RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELA VITANZA

Sul problema di Cauchy-Neumann per le equazioni paraboliche singolari a coefficienti discontinue in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 191-204

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__191_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Sul problema di Cauchy-Neumann per le equazioni paraboliche singolari a coefficienti discontinue in due variabili.

CARMELA VITANZA (*)

SUMMARY - In this paper we show that the problem (0.1)-(0.3) admits a unique solution in a suitable weighted Sobolev class.

Detto Q il rettangolo $]0, R[\times]0, T[$ $(R, T > 0)$, in questa nota studiamo, in un opportuno spazio di Sobolev con peso, il problema:

$$(0.1) \qquad a(x,t)\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right) + \frac{H(x,t)}{x}u_x + b(x,t)u_x + c(x,t)u - u_t = f(x,t) \qquad q.o. \text{ in } Q,$$

$$(0.2) \qquad u(x,t) = 0\,, \qquad x \in]0, R[\,,$$

$$(0.3) \qquad u_x(R,t) = 0\,. \qquad t \in]0, T[\,.$$

L'equazione (0.1), quando 2ν è intero positivo, si ricava dallo studio delle soluzioni a simmetria assiale di equazione paraboliche (cfr. [2]), mentre per altri valori di ν, si incontra nello studio dei moti browniani e dei processi stocastici.

In [1] A. Maugeri ha studiato, per tale equazione, il problema di

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Via Cesare Battisti 90, 98100 Messina.

Cauchy-Dirichlet; nel nostro caso affrontiamo, per l'interesse che esso ha nelle applicazioni (cfr. [5], p. 285), il problema di Cauchy-Neumann, dimostrando che esso ammette una ed una sola soluzione a condizione che 2ν sia un numero reale maggiore di -1 e che esistano un numero reale $\lambda \geqslant 1$ e un numero reale $\sigma \in]0, 1]$ tali che [1]

A) $a(x, t)$ *e* $H(x, t) \in L^{\infty}(Q)$ *e*

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant a(x, t) \leqslant \lambda\,, \qquad |H|_{\infty} < \frac{1+2\nu}{\lambda}\,,$$

B) $b(x, t) \in L^{2(1-\sigma),2\sigma}(Q)$, $c(x, t) \in L^{\infty,2}(Q)$, $f(x, t) \in L^2_{\nu}(Q)$ *e*

$$|b|_1 \leqslant \lambda\,, \qquad |c|_{\infty,2} \leqslant \lambda \text{ [2]}\,.$$

Denotiamo con $H^{2,1}_{\nu}(Q)$ la classe delle funzioni $u(x, t)$ misurabili in Q e tali che u, $u_{xx} + (2\nu/x)u_x$ e u_x/x appartengano a $L^2_{\nu}(Q)$, normalizzato ponendo:

$$\|u\|_{\nu} = \left(|u|^2_{2,\nu} + \left|\frac{u_x}{x}\right|^2_{2,\nu} + \left|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu} + |u_t|^2_{2,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{0.4}$$

cercheremo la soluzione del problema (0.1)-(0.3) nella classe $H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$

[1] In quel che segue con il simbolo $L^{p,q}_{\nu}(Q)$ $(1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty)$ denoteremo lo spazio delle funzioni misurabili in Q per le quali risulta finita la quantità:

$$|g|_{p,q,\nu} = \left(\int_0^T \left(\int_0^R x^{\nu p}|g(x, t)|^p\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q}.$$

Scriveremo, per semplicità $L^{p,q}_0(Q) = L^{p,q}(Q)$, $L^{p,p}_{\nu}(Q) = L^p_{\nu}(Q)$, $L^{p,p}_0(Q) = L^p(Q)$ e $|g|_{p,q,0} = |g|_{p,q}$, $|g|_{p,p,\nu} = |g|_{p,\nu}$ e $|g|_{p,p,0} = |g|_p$.

Ovvie modifiche occorrono se p o q oppure entrambi sono infiniti.

[2] Come è noto (cfr. [3], p. 327) esiste una funzione $h_{\sigma}(\delta)$ definita per $\delta \geqslant 0$, non decrescente, infinitesima per δ tendente a zero, tale che:

$$\left(\int_0^T \left(\int_{E(t)} |b(x, t)|^{2/(1-\sigma)}\, dx\right)^{(1-\sigma)/\sigma} dt\right)^{\delta/2} \leqslant h_{\sigma}(\delta)$$

qualunque sia il sottoinsieme misurabile E di Q tale che mis $E \leqslant \delta$, $E(t)$ essendo la sezione di E di piede t.

formata dalla chiusura in $H_\nu^{2,1}(Q)$ della varietà:

$$Y = \{u \in C^2(Q) \cap H_\nu^{2,1}\ u(x, 0) = 0,\ u_x(R, t) = 0\}\,.$$

In $H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$ la norma (0.4) e la norma:

$$\|u\|_{\nu,1} = \left(\left|\frac{u_x}{x}\right|_{2,\nu}^2 + \left|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}\,u_x\right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.5}$$

sono equivalenti.

1. Proprietà dello spazio $H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$.

Valgono i seguenti risultati:

Lemma 1.1. *Per ogni funzione* $u(x, t) \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$ *risulta*:

$$|u_x|_{2,\infty,\nu} \leqslant \left(\left|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}\,u_x\right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $u \in Y$. Dalla identità:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{2\nu}u_x u_t) = u_t x^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x}\,u_x\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}(x^{2\nu}u_x^2)$$

e dalle condizioni $u(x, 0) = 0$, $u_x(R, t) = 0$, tenendo presente [2], pp. 7-8, segue:

$$\int_0^R\!\!\int_0^t u_t x^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x}\,u_x\right) dx\, d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^R x^{2\nu}u_x^2(x, t)\, dx$$

e, quindi, la tesi.

Lemma 1.2. *Per ogni* $u \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$ *risulta*:

$$|u_x|_{\infty,2,\nu} \leqslant k_0 \left|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}\,u_x\right|_{2,\nu} \tag{1.2}$$

dove $k_0 = (R/(1 + 2\nu))^{\frac{1}{2}}$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla identità

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{2\nu}u_x) = x^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right)$$

e dal fatto che $u_x/x \in L^2_\nu(Q)$ segue che:

$$\lim_{x\to 0} x^{2\nu}u_x(x, 0) = 0$$

e

$$x^{2\nu}u_x(x, t) = \int_0^x \xi^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{\xi}u_x\right)d\xi \leqslant \left(\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^R x^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e, quindi, la tesi.

LEMMA 1.3. *Per ogni* $u \in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$, *detto* σ *un qualunque numero dell'intervallo* $[0, 1]$, *si ha*

$$|u_x|_{2/\sigma, 2/(1-\sigma), \nu} \leqslant k_1\left(\left|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu} + |u_t|^2_{2,\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

dove $k_1 = 1 + k_0$.

DIMOSTRAZIONE. Dai Lemmi 1.1 e 1.2 si deduce che $u_x \in L^{2/\sigma, 2/(1-\sigma)}_\nu(Q)$ e che

$$|u_x|_{2/\sigma, 2/(1-\sigma), \nu} \leqslant |u_x|_{2,\infty,\nu} + |u_x|_{\infty,2,\nu}.$$

Dalle (1.1) e (1.2) segue poi la tesi.

LEMMA 1.4. *Per ogni* $u \in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ *e qualunque sia il numero positivo* ε *risulta*:

$$|u_x|^2_{2,\nu} \leqslant \varepsilon\left|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu} + \gamma(\varepsilon)|u|^2_{2,\nu} \tag{1.4}$$

dove $\gamma(\varepsilon)$ *è una costante dipendente solo da* ε.

DIMOSTRAZIONE. Risulta (cfr. [2], pp. 7-8)

$$\int_0^T\int_0^R x^{2\nu}u_x^2\,dx = \int_0^T\int_0^R x^{2\nu}u_x u_x\,dx = -\int_0^T\int_0^R x^{2\nu}u\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right)dx$$

e quindi la tesi.

LEMMA 1.5. *Per ogni $u \in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ e qualunque sia il numero positivo ε risulta*:

$$|u|_{2,\infty,\nu} \leqslant \varepsilon |u_t|_{2,\nu} + \gamma(\varepsilon)|u|_{2,\nu} . \tag{1.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla identità:

$$u^2(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t u(x, \tau)\, u_\tau(x, \tau)\, d\tau$$

segue facilmente la tesi.

2. Risultati preliminari.

Proviamo il seguente:

TEOREMA 2.1 *Per ogni $f \in L^2_\nu(Q)$ esiste una e una sola soluzione appartenente ad $H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ dell'equazione*:

$$u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x - u_t = f \tag{2.1}$$

ed essa è rappresentata dalla serie:

$$u(x, t) = -x^{\frac{1}{2}-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{R^2 J^2_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n R)} \int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right] \cdot \left(\int_0^R \xi^{\nu+\frac{1}{2}} f(\xi, \tau) J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n \xi)\, d\xi\right) d\tau \tag{2.2}$$

dove $J_{\nu-\frac{1}{2}}(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie di ordine $\nu - \frac{1}{2}$ e j_n, $n \in N$, sono le radici dell'equazione:

$$\lambda R J'_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda R) + (\tfrac{1}{2} - \nu) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda R) = 0 .$$

Inoltre si ha:

$$\left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|^2_{2,\nu} + |u_t|^2_{2,\nu} + |u_x|^2_{2,\infty,\nu} \leqslant |f|^2_{2,\nu} , \tag{2.3}$$

$$\left| \frac{u_x}{x} \right|^2_{2,\nu} \leqslant \frac{4}{(1+2\nu)^2} |f|^2_{2,\nu} . \tag{2.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per semplicità, $R = 1$, e scriviamo la (2.2) nella forma:

$$u(x,t) = -x^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right] \cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau) \psi_n(\xi)\, d\xi \right) d\tau \tag{2.5}$$

dove si è posto:

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{2x}\, J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n)} \ (^3) .$$

Cominciamo col provare che $u(x,t) \in L^2_\nu(Q)$. Si ha, per ogni n, $p \in N$

$$\left| -\sum_{k=1}^{p} x^{-\nu} \psi_{n+k}(x) \int_0^t \exp\left[-j^2_{n+k}(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau) \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) d\tau \right|^2_{2,\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \int_0^T \left(\int_0^t \exp\left[-j^2_{n+k}(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau) \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) d\tau \right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau) \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right)^2 d\tau$$

(^{3}) Ricordiamo che (cfr. [4] e [5])

$$\int_0^1 \psi_n(x) \psi_m(x)\, dx = \delta_{n,m} \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x,t)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 x^\nu f(x,t) \psi_n(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ne segue

$$\int_0^T \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x,t)\, dx\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_0^1 x^\nu f(x,t) \psi_n(x)\, dx \right)^2 dt .$$

e, quindi, $u(x, t)$ denota una effettiva funzione di $L^2_\nu(Q)$.

Tenendo presente che

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu+\frac{1}{2}}J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)\right) = -j_n x^{\nu-\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x)$$

otteniamo, derivando termine a termine la serie (2.5), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\psi_n(\xi)\, d\xi\right) d\tau\,, \tag{2.6}$$

dove:

$$\chi_n(x) = \frac{\sqrt{2x}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n)} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\, dx = \delta_{n,m}\,.$$

Proviamo che la serie (2.6) converge in $L^2_\nu(Q)$. Si ha per ogni n, $p \in N$

$$\left|\sum_{k=1}^{p} x^{-\nu}\chi_{n+k}(x)\, j_{n+k}\int_0^t \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\psi_{n+k}(\xi)\, d\xi\right) d\tau\right|^2_{2,\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} j_{n+k}^2 \int_0^T \left(\int_0^t \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\psi_{n+k}(\xi)\, d\xi\right) d\tau\right)^2 dt\,.$$

Ora, procedendo come in [1], Teorema 1.1, si ricava

$$\int_0^T \left(\int_0^t \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\psi_{n+k}(\xi)\, d\xi\right) d\tau\right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{j_{n+k}^4}\int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\psi_{n+k}(\xi)\, d\xi\right)^2 dt$$

e, quindi, si ha:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} x^{-\nu}\chi_{n+k}(x)\, j_{n+k}\int_0^t \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\psi_{n+k}(\xi)\, d\tau\right) d\tau\right|^2_{2,\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{j_{n+k}^2}\int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, t)\psi_{n+k}(\xi)\, d\xi\right)^2 dt\,.$$

Pertanto la serie (2.6) converge in $L^2(Q)$ e, con gli stessi procedimenti di [1], p. 6, si verifica che essa converge anche in $L^2_\nu(0, 1)$ per ogni $t \in [0, T]$. Da ciò segue che la serie (2.5) converge uniformemente a $u(x, t)$ in ogni rettangolo $[\bar{x}, 1] \times [0, T]$ con $0 < \bar{x} < 1$.

Seguendo sempre [1], si verifica che la serie ottenuta derivando termine a termine la (2.5) rispetto a t

$$(2.7) \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu}\psi_n(x)\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, t)\,\psi_n(\xi)\,d\xi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n^2 \psi_n(x)\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau$$

converge in $L^2_\nu(Q)$ e, detta $w(x, t)$ la sua somma, si ha:

$$(2.8) \qquad w(x, t) = u_t(x, t)\,.$$

Consideriamo, ora, la funzione $x^{2\nu}u_x(x, t)$ ed osserviamo che, nel senso di $L^1(Q)$, vale l'uguaglianza:

$$(2.9) \qquad x^{2\nu}u_x(x, t) = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} j_n\,\chi_n(x)\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\cdot \\ \cdot\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau\,.$$

Tenendo presente che:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+\frac12} J_{\nu+\frac12}(j_n x)\right) = j_n x^{\nu+\frac12} J_{\nu-\frac12}(j_n x)$$

derivando termine a termine la serie (2.9) si ottiene la serie

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\, j_n^2 \int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau$$

che ha per somma in $L^1(Q)$ la funzione $x^{2\nu}u_t(x, t) + x^{2\nu}f(x, t)$. Avendosi nel senso della convergenza in $L^1(0, T)$:

$$\int_0^z x^{2\nu}(u_t + f)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z x^\nu \psi_n(x)\, j_n^2\, dx \int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\,\psi_n(\xi)\right) d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^\nu j_n \chi_n(z) \int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right) d\tau$$

e valendo la (2.9) si ha:

$$\int_0^z x^{2\nu}(u_t + f)\,dx = z^{2\nu}u_n(z, t)\,. \tag{2.10}$$

Inoltre, essendo verificata l'uguaglianza

$$-\lambda J_{\nu+\frac12}(\lambda) = \lambda J'_{\nu-\frac12}(\lambda) + (\tfrac12 - \nu) J_{\nu-\frac12}(\lambda)$$

le radici di $J_{\nu+\frac12}(\lambda) = 0$ coincidono con le radici di:

$$\lambda J'_{\nu-\frac12}(\lambda) + (\tfrac12 - \nu) J_{\nu-\frac12}(\lambda) = 0$$

e risulta:

$$\chi_n(1) = 0\,.$$

Ne segue, allora,

$$u_x(1, t) = 0\,, \qquad u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x = u_t + f\,.$$

Dalla (2.10) e dalla disuguaglianza di Hardy si ricava poi

$$\int_Q x^{2\nu} \frac{u_x^2}{x^2}\,dx\,dt = \int_0^T dt \int_0^1 x^{2\nu} \left(\frac{1}{x}\int_0^x \xi^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2c}{\xi}u_x\right) d\xi\right)^2 dx \leqslant \tag{2.11}$$

$$\leqslant \frac{4}{(1+2\nu)^2} \int_Q x^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x\right)^2 dx\,dt\,.$$

Dalla (2.11) e dalla uguaglianza

$$\int_Q x^{2\nu}\left[\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)^2+u_t^2\right]dx\,dt+\int_0^1 x^{2\nu}u_x^2(x,T)\,dx=$$
$$=\int_Q x^{2\nu}\left[\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)-u_t\right]^2 dx\,dt$$

seguono poi le (2.3) e (2.4).

3. Maggiorazioni a priori.

Posto:

$$\mathcal{L}^*u=a(x,t)\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)+\frac{H(x,t)}{x}u_x-u_t$$

e

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^*u+b(x,t)u_x+c(x,t)u$$

valgono i seguenti risultati:

LEMMA 3.1. *Se valgono le ipotesi A), per ogni* $u\in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ *risulta*

$$\left(\left|u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu}+|u_t|^2_{2,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c_0\,|\mathcal{L}^*u|_{2,\nu}\,,\tag{3.1}$$

$$\left|\frac{u_x}{x}\right|_{2,\nu}\leqslant\frac{2c_0}{1+2\nu}\,|\mathcal{L}^*u|_{2,\nu}\,,\tag{3.2}$$

dove $c_0=\big(1/\lambda-|H|_\infty(2/(1+2\nu))\big)^{-1}$.

Per la dimostrazione basta tenere presenti i Teoremi 3.1 e 3.2 di [2].

LEMMA 3.2. *Se valgono le ipotesi A) e B), per ogni* $u\in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ *risulta:*

$$\|u\|_{\nu,1}\leqslant K_6|\mathcal{L}u|_{2,\nu}\tag{3.3}$$

dove K_6 *è una costante dipendente da* R, T, λ, $|H|_\infty$, ν, $h_\sigma(\delta)$ *e non decrescente al crescere di* T.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (3.1) si ricava:

$$\left|u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu}+|u_t|^2_{2,\nu}\leqslant c_0^2|\mathfrak{L}u-bu_x-cu|^2_{2,\nu}\leqslant$$
$$\leqslant 3c_0^2\big(|\mathfrak{L}u|^2_{2,\nu}+|bu_x|^2_{2,\nu}+|cu|^2_{2,\nu}\big)\,.$$

Per il Lemma 1.5 si ottiene:

$$|cu|^2_{2,\nu}\leqslant|u|^2_{2,\infty,\nu}|c|^2_{\infty,2}\leqslant\varepsilon^2|c|^2_{\infty,2}|u_t|^2_{2,\nu}+\gamma^2(\varepsilon)|c|^2_{\infty,2}|u|^2_{2,\nu}$$

e quindi:

$$\left|u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu}+|u_t|^2_{2,\nu}\leqslant K_2\big(|\mathfrak{L}u|^2_{2,\nu}+|bu_x|^2_{2,\nu}+|u|^2_{2,\nu}\big)$$

essendo K_2 una costante dipendente da R, ν, $|H|_\infty$, λ.

Diciamo, ora, l un qualunque numero reale positivo e denotiamo con Q_l l'insieme dei punti di Q in cui $|b|>l$ e con ϱ_l la funzione caratteristica di Q_l; si ha:

$$\int_{Q_l}b^2x^{2\nu}u_x^2\,dx\,dt=\int_Q b^2x^{2\nu}\varrho_l^2u_x^2\,dx\,dt\leqslant|b\varrho_l|^2_{2/(1-\sigma),2/\sigma}|u_x|^2_{2/\sigma,2/(1-\sigma),\nu} \tag{3.4}$$

e, quindi, utilizzando il Lemma 1.3 e la (3.4):

$$|bu_x|^2_{2,\nu}\leqslant l^2|u_x|^2_{2,\nu}+K_1^2h_\sigma^2(\operatorname{mis}Q_l)\left(\left|u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu}+||u_t|^2_{2,\nu}\right).$$

Essendo

$$\operatorname{mis}Q_l\leqslant\frac{1}{l}|b|_1\leqslant\frac{\lambda}{l}$$

scegliendo opportunamente l e utilizzando il Lemma 1.4 si ricava:

$$\left|u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right|^2_{2,\nu}+|u_t|^2_{2,\nu}\leqslant K_3\big(|u|^2_{2,\nu}+|\mathfrak{L}u|^2_{2,\nu}\big)\,, \tag{3.5}$$

con K_3 costante del solito tipo.

Risultando, come si verifica facilmente,

$$\int_0^R x^{2\nu}u^2(x,\tau)\leqslant \mathrm{d}x\, T\int_0^R\int_0^T x^{2\nu}u_t^2(x,t)\,dx\,dt \qquad \text{per ogni } \tau\in[0,T]\,,$$

considerando la maggiorazione (3.5) nel cilindro $Q_\tau =]0, R[\times]0, \tau[$ invece che nel cilindro Q, si ottiene

$$\int_0^R x^{2\nu}u^2(x,\tau)\,dx\leqslant K_4\Big(|\mathfrak{L}u|^2_{2,\nu}+\int_0^\tau\int_0^R x^{2\nu}u^2(x,t)\,dx\,dt\Big) \tag{3.6}$$

con K_4 costante del solito tipo.

Dalla (3.6), utilizzando il lemma di Gronwall, si ricava

$$\int_0^R x^{2\nu}u^2(x,\tau)\,dx\leqslant K_5|\mathfrak{L}u|^2_{2,\nu}$$

e da qui, assieme alla (3.5), segue la tesi.

4. Teorema di esistenza ed unicità.

TEOREMA 4.1. *Se valgono le ipotesi A) e B), per ogni* $f\in L^2_\nu(Q)$ *esiste una ed una sola funzione* $u\in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ *tale che:*

$$\mathfrak{L}u = f$$

r risulta:

$$\|u\|_{\nu,1}\leqslant K|f|_{2,\nu}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per ogni $\tau\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\tau u = \tau\mathfrak{L}u + (1-\tau)\Big(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x-u_t\Big) &=\\ = [\tau a(x,t)+(1-\tau)]\Big(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\Big)&+\\ +\tau\frac{H(\tau,t)}{x}u_x+\tau b(\tau,t)u_x+\tau c(\tau,t)u-u_t\,.\end{aligned}$$

Si ha:

$$\tau a(x, t) + (1-\tau) \leqslant \tau\lambda + (1-\tau)\lambda = \lambda\,,$$

$$\tau a(x, t) + (1-\tau) \geqslant \frac{\tau}{\lambda} + \frac{(1-\tau)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\,,$$

$$|\tau H|_\infty = \tau|H|_\infty \leqslant |H|_\infty\,,$$

$$|\tau b|_{2/(1-\sigma),\,2/\sigma} = \tau|b|_{2/(1-\sigma),2/\sigma} \leqslant |b|_{2/(1-\sigma),2/\sigma}\,,$$

$$|\tau c|_{\infty,2} = \tau|c|_{\infty,2} \leqslant |c|_{\infty,2}$$

e, quindi, in virtù del Lemma 3.2 per ogni $u \in H^{2;1}_{\nu,1}(Q)$ e per ogni $\tau \in [0, 1]$ risulta

$$\|u\|_{\nu,1} \leqslant K_6|\mathfrak{L}_\tau u|_{2,\nu}$$

con una stessa costante K_6 indipendente da τ.

Inoltre se τ_1 e τ_2 sono due numeri dell'intervallo $[0, 1]$ e $u \in H^{2;1}_{\nu,1}(Q)$, tenendo presenti le proprietà dello spazio $H^{2;1}_{\nu,1}(Q)$, si ricava facilmente:

$$|\mathfrak{L}_{\tau_1}u - \mathfrak{L}_{\tau_2}u| \leqslant C|\tau_1 - \tau_2|\;\|u\|_{\nu,1}\,.$$

A norma del Teorema 2.1 risulta $\mathfrak{L}_0 H^{2;1}_{\nu,1}(Q) = L^2_\nu(Q)$ e, quindi, per completare la dimostrazione basterà provare che, se $\tau_0 \in [0, 1]$ e $\mathfrak{L}_{\tau_0} H^{2;1}_{\nu,1}(Q) = L^2_\nu(Q)$, si ha anche $\mathfrak{L}_\tau H^{2;1}_{\nu,1}(Q) = L^2_\nu(Q)$ per

$$\tau \in [0, 1]\,, \qquad |\tau - \tau_0| < \frac{1}{K_\sigma C}\,. \tag{4.1}$$

A tale scopo, fissati un valore di τ soddisfacente le (4.1) e una funzione $f(x, t) \in L^2_\nu(Q)$ basterà provare che esiste $u \in H^{2;1}_{\nu,1}(Q)$ tale che $\mathfrak{L}_\tau u = f(x, t)$ cioè tale che

$$u = \mathfrak{L}^{-1}_{\tau_0}(\mathfrak{L}_{\tau_0}u - \mathfrak{L}_\tau u) + \mathfrak{L}^{-1}_{\tau_0} f\,. \tag{4.2}$$

D'altra parte essendo:

$$\|\mathfrak{L}^{-1}_{\tau_0}(\mathfrak{L}_{\tau_0}u - \mathfrak{L}_\tau u)\|_{\nu,1} \leqslant K_6|\mathfrak{L}_{\tau_0}u - \mathfrak{L}_\tau u|_{2,\nu} \leqslant K_6 C|\tau_0 - \tau|\;\|u\|_{\nu,1}$$

per il principio delle contrazioni l'equazione funzionale (4.2) ammette una ed una sola soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Maugeri, *Su una classe di equazioni paraboliche singolari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **62** (1980), pp. 267-273.
[2] A. Maugeri, *Soluzioni a simmetria assiale di equazioni paraboliche*, Le Matematiche, **26** (1971), pp. 267-273.
[3] F. Nicolosi, *Sul problema di Cauchy-Dirichlet per le equazioni paraboliche a coefficienti discontinui in due variabili*, Le Matematiche, **21** (1966), pp. 325-338.
[4] G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Iniv. Press, 1958.
[5] A. H. Zemanian, *Generalized Integral Transformations*, Interscience Pubb., 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 novembre 1980 ed in forma revisionata il 12 gennaio 1981.