RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO MARIA SCOPPOLA

Sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da 1 : una caratterizzazione reticolare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 205-221

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__205_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da 1: una caratterizzazione reticolare.

CARLO MARIA SCOPPOLA (*)

0. Il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti perchè il reticolo $\mathfrak{L}$ sia isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo è stato posto da Suzuki in [2].

In [3] è data una risposta a tale problema: si trovano prima di tutto condizioni necessarie e sufficienti affinchè un reticolo $\mathfrak{L}$ sia isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo libero noncommutativo (tali condizioni sono di natura completamente reticolare). I reticoli che sono isomorfi a reticoli dei sottogruppi di gruppi si identificano poi con una conveniente classe di ideali principali duali dei caratterizzati reticoli di gruppi liberi, e ciò in accordo col fatto che ogni gruppo è l'immagine epimorfa di un conveniente gruppo libero.

In questo lavoro si ottiene invece esplicitamente (in termini reticolari) una condizione necessaria e sufficiente affinché un reticolo $\mathfrak{L}$ sia isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da 1: a partire da un reticolo che soddisfa a tale condizione, si costruisce poi l'unico gruppo il cui reticolo dei sottogruppi è isomorfo al reticolo dato.

Le tecniche qui usate sono adattamenti di quelle usate in [3], ispirati ai classici lavori di Baer sui reticoli di gruppi abeliani (si veda ad es. [2]).

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Libera Università degli Studi di Trento, 38050 Povo, (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

Alcuni dei risultati ottenuti in questo lavoro sono simili a risultati ottenuti, con tecniche diverse ed in diverso contesto, in [1].

1. Le notazioni sono tutte standard: indicheremo con $\vee$ e $\wedge$ le operazioni reticolari, mentre con $\cup$ e $\cap$ indicheremo l'unione e l'intersezione di insiemi; l'ordinamento parziale in un reticolo $\mathfrak{L}$ verrà indicato con $\leqslant$; la relazione di inclusione tra insiemi con $\subseteq$. Con $1_{\mathfrak{L}}$, $0_{\mathfrak{L}}$ (o semplicemente 1, 0) indicheremo l'eventuale elemento massimo (minimo) del reticolo $\mathfrak{L}$; con 1_G (o 1) indicheremo l'unità del gruppo G. Per le nozioni reticolari seguiremo [2]. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo con 0. Come in [3], diremo che $a \in \mathfrak{L}$ è ciclico se l'intervallo $a/0$ è distributivo con condizione massimale.

Indicheremo con lettere latine minuscole gli elementi ciclici di $\mathfrak{L}$, con $C(\mathfrak{L})$ l'insieme da essi formato, con lettere latine maiuscole gli altri elementi di $\mathfrak{L}$.

La proposizione che segue è ben nota: in forma leggermente diversa, appare in [1] e in [3].

1.1. Proposizione. Sia G un gruppo, $\mathfrak{L}$ un reticolo algebrico i cui elementi compatti sono quelli unione di un numero finito di elementi ciclici. Se esiste una mappa suriettiva:

$$\psi\colon G \to C(\mathfrak{L})$$

che soddisfa la condizione

(o) Per ogni $X \subseteq G$, X finito e $y \in G$ risulta

$$\psi(y) \leqslant \bigvee_{x\in X} \psi(x) \qquad \text{se e solo se } y \in \langle X\rangle$$

allora la posizione

$$\varphi\colon K \mapsto \bigvee_{x\in K} \psi(x)$$

per $K \leqslant G$, definisce un isomorfismo φ del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G su $\mathfrak{L}$.

Dimostrazione. φ è iniettiva: supponiamo $\varphi(H) = \varphi(K)$, e sia per assurdo ad esempio $H \nleqslant K$. Sia allora $x \in H$, $x \notin K$. Allora

$$\psi(x) \leqslant \bigvee_{y\in H} \psi(y) = \varphi(H) = \varphi(K) = \bigvee_{z\in K} \psi(z)\,.$$

Poichè $\psi(x)$ è compatto, si ha che esistono $z_1, \ldots, z_n \in K$ tali che

$$\psi(x) \leqslant \psi(z_1) \vee \ldots \vee \psi(z_n)$$

che contraddice (o).

φ è suriettiva: sia $v \in \mathfrak{L}$, e sia

$$V = \{x \in G | \psi(x) \leqslant v\} .$$

Se $x, y \in V$, si ha $xy^{-1} \in \langle x, y \rangle$, e, per la (o),

$$\psi(xy^{-1}) \leqslant \psi(x) \vee \psi(y) \leqslant v .$$

Allora $V \leqslant G$, e, poichè $\mathfrak{L}$ è algebrico, $\varphi(V) = v$, tenuto conto della suriettività della ψ.

È poi chiaro che $H \leqslant K$ se e solo se $\varphi(H) \leqslant \varphi(K)$. ///

2. Per tutto il paragrafo, supporremo che il reticolo $\mathfrak{L}$ soddisfi le seguenti due condizioni:

GA1 $\mathfrak{L}$ è modulare, algebrico, senza torsione (cioè nessun elemento di $\mathfrak{L}$ copre lo 0) i cui elementi compatti sono quelli unione di un numero finito di elementi ciclici.

GA2 Se $a, b \in C(\mathfrak{L})$, si ha che $a \wedge b \neq 0$ se e solo se $a \neq 0 \neq b$, e $a \vee b \in C(\mathfrak{L})$.

Se $a, b \in C(\mathfrak{L})$, seguendo la notazione di [3], indicheremo con $a \circ b$ l'insieme $\{c \in C(\mathfrak{L}) / a \vee c = b \vee c = a \vee b\}$.

Nei lemmi che seguono, si studiano le prime conseguenze di GA1, GA2.

2.1. Lemma. Se $A, B, C \in \mathfrak{L}$, e $(A \vee B) \wedge C = 0$, allora $(A \vee C) \wedge \wedge B = A \wedge B$.

Dimostrazione.

$$(A \vee C) \wedge B \leqslant (A \vee C) \wedge (A \vee B) = A \vee \big(C \wedge (A \vee B)\big) = A .$$

Allora $(A \vee C) \wedge B \leqslant A \wedge B$. L'altra inclusione è ovvia. ///

2.2. Lemma. Siano $a, u \in C(\mathfrak{L})$, $a \neq 0 \neq u$, $A \in \mathfrak{L}$, $A \geqslant a$, $A \wedge u = 0$, $\alpha \in a \circ u$. Allora $\alpha \wedge a = \alpha \wedge b = \alpha \wedge A = 0$.

Dimostrazione. Se $\alpha \wedge a \neq 0$, $\alpha \vee a \in C(\mathfrak{L})$, per GA2. Ma $\alpha \vee a = a \vee u$. Ancora per GA2, si avrebbe $a \wedge u \neq 0$. Analogamente, si mostra che $\alpha \wedge u = 0$. Si ha poi $\alpha \wedge A \leqslant (\alpha \vee u) \wedge A = a \vee (u \wedge A) = a$. Dunque $\alpha \wedge A = \alpha \wedge a = 0$. ///

2.3. Lemma. Siano $a, b, u \in C(\mathfrak{L})$, $u \neq 0$, $u \wedge (a \vee b) = 0$, $\alpha \in a \circ u$, $\beta \in b \circ u$. Allora si ha:

i) $(\alpha \vee \beta) \wedge (a \vee b) \in \alpha \circ \beta \cap a \circ b$,

ii) se $\alpha \wedge \beta \neq 0$, $a = b$, $\alpha = \beta$.

Dimostrazione. i) Basta mostrare che, posto $w = (a \vee b) \wedge (\alpha \vee \beta)$, w è ciclico: una semplice applicazione dell'identità modulare permette poi di concludere.

Se $a \vee b \in C(\mathfrak{L})$, si ha chiaramente $w \in C(\mathfrak{L})$. Sia allora $a \neq 0 \neq b$, $a \wedge b = 0$, e mostriamo intanto che $w \wedge a = (\alpha \vee \beta) \wedge a = 0$. Poichè $u \neq 0$, e $u \wedge a = 0$, si ha per 2.2 $\alpha \wedge a = 0$; per 2.1, basta allora mostrare che

$$\beta \wedge (\alpha \vee a) = \beta \wedge (u \vee a) = 0 .$$

Ma $\beta \wedge (u \vee a) \leqslant (\beta \vee u) \wedge (u \vee a) = (b \vee u) \wedge (u \vee a) = u \vee (b \wedge (u \vee a))$. Ma di nuovo per 2.1, $b \wedge (u \vee a) = b \wedge a = 0$. Così, $\beta \wedge (u \vee a) \leqslant u \wedge \beta$. Ma $u \wedge \wedge \beta = 0$, per 2.2. Così abbiamo: $w \wedge a = 0$. Poichè $w \vee a = w \vee b = a \vee b$, la modularità porge $w/0 \simeq b/0$, e $w \in C(\mathfrak{L})$.

ii) Per 2.2, possiamo supporre $a \neq 0 \neq b$. Se ora $\alpha \wedge \beta \neq 0$, poichè per 2.2 $\alpha \wedge (a \vee b) = 0$, si avrebbe $(\alpha \vee \beta) \wedge (a \vee b) = 0$, per GA2. Per la prima parte, $a = b$, $\alpha = \beta$. ///

Diamo ora la definizione che occupa un posto centrale nella caratterizzazione dei reticoli di sottogruppi dei gruppi abeliani senza torsione:

2.4. Definizione. Siano $a, b \in C(\mathfrak{L})$. Porremo: $a * b = \{c \in a \circ b /$ per ogni $u \in C(\mathfrak{L})$, con $u \wedge (a \vee b) = 0$, e per ogni $\alpha \in a \circ u$, esiste $\beta \in b \circ u$ tale che $c \in \alpha \circ \beta\}$.

È facile vedere che se $a \in C(\mathfrak{L})$, $a * 0 = \{a\}$.

D'ora in avanti, supporremo che $\mathfrak{L}$ soddisfi, oltre le condizioni GA1, GA2, anche la seguente:

GA3 Se $a, b \in C(\mathfrak{L})$, $a \neq 0 \neq b$, allora $|a * b| = 2$.

I tre lemmi che seguono precisano la relazione tra $*$ e $\circ$:

2.5. Lemma. Se $\mathfrak{L} \neq \{0\}$ esistono $a, b \in C(\mathfrak{L})$ con $a \wedge b = 0$, $a \neq \neq 0 \neq b$; per ogni coppia $\{a, b\}$ di tali elementi si ha inoltre:

i) $a * b = a \circ b$,

ii) se $\{x, y\} = a \circ b$, allora $x \wedge y = 0$.

Dimostrazione. Per GA3, $|a * a| = 2$, per ogni $a \neq 0$, $a \in C(\mathfrak{L})$. Poichè $\mathfrak{L}$ è senza torsione, $a/0 = a \circ a$ non è finito, e quindi esiste $b \neq 0$ con $a \wedge b = 0$, $b \in C(\mathfrak{L})$.

i) Sia $c \in a \circ b$, e sia $0 \neq u \in C(\mathfrak{L})$ tale che $u \wedge (a \vee b) = 0$. Per 2.1 $a \wedge (b \vee u) = a \wedge b = 0$; se ora $\alpha \in a \circ u$, per 2.3 i) si ha

$$\beta = (\alpha \vee c) \wedge (u \vee b) \in \alpha \circ c \cap u \circ b .$$

Ciò prova che $c \in a * b$.

ii) Discende direttamente da 2.3 ii). ///

2.6. Lemma. Siano a, b, u come in 2.3, $a \neq 0 \neq b$. Siano

$$a \circ u = \{\alpha, \alpha'\}, \qquad b \circ u = \{\beta, \beta'\}.$$

Allora si ha:

$$\alpha \circ \beta \cap \alpha \circ \beta' = \emptyset .$$

Dimostrazione. Supponiamo che $c \in \alpha \circ \beta \cap \alpha \circ \beta'$. Allora $\beta, \beta' \in c \circ \alpha$. Per 2.5 ii) si ha che $\beta \wedge \beta' = 0$. Allora per 2.5 i) si ha che $|\beta \circ \beta'| = 2$. Per 2.3 i), se poniamo

$$s = (\beta \vee \beta') \wedge b , \qquad t = (\beta \vee \beta') \wedge u ,$$

si ha che $\{s, t\} = \beta \circ \beta'$. Si ha ora anche

$$s' = (\beta \vee \beta') \wedge \alpha \in \beta \circ \beta' ;$$

ma $s \wedge s' \leqslant \alpha \wedge b = 0$, $t \wedge s' \leqslant \alpha \wedge u = 0$, di nuovo per 2.2. ///

Si ha facilmente il:

2.7. Corollario. Se $a, b \in C(\mathfrak{L})$, $a * b = b * a$.

DIMOSTRAZIONE. Ci si riduce facilmente a $a \neq 0 \neq b$. Sia $c \in a * b$, $0 \neq u \in C(\mathfrak{L})$, $\beta \in b \circ u$, tali che, per assurdo, $c \notin \alpha \circ \beta$, $c \notin \alpha' \circ \beta$. Allora, poichè $c \in a * b$, si ha $c \in \alpha * \beta'$, $c \in \alpha' \circ \beta'$, contro 2.6. ///

2.8. LEMMA. Siano $a, b, u, \alpha, \beta, w$ come in 2.3 e sia $a \neq 0 \neq b$. Allora si ha $w \in a * b$.

DIMOSTRAZIONE. Per GA3 si ha $|a * b| = 2$. Supponiamo $\alpha \neq \beta$. Sia $s \in a * b$, e supponiamo che $s \in \alpha \circ \beta$ (quest'ultima ipotesi non è restrittiva). Si ha allora certamente $s \leqslant w$, e quindi $s = w$ per 2.5 ii), visto che, per 2.3 ii), $\alpha \wedge \beta = 0$. A questo punto, 2.6 e GA3 forniscono facilmente

$$a * b = \{w, a \circ b \cap \alpha \circ \beta' \cap \alpha' \circ \beta = w'\}.$$

Se poi $\alpha = \beta$, si ha immediatamente $w = 0 \in a * a$. ///

2.9. OSSERVAZIONI. i) Nel caso esista $u \in C(\mathfrak{L})$ tale che $u \gneq 0$, $u \wedge (a \vee b) = 0$, 2.8 permette di costruire con facilità $a * b$; con 2.5 i), abbiamo quindi in ogni caso una scrittura « esplicita » di $a * b$.

ii) Per i), tutte le scelte di u in 2.4 sono quindi tra loro equivalenti.

D'ora in poi, per tutto il paragrafo, supporremo che il reticolo $\mathfrak{L}$ sia non banale ($\mathfrak{L} \neq \{0\}$), e soddisfi, oltre GA1, GA2, GA3, le due ulteriori condizioni

GA4 Se $0 \neq e, a, b \in C(\mathfrak{L})$, $e \notin a * b$, $\alpha \in a * e$, $\beta \in b * e$, allora $|a * b \cap \alpha * \beta| = 1$,

GA5 Se $x \in C(\mathfrak{L})$, $Y \subset C(\mathfrak{L})$, $x \leqslant \bigvee_{y \in Y} y$, esistono $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tali che $x \in \big(\ldots((y_1 * y_2) * y_3) * \ldots\big) * y_n$.

2.10 DEFINIZIONE. Un reticolo soddisfacente le condizioni GA1-GA5 si dirà un GA-reticolo.

L'esistenza di GA-reticoli è garantita dal seguente:

2.11. TEOREMA. Sia G un gruppo abeliano senza torsione di rango $r \geqslant 2$. Allora, se $a, b \in G$, si ha $\langle a \rangle * \langle b \rangle = \{\langle ab \rangle, \langle ab^{-1} \rangle\}$, e $\mathfrak{L}(G)$, il reticolo dei sottogruppi di G, è un GA-reticolo.

Si omette la semplice verifica.

Inoltre, 2.10 permette di rifoımulaıe 1.1 come segue:

2.12. Proposizione. Sia G un gruppo, $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo. Se esiste una mappa suriettiva

$$\psi\colon\ G \to C(\mathfrak{L})$$

tale che $\psi(x) \in \psi(y) * \psi(z)$ se e solo se $x = y^\theta z^\eta$, $\theta, \eta = \pm 1$, allora la posizione

$$\varphi(K) = \bigvee_{x \in K} \psi(x)\ ,$$

per ogni $K \leqslant G$, definisce una proiettività $\varphi\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}$.

Nei lemmi che seguono si studiano ulteriori proprietà dei GA-reticoli.

2.13. Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $a, b, c \in C(\mathfrak{L})$. Se $c \in a * b$, si ha $a \in b * c$ (e $b \in a * c$).

Dimostrazione. Se $c = a$, tutto è chiaro. Supponiamo allora $c \neq a$, e sia $0 \neq u \in C(\mathfrak{L})$ tale che $u \wedge (b \vee c) = u \wedge (a \vee b) = 0$. Fissiamo $\beta \in u \circ b$, e sia $\alpha \in u \circ a$ tale che $c \in \alpha \circ \beta$. Ora $\alpha \notin u * c = u \circ c$ in virtù di 2.3 ii), e per GA4 si ha $|u * c \cap a * \beta| = 1$, e dunque esiste $\gamma \in u * c$ tale che $a \in \beta \circ \gamma$ per cui $a \in b * c$. ///

2.14. Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $e, a, b \in C(\mathfrak{L})$, $\alpha \in a * e$, $\beta \in b * e$. Allora $a * b \cap \alpha * \beta \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Se $e = 0$, si ha $\alpha = a$, $\beta = b$, e in ogni caso $a * b \neq \emptyset$. Se invece $e \neq 0$, $e \notin a * b$, la tesi è immediata per GA4. Se $e \in a * b$, $e \notin \alpha * \beta$, 2.13 e GA4 permettono di nuovo di concludere. Altrimenti, $e \in a * b \cap \alpha * \beta$. ///

2.15. Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $a, b, c \in C(\mathfrak{L})$; allora se $a * a = b * b$ si ha $a = b$, e se $a * b = a * c$ si ha $b = c$.

Dimostrazione. Per la prima parte, sia $\gamma \in a * b$. Se $\gamma \in a * a \cap b * b$, si ha $b \leqslant a \vee \gamma = a \vee a = a \leqslant b \vee \gamma = b \vee b = b$, e $a = b$. Se invece, ad esempio, $\gamma \notin a * a$, si ha $\gamma = 0$, altrimenti per GA4 $|a * a \cap b * b| = 1$, e $a = 0 = b$. Se ora $0 \in a * b$, si ha facilmente $a = b$.

Per la seconda parte, ci si riduce facilmente a $a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c$. Sia $\gamma \in a * b \cap a * c$. Se $\gamma = 0$, si ha $a = b = c$. Se $\gamma \neq 0$, per 2.14 si ha che $|a * a \cap b * c| \geqslant 1$. Se $0 \in b * c$ allora $b = c$; altrimenti sia $0 \neq \delta \in a * a \cap b * c$. Per GA4, $\delta \in a * b \cap a * c$. Si ha allora $a * \delta \ni a, b, c$; è facile vedere che in ogni caso $b = c$. ///

2.16. LEMMA. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $a, b, c, d \in C(\mathfrak{L})$. Allora se $a * b = c * d$ si ha $\{a, b\} = \{c, d\}$.

DIMOSTRAZIONE. È facile vedere che si può supporre $a, b, c, d \neq 0$. Sia $\{\alpha, \beta\} = a * b = c * d$. Supponiamo dapprima che $\{\alpha, \beta\} = a * c = b * d = a * d = b * c$; allora si avrebbe $a * \alpha \ni b, c, d$, cioè ad esempio $c = d$, e allora facilmente, per 2.15, $a = b = c = d$, in ogni caso. Sia allora, ad esempio, $\alpha \notin a * c$. Allora $a * c \cap b * d = \{\gamma\}$ in virtù di GA4, e si ha facilmente $\gamma = 0$ o $\gamma = \beta$, altrimenti l'ipotesi $|a * b \cap c * d| = 2$ violerebbe GA4. Se $\gamma = 0$, si ha $a = c$, $b = d$, la tesi. Se $\gamma = \beta$, si ha

$$a \in \beta * b \cap \beta * c \,, \qquad d \in \beta * b \cap \beta * c \,,$$

e, per 2.15, in ogni caso la tesi. ///

2.17. LEMMA. Siano $0 \neq e$, $a, b \in C(\mathfrak{L})$, $\alpha, \alpha' \in a * e$, $\beta, \beta' \in b * e$. Allora

$$|a * b \cap \alpha' * \beta \cap \alpha * \beta'| = 1 \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a = 0$, o $b = 0$, è tutto chiaro. Sia allora $a \neq 0 \neq b$. Se $e \in a * b$, è facile riconoscere la tesi osservando che $a * e \supseteq \{\alpha, \alpha', b\}$, e $b * e \supseteq \{\beta, \beta', a\}$, e applicando 2.14. Sia allora $e \notin a * b$. Per GA4 esistono s_1, s_2 tali che $\{s_1\} = a * b \cap \alpha * \beta'$, $\{s_2\} = a * b \cap \alpha' * \beta$. Sia ora $\{t\} = a * b \cap \alpha * \beta$; mostriamo che $t \neq s_1$. Se fosse $t = s_1$ si avrebbe $\beta, \beta' \in \alpha * s_1$, per 2.16, e $e * b \cap \alpha * s_1 \supseteq \{\beta, \beta'\}$. Poichè $a \neq 0$, e $a \notin e * b$, per GA4 si ha $\beta = \beta'$, e $b = 0$, assurdo. Analogamente, $t \neq s_2$. Poichè $|a * b| = 2$, si ha $s_1 = s_2$. ///

Siano $a, b, e, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ come in 2.17. D'ora in avanti, indicheremo l'unico elemento dell'insieme $a * b \cap \alpha * \beta' \cap \alpha' * \beta$ con la notazione $\psi_{e,a,b}(\alpha, \beta)$. Ove non si creino ambiguità, abbrevieremo tale notazione in $\psi_e(\alpha, \beta)$, o addirittura in $\psi(\alpha, \beta)$.

2.18. DEFINIZIONE. Se $0 \neq a \in C(\mathfrak{L})$, indicheremo con a_2 l'elemento di $a * a$ diverso da 0. Si osservi che $a_2 \neq a$, per GA1 e GA5.

2.19. LEMMA. Siano $e, a, b, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ come in 2.17, $x, y \in C(\mathfrak{L})$. Se

$$x * y \cap a * b \neq \emptyset \,,$$

$$x * y \cap \alpha * \beta' \neq \emptyset \,,$$

$$x * y \cap \alpha' * \beta \neq \emptyset \,,$$

allora una delle seguenti alternative è vera:

(1) $\psi(\alpha, \beta) \in x * y$,

(2) $x = y = e$, $a = b$, $\alpha = \beta$,

(3) $x = e$, $y = e_2$, $a = b$, $a_2 = e$,

(4) $x = e$, $y = e_2$, $e \in a * b$, $b = \alpha$, $a = \beta'$.

Dimostrazione. Se $a = 0$, o $b = 0$, vale (1), poichè $\{\psi(\alpha, \beta)\} = = a * b$. Con una considerazione analoga si vede che vale (1) anche nel caso $a = e$ o $b = e$. Possiamo quindi senz'altro assumere $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. Supponiamo che $\psi(\alpha, \beta) \notin x * y$. Le ipotesi porgono allora

(i) $\alpha * \beta' = \alpha' * \beta$,

oppure

(ii) $a * b = \alpha * \beta'$.

i) e 2.16 danno $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, e quindi $a = b$. Si ha $\psi(\alpha, \alpha) \neq 0$, e quindi $0 \in x * y$, poichè $x * y \cap a * a \neq \emptyset$. Quindi $x = y$. Da $\alpha * \alpha' \cap \cap e * e = \alpha * \alpha' \cap x * x$ si ricava $x * x = e * e$, e per 2.15 $x = e$. Vale dunque (2).

ii) e 2.16 danno $a = \alpha$, $b = \beta'$, oppure $a = \beta'$, $b = \alpha$. Nel primo caso si ha: $a_2 = b_2 = e$; per 2.15 $a = b$. È facile concludere che vale (3). Nel secondo caso, $e \in a * b$. Ma $e \notin \alpha' * \beta$, avremmo altrimenti $\alpha' * e = \{\beta, \beta' = a\}$, e per 2.15 $\alpha' = b = \alpha$, assurdo. Allora $e \in x * y$. Per ottenere (4), basta quindi mostrare: $e * e_2 \cap \alpha' * \beta \neq \emptyset$. Per 2.14, basta allora mostrare $a \in e_2 * \beta$. Ma 2.14 fornisce $e * e \cap a * \beta \neq \emptyset$, e $0 \notin a * \beta$, poichè $a = \beta' \neq \beta$. Allora $e_2 \in a * \beta$, e 2.13 conclude la dimostrazione. ///

Si assuma ora, nei tre lemmi seguenti, $0 \neq e \in C(\mathfrak{L})$, $E \in \mathfrak{L}$, $e \wedge E = 0$, $C = C(\mathfrak{L}) \cap E/0$. Per ogni $a \in C$, indicheremo con α, α^{-1}, cioè con la corrispondente lettera greca minuscola munita degli esponenti ± 1, gli elementi di $a * e$; nel caso $a = 0$, α e α^{-1} verranno identificati.

2.20. Lemma. Siano $a, b \in C$. Allora

$$e * \psi_{e,a,b}(\alpha, \beta) \cap \alpha * b \cap a * \beta$$

contiene esattamente un elemento, che diremo il «prodotto» di α e β, e indicheremo $\alpha\cdot\beta$.

Dimostrazione. Sia dapprima $a = b$. Se $\psi(\alpha, \beta) = 0$, cioè se $\beta = \alpha^{-1}$, la tesi è immediata: $\alpha\cdot\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\cdot\alpha = e$. Se $\psi(\alpha, \beta) \neq 0$, e quindi $\alpha = \beta$, si ha

$$\psi(\alpha, \beta) = a * a \cap \alpha * \alpha^{-1} ;$$

osservando che $a \notin e * \psi(\alpha, \beta)$, per GA4 si ha

$$|e * \psi(\alpha, \beta) \cap \alpha * a| = 1 .$$

Sia allora $a \neq b$. Certamente, per 2.3 ii), $e \notin \alpha * b$: sia allora σ l'unico elemento di $\alpha * b \cap a * \beta$. Per 2.19 si ha allora facilmente $\psi(\alpha, \beta) \in \in e * \sigma$. ///

Abbiamo così una legge di composizione su $\Gamma = C \circ e = \bigcup_{x \in C} x \circ e$, rispetto alla quale $e \in 0 \circ e$ funge da identità, e α^{-1} da inverso di α. Dalla definizione, segue immediatamente anche $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$. È anche immediato:

2.21. Lemma. $\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1} = (\alpha\cdot\beta)^{-1}$.

Dimostrazione. Se $s = \psi(\alpha, \beta) \neq 0$, per GA4 $|\sigma * b \cap e * a| = 1$. ///

2.22. Lemma. $(\Gamma, \cdot)$ è un gruppo.

Dimostrazione. Basta mostrare che l'operazione su Γ è associativa. Sia dunque $\alpha\cdot\beta = \xi$, $\beta\cdot\gamma = \eta$; occorre far vedere che $\xi\cdot\gamma = = \alpha\cdot\eta$. Sarà $\xi \in x * e$, $\eta \in y * e$; e supporremo, senza perdita di generalità, che $a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c$. Ci riduciamo al caso

$$x * c \cap \xi * \gamma^{-1} \cap \xi^{-1} * \gamma = a * y \cap \alpha * \eta^{-1} \cap \alpha^{-1} * \eta$$

a partire dalle seguenti condizioni, che si ottengono tutte applicando opportunamente la GA4 e i risultati precedenti:

$$\begin{aligned} |x * c \cap \xi * \gamma^{-1}| &= |x * c \cap \xi^{-1} * \gamma| = |x * c \cap \alpha * \eta^{-1}| = \\ &= |x * c \cap \alpha^{-1} * \eta| = |a * y \cap \alpha * \eta^{-1}| = |a * y \cap \alpha^{-1} * \eta| = \\ &= |a * y \cap \xi * \gamma^{-1}| = |a * y \cap \xi^{-1} * \gamma| = 1 , \end{aligned}$$

$$x * c \cap a * y \neq \emptyset \neq \xi * \gamma^{-1} \cap \alpha * \eta^{-1} \neq \emptyset \neq \xi^{-1} * \gamma \cap \alpha^{-1} * \eta ,$$

e applicando 2.19, a meno che non si abbia $x * c = a * y$, cioè, per 2.16, $a = x$, $c = y$, oppure $x = y$, $a = c$.

Nel primo caso, poichè $x \in a * b$, si ha $0 \neq b \in a * a$; e similmente $b \in c * c$; così per 2.15 $a = c = x = y$. A questo punto è facile verificare direttamente la associatività.

Nel secondo caso, se $\alpha = \gamma$, tutto è chiaro; se $\alpha \neq \gamma$, è facile ottenere, da $x = y$, $b = 0$: una contraddizione. Siamo quindi ridotti a esaminare il caso: $\psi(\xi, \gamma) = \psi(\alpha, \eta)$. È ora facile concludere, applicando ripetutamente GA4 e i risultati precedenti. ///

2.23. Lemma. Sia $\mathfrak{L}(\Gamma)$ il reticolo dei sottogruppi di Γ, ove Γ è come in 2.22. Allora $\mathfrak{L}(\Gamma) \simeq E/0$.

Dimostrazione. Si verifica con facilità che $E/0$ è un reticolo algebrico, i cui elementi compatti sono le unioni di un numero finito di ciclici. Definiamo la mappa

$$\psi\colon \Gamma \to C\,, \qquad \psi\colon \alpha \mapsto a\,.$$

Tenuto conto di GA5 e di 2.8, è facile riconoscere che sono soddisfatte le ipotesi di 1.1. ///

3. Enunciamo e dimostriamo ora un caso particolare del teorema di caratterizzazione cercato:

3.1. Teorema. Un reticolo $\mathfrak{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano libero finitamente generato non ciclico se e solo se $\mathfrak{L}$ soddisfa alle seguenti condizioni:

i) $\mathfrak{L}$ è un GA-reticolo, e $1_{\mathfrak{L}}$ è compatto;

ii) Esistono $E_1, E_2 \in \mathfrak{L}$, $E_1 \wedge E_2 = 0_{\mathfrak{L}}$, $E_1 \vee E_2 = 1$,

$$0 \neq f_1 \leqslant E_1\,, \qquad 0 \neq f_2 \leqslant E_2\,, \qquad f_1, f_2 \in C(\mathfrak{L})\,.$$

Dimostrazione. La necessità è banale per 2.13.

Sufficienza. Porremo $C_i = (E_i/0) \cap C(\mathfrak{L})$, $i = 1, 2$. Si osservi che $f_1 \wedge f_2 = 0$, e si scelga, una volta per tutte, $e \in f_1 * f_2$. Certamente $e \neq 0$, altrimenti $f_1 = f_2$. Si ha anche $E_1 \wedge e = E_2 \wedge e = 0$, per 2.2. Siano Γ_1, Γ_2 i gruppi costruiti da E_1, E_2, e come in 2.22, e sia

$\mathcal{G} = \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Sia $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{G}$, $\alpha_i \in a_i * e$, $a_i \in C_i$. Definiamo una mappa

$$\psi\colon \mathcal{G} \to C(\mathcal{L})$$

attraverso la posizione

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi_{e,a_1,a_2}(\alpha_1, \alpha_2)\ ;$$

infatti 2.3 ii) e 2.17 ci assicurano che ψ è ben definita. Osserviamo che basterà mostrare:

a) ψ è suriettiva,

b) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) = \{\psi(\alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_2), \psi(\alpha_1\beta_1^{-1}, \alpha_2\beta_2^{-1})\}$.

Infatti in queste condizioni potremo applicare 2.12, una volta osservato che $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1})$, e che, per GA4, se $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi(\beta_1, \beta_2)$ allora $\alpha_1 = \beta_1^\theta$, $\alpha_2 = \beta_2^\theta$, $\theta = \pm 1$. A questo punto otterremo $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{L}$, e per GA1 la sufficienza delle ipotesi i), ii).

Cominciamo a vedere *a*). Sia $c \in C(\mathcal{L})$. Se $c \leqslant E_i$, e se $\gamma \in c * e$, allora $c = \psi(\gamma, e)$. Inoltre, osserviamo che se $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$, allora per 2.17, 2.16

$$a_1 * a_2 = \{\psi(\alpha_1, \alpha_2), \psi(\alpha_1, \alpha_2^{-1})\}\ .$$

Sia allora $c \notin C_1 \cup C_2$. Poichè $\mathcal{L}$ è modulare e senza torsione, abbiamo $c \wedge E_1 = c \wedge E_2 = 0$. Sia $k_i = (c \vee E_j) \wedge E_i$ $(i, j = 1, 2$, e $i \neq j)$, e si osservi che $k_i \in C_i$: per GA1, $c/0 \simeq c \vee E_j/E_j = k_i \vee E_j/E_j \simeq k_i/0$, dato che $k_i \vee E_j = ((c \vee E_j) \wedge E_i) \vee E_j = (c \vee E_j) \wedge (E_i \vee E_j) = c \vee E_j$. Ancora la modularità e 2.5 i) porgono ora $c \in k_1 * k_2$.

Vediamo ora *b*). Prima di tutto, osserviamo che

$$\psi(\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2) = \psi(\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1}, \beta_1 \cdot \beta_2^{-1})$$

implica

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \qquad \text{o} \qquad \psi(\beta_1, \beta_2) = 0\ .$$

In questo caso, è facile verificare direttamente *b*), e siamo quindi ridotti a mostrare che

$$\psi(\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2) \in \psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2)\ .$$

Sia

$$s_i = \psi(\alpha_i, \beta_i)\,.$$

Per 2.19 siamo ulteriormente ridotti a mostrare:

(1) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap s_1 * s_2 \neq \emptyset$,

(2) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} \neq \emptyset$,

(3) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap (\alpha_1 \cdot \beta_1)^{-1} * \alpha_2 \cdot \beta_2 \neq \emptyset$,

(un semplice controllo permette infatti di escludere le possibilità (2), (3), (4) di 2.19).

Per vedere (1), mostriamo intanto che

$$\psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \in s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2)\,.$$

Per 2.19, ciò discende dalle

$$\begin{aligned}
&s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap b_1 * a_2 \neq \emptyset\,,\\
&s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap \beta_1 * \alpha_2 \neq \emptyset\,,\\
&s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap \beta_1^{-1} * \alpha_2^{-1} \neq \emptyset\,,\\
&s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap b_1 * a_2 \neq \emptyset\,,\\
&s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap \beta_1 * \alpha_2 \neq \emptyset\,,\\
&s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap \beta_1^{-1} * \alpha_2^{-1} \neq \emptyset\,,
\end{aligned}$$

che sono a loro volta tutte facilmente verificate a partire da 2.14. Ancora 2.14 porge allora

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap s_1 * s_2 \neq \emptyset\,.$$

Vediamo (2); per 2.14 si ha

$$\begin{aligned}
&\beta_1 * a_2 \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) \neq \emptyset\,,\\
&\beta_1 * a_2 \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \neq \emptyset\,,\\
&\alpha_2^{-1} * b_1 \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) \neq \emptyset\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_2^{-1} * b_1 \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) & & \neq \emptyset\,, \\
e & * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) & \neq \emptyset\,, \\
e & * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) & \neq \emptyset\,, \\
e & * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap \beta_1 * a_2 & \neq \emptyset\,, \\
e & * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap b_1 * \alpha_2^{-1} & \neq \emptyset\,, \\
\beta_1 & * a_2 \cap b_1 * \alpha_2^{-1} & \neq \emptyset\,.
\end{array}
$$

Una semplice verifica mostra ora che

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) \neq \emptyset\,,$$

e, per 2.14, abbiamo (2).

La stessa argomentazione usata per (2) vale anche per (3), e così la dimostrazione è conclusa. ///

Se supponiamo che il reticolo $\mathfrak{L}$ nel Teorema 3.1 sia dato come reticolo dei sottogruppi di un gruppo G, ha senso chiedersi quali relazioni esistono tra G e $\mathfrak{G}$. A tale quesito risponde il seguente:

3.2. Teorema. Sia G un gruppo, e $\mathfrak{L}(G)$ sia un GA-reticolo, soddisfacente alle ipotesi di 3.1, e sia $\mathfrak{G}$ il gruppo costruito in 3.1 a partire da $\mathfrak{L}(G)$. Allora la posizione

$$\Psi\colon\ (\langle x_1 e\rangle, \langle x_2 e\rangle) \mapsto x_1 x_2,$$

definisce un isomorfismo di $\mathfrak{G}$ su G.

Dimostrazione. G è chiaramente senza torsione, così la Ψ è ben definita. È facile osservare che $\langle \Psi(x)\rangle = \psi(x)$ ove ψ è come in 3.1, così Ψ e suriettiva. Ψ è anche iniettiva, poichè, nelle notazioni di 3.1, $E_1 \wedge E_2 = 0_{\mathfrak{L}} = \{1_G\}$. $\mathfrak{L}(G)$ è modulare: è allora ben noto (si veda ad es. [2]) che G è abeliano: così Ψ è un omomorfismo di gruppi. ///

Si ha ora l'importante

3.3. Corollario (Baer). Sia G un gruppo abeliano libero di rango finito diverso da 1. Sia H un gruppo, e

$$\varphi\colon\ \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$$

un isomorfismo. Allora φ è indotto da un isomorfismo di G su H.

È ben noto ([2]) che in 3.3 si ha che gli isomorfismi che inducono φ sono poi esattamente due.

I lemmi che seguono studiano i GA-reticoli $\mathfrak{L}$ in cui $1_{\mathfrak{L}}$ è compatto.

3.4. Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo algebrico modulare i cui elementi compatti sono quelli generati da un numero finito di elementi ciclici, e sia $1_{\mathfrak{L}}$ compatto. Allora ogni elemento di $\mathfrak{L}$ è compatto.

Dimostrazione. Per induzione sul minimo numero n di generatori ciclici di $1_{\mathfrak{L}}$. Tutto è chiaro per $n = 1$. Sia allora $1_{\mathfrak{L}} = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$, $A = a_2 \vee \ldots \vee a_n$. Per la modularità di $\mathfrak{L}$, $1/A$ è distributivo a condizione massimale. Sia

$$C_0 < C_1 < \ldots < C_k \ldots < C = \bigvee C_k$$

una catena infinita: per ipotesi induttiva, si può supporre $C_0 \nleqslant A$. Esiste allora m tale che $A \vee C_m = A \vee C$. $C_k \wedge A$ $(k \geqslant m)$ è allora una catena infinita contenuta in A, assurdo. ///

3.5. Corollario. Se $\mathfrak{L}$ è un GA-reticolo, e $1_{\mathfrak{L}}$ è compatto, $C(\mathfrak{L})$ soddisfa la condizione massimale.

Così nelle ipotesi di 3.5 ha senso parlare di elementi ciclici massimali, ed ogni elemento ciclico è contenuto in uno di essi.

3.6. Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $A \in \mathfrak{L}$, $A \notin C(\mathfrak{L})$, A compatto. Allora $A/0$ è un GA-reticolo.

Dimostrazione. $A/0$ è modulare, senza torsione, completo. Se un suo elemento è unione di un numero finito di elementi ciclici, esso è compatto in $A/0$ in quanto compatto in $\mathfrak{L}$. Tutti gli elementi di $A/0$ sono unioni di elementi ciclici, pertanto un compatto deve essere unione di un numero finito di essi. 2.5 i) e 2.9 ii) assicurano poi GA3. Il resto è chiaro. ///

Si osservi che in 3.6 l'ipotesi «A compatto, $A \notin C(\mathfrak{L})$» può essere sostituita con l'ipotesi più debole «esistono $a, b \in C(\mathfrak{L})$, $a, b \leqslant A$, $a \wedge b = 0$». D'ora in poi supporremo $\mathfrak{L} \neq \{0\}$.

3.7. Definizione. Siano $a_1, \ldots, a_k \in C(\mathfrak{L})$, dove $\mathfrak{L}$ è un GA-reticolo con $1_{\mathfrak{L}}$ compatto. Diremo che $\{a_1, \ldots, a_k\}$ è un sistema di generatori ciclici di $\mathfrak{L}$ se $a_1 \vee \ldots \vee a_k = 1_{\mathfrak{L}}$. Denoteremo con $r(\mathfrak{L})$ il minimo tra le cardinalità dei sistemi di generatori ciclici di $\mathfrak{L}$.

3.8. TEOREMA. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $1_\mathfrak{L}$ compatto, c un elemento ciclico massimale in $\mathfrak{L}$. Allora esistono $a_2, \ldots, a_{r(\mathfrak{L})} \in C(\mathfrak{L})$, tali che $\{c, a_2, \ldots, a_{r(\mathfrak{L})}\}$ è un sistema di generatori ciclici di $\mathfrak{L}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $r(\mathfrak{L}) = 2$, le ipotesi di 3.1 sono soddisfatte: e in un gruppo abeliano libero di rango 2 i sottogruppi ciclici massimali sono complementati. Per 3.4, 3.6, si può ora arguire per induzione su $r(\mathfrak{L}) = r$. Sia $\{b_1, \ldots, b_r\}$ un sistema di generatori ciclici massimali di $\mathfrak{L}$. Se $c = b_1$, non c'è nessun problema. Se $c \wedge (b_2 \vee \ldots \vee b_r) \neq 0$ l'ipotesi induttiva permette di concludere facilmente. Sia allora $c \wedge (b_2 \vee \vee \ldots \vee b_r) = 0$. Consideriamo $c_1 = (b_1 \vee c) \wedge (b_2 \vee \ldots \vee b_r)$; c_1 è ciclico: $c_1/0 \simeq \simeq c_1/c \wedge c_1 \simeq c \vee c_1/c \lesssim b_1 \vee c/c \simeq b_1/0$, per la modularità di $\mathfrak{L}$, GA2, e la massimalità di b_1 e c. Sia $c_2 \geqslant c_1$, c_2 ciclico massimale in $b_2 \vee \ldots \vee b_r$; per ipotesi induttiva, esiste un sistema di generatori ciclici di $b_2 \vee \ldots \vee b_r$ che contiene c_2; e sia $\{c_2, a_3, \ldots, a_r\}$. Ora si osservi che $b_1 \vee c_2 \vee a_3 \vee \vee \ldots \vee a_r = 1_\mathfrak{L}$, e che $c \leqslant b_1 \vee c_2$: poichè c è ciclico massimale in $b_1 \vee c_2$, esso è complementato in $b_1 \vee c_2$, poichè $b_1 \vee c_2$ non è ciclico: altrimenti si avrebbe $c \wedge c_2 \neq 0$. Allora, se a_2 è il complemento di c in $b_1 \vee c_2$, $\{c, a_2, \ldots, a_r\}$ è un sistema di generatori ciclici per $\mathfrak{L}$. ///

3.9. COROLLARIO. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo, $1_\mathfrak{L}$ compatto, $A = \{a_1, \ldots \ldots, a_{r(\mathfrak{L})}\}$ un sistema di generatori ciclici massimali di $\mathfrak{L}$. Allora si ha $a_1 \wedge (a_2 \vee \ldots \vee a_{r(\mathfrak{L})}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Il caso $r(\mathfrak{L}) = 2$ è una conseguenza immediata di GA2. Negli altri casi, basta osservare che $a_1 \wedge (a_2 \vee \ldots \vee a_{r(\mathfrak{L})})$ è ciclico massimale in $a_2 \vee \ldots \vee a_{r(\mathfrak{L})}$, se è diverso da 0. ///

Si ha quindi, per 3.8, 3.9, che l'ipotesi ii) in 3.1 è sovrabbondante:

3.10. COROLLARIO. Sia $\mathfrak{L}$ un GA-reticolo. Allora $\mathfrak{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano libero finitamente generato non ciclico se e solo se $1_\mathfrak{L}$ è compatto.

Siamo finalmente in grado di dimostrare il teorema generale di caratterizzazione:

3.11. TEOREMA. Il reticolo $\mathfrak{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da 1 se e solo se $\mathfrak{L}$ è un GA-reticolo.

DIMOSTRAZIONE. Basta ormai vedere la sufficienza. Sia $K(\mathfrak{L})$ l'insieme degli elementi compatti non ciclici di $\mathfrak{L}$. $K(\mathfrak{L})$ non è vuoto perchè $\mathfrak{L}$ contiene almeno due elementi a e b ciclici, $a \neq 0 \neq b$, tali che $a \wedge b = 0$. Per ogni $K \in K(\mathfrak{L})$, 3.1 permette di costruire un gruppo abeliano senza torsione avente reticolo dei sottogruppi isomorfo a $K/0$; sia esso G_K. Sia ora $K_0 \in K(\mathcal{L})$, e sia

$$K_0(\mathcal{L}) = \{K \in K(\mathcal{L})/K \geqslant K_0\}.$$

Per ogni $H \in K_0(\mathcal{L})$, l'inclusione $K_0/0 \hookrightarrow H/0$ è indotta, per 3.3, da esattamente due monomorfismi di $\mathcal{G}_{K_0}$ in $\mathcal{G}_H$: se ne scelga uno una volta per tutte, e sia i^H. Dato poi $K \in K_0(\mathcal{L})$, e $H \leqslant K$, sia $i_H{}^K$: $\mathcal{G}_H \to \mathcal{G}_K$ l'unico monomorfismo indotto dall'inclusione di H in K tale che

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_H \arrow[rr, "i_H{}^K"] & & \mathcal{G}_K \\ & \mathcal{G}_{K_0} \arrow[ul, "i_H"] \arrow[ur, "i_K"'] & \end{tikzcd}$$

è commutativo. È ora chiaro che $\{\mathcal{G}_H, i_H{}^K\}$ è una famiglia diretta, e sia $\mathcal{G} = \varinjlim_{K_0(\mathcal{L})} \mathcal{G}_H = \oplus\, \mathcal{G}_H/R$, dove R è generato dagli elementi di $\oplus\, \mathcal{G}_H$ della forma $a_H - i_H{}^K a_H (H \leqslant K,\ a_H \in \mathcal{G}_H)$. Dalla teoria elementare dei limiti discende che per ogni $x \in \mathcal{G}$, esiste $H \in K_0(\mathcal{L})$ tale che $x = a_H + R$, con $a_H \in \mathcal{G}_H$. Definiamo

$$\Psi\colon \mathcal{G} \to C(\mathcal{L}), \qquad \Psi\colon x \mapsto \psi_H(a_H)$$

dove ψ_H: $\mathcal{G}_H \to C(H/0)$ è la mappa definita nel Teorema 3.1. È ora immediato verificare che Ψ è una mappa suriettiva che soddisfa le ipotesi di 2.12, e la dimostrazione è completa. ///

BIBLIOGRAFIA

[1] Kai Faltings, *Modulare Verbände mit Punktsystem*, Geom. Ded., **4** (1975), pp. 105-137.

[2] M. Suzuki, *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Springer Verlag, Berlin 1956.

[3] B. V. Yacovlev, *Conditions under which a lattice is isomorphic to a lattice of subgroups of a group*, Algebra i Logika, Vol. 13, n. 6 (1974), pp. 694-712.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 novembre 1980.