)\,.$$

In particolare, nel caso di una varietà a 2 dimensioni, ricordando che $R_{abcd}=K\varepsilon_{ab}\varepsilon_{cd}$ con K curvatura totale, e intendendo $a_h=\dot{v}_h$, stante (24), si ha:

$$\frac{D}{Dt}v_{h/i}=a_{h/i}-v_{h/r}v^r{}_{/i}+v^r R_h{}^k{}_{ri}v_k=a_{h/i}-v_{h/r}v^r{}_{/i}+v^r v_k k\varepsilon_h{}^k\varepsilon_{ri} \tag{25}$$

e

$$\frac{D}{Dt}v_{h/il}=\left(\frac{D}{Dt}v_{h/i}\right)_{/l}-v_{h/ir}v^r{}_{/l}+v^r(R_h{}^k{}_{rl}v_{k/i}+R_i{}^j{}_{rl}v_{h/j})= \tag{26}$$

$$=a_{h/il}-(v_{h/r}v^r{}_{/i}-v^r\varepsilon_{ri}v_k\varepsilon_h{}^kK)_{/l}-v_{h/ir}v^r{}_{/l}+Kv^r\varepsilon_{rl}(\varepsilon_h{}^kv_{k/i}+\varepsilon_i{}^jv_{h/j})\,.$$

Allora dalla validità di

$$v_{(h/i)}{}^i=0 \tag{27}$$

in un campo 4-dimensionale (spazio temporale) segue

$$a_{(h/i)}{}^i=[v_{(h/r}v^r{}_{/i)}-Kv^r v_k\varepsilon_{(h}{}^k\varepsilon_{ri)}]^{/i}+ \tag{28}$$

$$+v_{(h/i)r}v^{r/i}-Kv^r\varepsilon_r{}^i(\varepsilon_{(h}{}^kv_{k/i)}+\varepsilon_{(i}{}^jv_{h)/j})\,.$$

La (28) *è l'equazione del campo delle accelerazioni più rigido possibile nel caso che la superficie* σ_t *sia fissa.*

6. Analogo dei risultati del N. 5 per il caso isocoro.

Nel caso di vincoli fissi le equazioni del campo che caratterizzano gli atti di moto più rigidi possibile, dei sistemi isocori, sono

$$(v_{(h/i)}+\lambda a_{hi})^{/i}\equiv v_{(h/i)}{}^i+\lambda_{/h}=0\,,\qquad \text{in } \Delta\sigma\,, \tag{29}$$

$$(v_{(h/i)}+\lambda a_{hi})n^i\equiv v_{(h/i)}n^i+\lambda n_h=0\,,\qquad \text{su } \mathcal{F}\Delta\sigma\,, \tag{30}$$

$$v^r{}_{/r}=0\,. \tag{31}$$

Applicando l'operatore D/Dt alle (29)-(31) e tenendo conto che $(D/Dt)\lambda_{/h}=\dot\lambda_{/h}-\lambda_{/r}v^r{}_{/h}$, per (23), (25) e $(26)_1$, riesce

$$a_{(h/i)}{}^i-[v_{(h/r}v^r{}_{/i)}-v^rR_{(h}{}^k{}_{ri)}v_k]^{/i}-v_{(h/i)r}v^{r/i}+ \tag{32}$$

$$+v^r(R_{(h}{}^k{}_r{}^{i)}v_{k/i}+R_{(i}{}^j{}_r{}^iv_{h)/j})+\dot\lambda_{/h}-\lambda_{/r}v^r{}_{/h}=0\,,$$

$$n^i(a_{(h/i)} - v_{(h/r}v^r{}_{/i)} + v^r R_{(h}{}^k{}_{ri)} v_k) + v_{(h/i)}\dot{n}^i + \lambda \dot{n}_h + n_h \dot{\lambda} = 0\,, \tag{33}$$

$$a^r{}_{/r} - v^r{}_{/s} v^s{}_{/r} + v^s R_r{}^k{}_s{}^r v_k = a^r{}_{/r} - v^r{}_{/s} v^s{}_{/r} + v^s v_k R^k{}_s = 0\,. \tag{34}$$

Le (32)-(34) sono le equazioni del campo delle accelerazioni più rigido possibile (per il caso dei sistemi isocori).

7. Atti di moto duraturi per una membrana di tipo ϱ e caratterizzazione dinamica di quelli più rigidi possibile.

Fissata una porzione $\Delta\sigma$ della superficie fissa σ (che costituisce un dominio) e la costante $\varrho > 0$, diremo che $\mathcal{M} \in M_{\Delta\sigma,\varrho}$ se (e solo se) $\mathcal{M}$ è una (possibile) membrana (iperelastica) che:

a) *è vincolata senza attrito a stare su σ,*

b) *è dotata di una configurazione C^* di equilibrio spontaneo* (*stabile*) *in cui occupi la regione $\Delta\sigma$,* e

c) *ha rispetto alla configurazione di riferimento C^* costanti di Lamé λ e μ con*

$$\lambda = \varrho\mu\,, \qquad \lambda_{/r} = \mu_{/r} = 0 \qquad (\varrho_{/r} = 0) \text{ in } \Delta\sigma\,, \tag{35}$$

d) *non è soggetta a forze a distanza* (*esterne o interne*).

L'equazione della dinamica di $\mathcal{M}$ ($\in M_{\Delta\sigma,\varrho}$) vicino alla configurazione C^* — a partire dalla quale consideriamo un campo s_j di piccoli spostamenti — è

$$\frac{k}{\mu} a_j = (\varrho + 1)\, s^i{}_{/ij} + s_{j/i}{}^i + K s_j \tag{36}$$

ove k è la densità e K la curvatura totale. Poichè

$$s^i{}_{/ij} - s^i{}_{/ji} = k\varepsilon_l{}^i \varepsilon_{ij} s^l = -K a_{jl} s^l = -K s_j\,, \tag{37}$$

la (36) diviene:

$$\frac{k}{\mu} a_j = \varrho s^i{}_{/ij} + 2 s_{(i/j)}{}^i \tag{36'}$$

Alla (36') aggiungiamo le equazioni al contorno le quali, se $\boldsymbol{n}$ denota il versore tangente a $\Delta\sigma$ normale all'elemento lineare volto verso l'esterno, si precisano in

$$\varrho s_i{}^{/i} n_r + 2 s_{(r/k)} n^k = 0 \,. \tag{38}$$

Supponiamo che, all'istante t^*, $\mathcal{M}$ si trovi in C^* ($s_j \equiv 0$) con un campo di velocità $\boldsymbol{v}^*$, di classe $C^{(2)}$. Qualunque sia tale $\boldsymbol{v}^*$, essendo $s_j \equiv 0$, l'accelerazione a_j di $\mathcal{M}$ in $\Delta\sigma$ è $\equiv 0$ per (36'). Quindi il campo di velocità $\boldsymbol{v}(t)$ di $\mathcal{M}$ all'istante t differisce da $\boldsymbol{v}^*$ per infinitesimi (almeno) del 1° ordine rispetto a $(t - t^*)$. Diremo $\boldsymbol{v}^*$ *duraturo* se $\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}^*$ è infinitesimo (almeno) come $(t - t^*)^2$, ossia se in $\Delta\sigma$ riesce (oltre ad $a_j = 0$) anche $\dot{a}_j = 0$. Per trovare tali $\boldsymbol{v}$ osserviamo che $v_h = \dot{s}_h$ per $t = t^*$, e che con le lecite sostituzioni $v_h \to s_h$ e $a_h \to v_h$ le (25) e $(26)_2$ diventano delle relazioni rispettivamente tra $(D/Dt) s_{h/r}$, $v_{h/r}$, $s_{h/r}$ e s_h, e tra

$$\frac{D}{Dt} s_{h/il},\ v_{h/il},\ s_h,\ s_{h/r} \text{ e } s_{h/rl} \,.$$

In C^*, ossia per $t = t^*$, si ha:

$$\frac{D}{Dt} s_{h/i} = v_{h/i}\,, \qquad \frac{D}{Dt} s_{h/il} = v_{h/il} \qquad (s_h \equiv 0)\,. \tag{39}$$

Allora, tenendo conto che $a_j \equiv 0$ per $t = t^*$, applicando l'operatore D/Dt ai due membri di (36') e alla (38) si ottiene

$$\frac{k}{\mu} \dot{a}_j = \varrho v^i{}_{/ij} + 2 v_{(i/j)}{}^i \qquad (t = t^*) \tag{40}$$

e

$$\varrho n_r v_i{}^{/i} + 2 n^k v_{(r/k)} = 0 \,. \tag{41}$$

Concludiamo che $\boldsymbol{v}$ è duraturo se e solo se

$$\varrho v^i{}_{/ij} + 2 v_{(i/j)}{}^i = 0 \,. \tag{42}$$

Per $\varrho = 0$ (o $\varrho \to 0$) le (42) e (41) divengono le condizioni che caratterizzano, in $\Delta\sigma$ e al contorno rispettivamente, gli atti di moto più rigidi possibile.

Dunque, se la superficie σ_t è fissa, gli atti di moto più rigidi possibile in una porzione $\Delta\sigma$ di essa sono i limiti degli atti di moto duraturi per una membrana $\mathcal{M} \in M_{\Delta\sigma,\varrho}$, per $\varrho \to 0$.

8. Atti di moto duraturi per un sistema elastico tridimensionale e loro relazione con quelli rigidi.

Consideriamo un sistema elastico $\mathcal{C}$ tridimensionale che supponiamo:

a) *dotato di una configurazione C^* di equilibrio spontaneo (stabile) in cui $\mathcal{C}$ occupi una regione ΔV data ad arbitrio*:

b) *omogeneo e isotropo nella configurazione C^**, e

c) *avente rispetto alla configurazione di riferimento C^* costanti di Lamé λ e μ con*

$$\lambda = \varrho\mu\,, \qquad \lambda_{/r} = \mu_{/r} = 0 \qquad (\varrho_{/r} = 0) \text{ in } \Delta V\,, \tag{43}$$

d) *non soggetto a forze a distanza (esterne o interne)*,

L'equazione della dinamica di $\mathcal{C}$ vicino alla configurazione C^* — a partire dalla quale consideriamo un campo s_j di piccoli spostamenti — è

$$\frac{k}{\mu}\, a_j = (\varrho + 1)\, s^i{}_{/ij} + s_{j/i}{}^i \tag{44}$$

ove k è la densità.

Supponiamo allora che, all'istante t^*, $\mathcal{C}$ si trovi in $C^*(s_j \equiv 0)$ con un campo di velocità $\boldsymbol{v}^*$, di classe $C^{(2)}$. Qualunque sia tale $\boldsymbol{v}^*$, essendo $s_j \equiv 0$, l'accelerazione a_j di $\mathcal{C}$ in ΔV è $\equiv 0$ per (44). Naturalmente diremo ancora che $\boldsymbol{v}^*$ è *duraturo* se $\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}^*$ è infinitesimo (almeno) come $(t - t^*)^2$, ossia se in ΔV riesce (oltre ad $a_j = 0$) anche $\dot{a}_j = 0$. Per trovare tali $\boldsymbol{v}$ osserviamo che $v_h = \dot{s}_h$ per $t = t^*$, onde, in C^*, si ha $(D/Dt)\, s_{h/il} = v_{h/il}$. Allora, tenendo conto che $a_j \equiv 0 \equiv s_j$, per $t \equiv t^*$, applicando l'operatore D/Dt ai due membri della (44) si ottiene

$$\frac{k}{\mu}\dot{a}_j = (\varrho + 1)\, v^i{}_{/ij} + v_{j/i}{}^i\,. \tag{45}$$

Ne segue che $\boldsymbol{v}$ è duraturo se e solo se

$$(\varrho + 1)\, v^i{}_{/ij} + v_{j/i}{}^i = 0\,. \tag{46}$$

Per $\varrho = 0$ (o $\varrho \to 0$) la (46) diviene

$$v^i{}_{/ij} + v_{j/i}{}^i = 0 \qquad \text{cioè } v_{(i/j)}{}^i = 0\,. \tag{47}$$

La $(47)_2$ caratterizza gli atti di moto più rigidi possibile e quindi, per il Teorema 6.1 dimostrato in [1], gli atti di moto rigidi.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Bartolozzi - A. Bressan, *Moti più rigidi possibile*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **30** (1981).

[2] B. Finzi - M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna 1961.

[3] C. Cattaneo, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Libreria Veschi, Roma 1960-61.

[4] A. Bressan, *Relativistic theories of materials*, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 29 (1978).

[5] M. Bartolozzi - A. Bressan, *Sugli atti di moto, eventualmente isocori, più rigidi possibile - Parte I*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 dicembre 1980.