

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

P. C. CRAIGHERO

Una osservazione sulla curva di Cremona di

$$\mathbb{P}_k^3 \tilde{C} : \{\lambda\mu^3, \lambda^3\mu, \lambda^4, \mu^4\}$$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 65 (1981), p. 177-190

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__177_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Una osservazione sulla curva di Cremona

di $\mathbf{P}_k^3 \tilde{\mathcal{C}}: \{\lambda\mu^3, \lambda^3\mu, \lambda^4, \mu^4\}$.

P. C. CRAIGHERO (*)

SUMMARY - It is proved that the rational quartic $\tilde{\mathcal{C}}: \{x_1 = \lambda\mu^3, x_2 = \lambda^3\mu, x_3 = \lambda^4, x_4 = \mu^4\}$ is not set-theoretical complete intersection of any pair of surfaces of order 3 and 4, in characteristic $p \neq 2, 3$.

Lo scopo di questa nota è di provare che la curva razionale non singolare del quarto ordine di \mathbf{P}_k^3 , $\tilde{\mathcal{C}}: \{x_1 = \lambda\mu^3, x_2 = \lambda^3\mu, x_3 = \lambda^4, x_4 = \mu^4\}$ ove k è un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 2, 3$ non è sottoinsieme intersezione completa di alcuna coppia di superficie $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ con ordine $\tilde{\mathcal{F}} \leq 3$ e ordine $\tilde{\mathcal{G}} \leq 4$; altrimenti detto: $\tilde{\mathcal{C}}$ non è intersezione completa di due superficie se contata con molteplicità < 4 .

È ovvio che $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ non possono intersecarsi completamente solo in $\tilde{\mathcal{C}}$ se ordine $\tilde{\mathcal{F}} =$ ordine $\tilde{\mathcal{G}} = 3$, per il teorema di Bézout. È anche facile escludere che $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{C}}$ e che $\tilde{\mathcal{F}}$ o $\tilde{\mathcal{G}}$ possa essere un piano o una quadrica. Il primo caso è banale, poichè $\tilde{\mathcal{C}}$ non è piana. Nel secondo caso si osservi che $\tilde{\mathcal{C}}$ giace su di un'unica quadrica $\tilde{\mathcal{Q}}: X_1X_2 - X_3X_4 = 0$ la quale coincide con la rigata delle trisecanti di $\tilde{\mathcal{C}}$. Ora, se una curva $\tilde{\mathcal{C}}'$ è intersezione completa di una superficie $\tilde{\mathcal{H}}$ e di una quadrica $\tilde{\mathcal{Q}}'$ non singolare, allora $\tilde{\mathcal{C}}'$ deve incontrare ogni retta $\tilde{\mathcal{r}}'$ di $\tilde{\mathcal{Q}}'$ in uno stesso numero N di punti (ciascuno contato tante volte

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7, 35100 Padova.

quant'è la molteplicità di intersezione di $\tilde{\mathcal{C}}'$ e di $\tilde{\mathcal{Z}}'$ in esso, valutata nell'ambito della quadrica): precisamente N è il numero di punti comuni a $\tilde{\mathcal{Z}}'$ e ad $\tilde{\mathcal{K}}$. Ebbene, ciò non accade per $\tilde{\mathcal{C}}$ la quale incontra le generatrici di un sistema su $\tilde{\mathcal{Q}}$ in tre punti (distinti o variamente coincidenti) e quelle dell'altro in un punto (con intersezione trasversale).

Rimane da escludere il caso in cui ordine di $\tilde{\mathcal{F}} = 3$ e ordine di $\tilde{\mathcal{G}} = 4$. Questo caso era già stato escluso da L. Godeaux (cfr. [1], pag. 53) e da D. Gallarati (cfr. [2], pag. 56 e segg.) nelle ipotesi che $\tilde{\mathcal{F}}$ fosse priva di rette singolari e che $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ possedessero su $\tilde{\mathcal{C}}$ solamente punti doppi biplanari di tipo B_3 . Per escluderlo in qualunque caso, si procederà come segue. Notiamo che, se $\tilde{\mathcal{C}}$ fosse l'intersezione di una cubica $\tilde{\mathcal{F}}$ e di una quartica $\tilde{\mathcal{G}}$, risulterebbe $\tilde{\mathcal{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 3\tilde{\mathcal{C}}$ e, se \mathcal{F} e \mathcal{G} denotano le superficie affini $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \cap \mathbb{A}_k^3$, $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}} \cap \mathbb{A}_k^3$ ove \mathbb{A}_k^3 è lo spazio affine su k pensato immerso in \mathbb{P}_k^3 tramite la mappa

$$(X_1, X_2, X_3) \rightarrow (X_1, X_2, X_3, 1),$$

si avrà ancora $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathcal{C}$ ove $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} \cap \mathbb{A}_k^3: \{x_1 = t, x_2 = t^3, x_3 = t^4\}$. Viceversa se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono due superficie affini di \mathbb{A}_k^3 con ordine $\mathcal{F} = 3$ e ordine $\mathcal{G} = 4$ e risulta $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathcal{C}$, sarà (per Bézout) pure $\tilde{\mathcal{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 3\tilde{\mathcal{C}}$, ove $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{C}}$ denotano (come anche nel seguito) le chiusure proiettive di \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{C} in \mathbb{P}_k^3 . Pertanto ci si porrà direttamente nello spazio affine \mathbb{A}_k^3 il cui elemento generico sarà denotato più semplicemente (X, Y, Z) per provare la seguente

PROPOSIZIONE. *Non esiste in \mathbb{A}_k^3 , ove k è un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 2, 3$, alcuna coppia di superficie $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ con ordine $\mathcal{F} = 3$ e ordine $\mathcal{G} = 4$ tali che sia $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathcal{C}$, con $\mathcal{C}: \{x = t, y = t^3, z = t^4\}$. Se $p = 3$ una tale coppia di superficie esiste ed è $\mathcal{F}_1: Y - X^3 = 0$ e $\mathcal{G}_1: Y^4 - Z^3 = 0$.*

OSSERVAZIONE. Più volte, durante il corso della dimostrazione che segue si incontreranno deduzioni simili a questa:

$$\{12c = 0, c \in k\} \Rightarrow \{c = 0\}$$

perchè la caratteristica di k è $p \neq 2, 3$. Passeremo in tali casi senza altro alla conclusione, senza menzionare di volta in volta che essa segue dall'ipotesi fatta sulla caratteristica di k .

DIMOSTRAZIONE. Si considerino due qualsiasi superficie ridotte \mathcal{F} di ordine 3 e \mathcal{G} di ordine 4 appartenenti rispettivamente al sistema lineare di dimensione 6 delle superficie cubiche passanti per \mathcal{C} e al sistema lineare di dimensione 17 delle superficie quartiche passanti per \mathcal{C} . Ordinandone le equazioni secondo le potenze decrescenti di Z si ottiene

$$(1) \quad \mathcal{F}: F = A_2 Z^2 + A_1 Z + A_0 = 0 ;$$

$$(2) \quad \mathcal{G}: G = B_3 Z^3 + B_2 Z^2 + B_1 Z + B_0 = 0$$

ove si ha

$$A_0 = a_1 Y - a_2 X Y + a_5 Y^2 - a_3 X^2 Y - a_4 X Y^2 - a_1 X^3 - a_7 Y^3 ;$$

$$A_1 = a_2 + a_3 X + a_4 Y - a_6 X Y - a_5 X^2 ;$$

$$A_2 = a_6 + a_7 X ;$$

$$B_0 = b_1 Y + b_3 X Y + b_6 Y^2 - b_4 X^2 Y + b_{10} X Y^2 - b_1 X^3 + \\ + b_{14} Y^3 - (b_8 + b_7) X^2 Y^2 - (b_9 + b_6) X^3 Y - \\ - (b_{17} + b_{11}) X Y^3 - (b_2 + b_3) X^4 - (b_{16} + b_{15}) Y^4 ;$$

$$B_1 = b_2 + b_4 X + b_5 Y + b_8 X Y + b_9 X^2 + \\ + b_{11} Y^2 - b_{13} X Y^2 - (b_{14} + b_{12}) X^2 Y - (b_{10} + b_5) X^3 + b_{18} Y^3 ;$$

$$B_2 = b_7 + b_{12} X + b_{13} Y + b_{16} X Y + b_{17} X^2 ;$$

$$B_3 = b_{15} - b_{18} X .$$

Consideriamo pure le espressioni delle derivate parziali di F e di G calcolate nel punto generico di $\mathcal{C}(t, t^3, t^4)$ ove t è una trascendente su k .

$$F_X(t, t^3, t^4) = a_7 t^8 - a_6 t^7 - a_4 t^6 - 2a_5 t^5 - a_3 t^4 - a_2 t^3 - 3a_1 t^2 ,$$

$$F_Y(t, t^3, t^4) = -3a_7 t^6 - a_6 t^5 - a_4 t^4 + 2a_5 t^3 - a_3 t^2 - a_2 t + a_1 ,$$

$$F_Z(t, t^3, t^4) = 2a_7 t^5 + a_6 t^4 + a_4 t^3 - a_5 t^2 + a_3 t + a_2 ;$$

$$G_X(t, t^3, t^4) = -b_{18} t^{12} + b_{16} t^{11} - b_{13} t^{10} + \\ + (b_{17} - b_{11}) t^9 - (2b_{14} + b_{12}) t^8 - (b_8 + 2b_7) t^7 - \\ - (2b_{10} + 3b_5) t^6 - (b_9 + 3b_6) t^5 - b_4 t^4 - (4b_2 + 3b_3) t^3 - 3b_1 t^2 ,$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathcal{F}}(t, t^3, t^4) &= 3b_{18}t^{10} - (3b_{16} + 4b_{15})t^9 - b_{13}t^8 - \\
&\quad - (3b_{17} + b_{11})t^7 + (2b_{14} - b_{12})t^6 - (b_8 + 2b_7)t^5 + \\
&\quad + (b_5 + 2b_{10})t^4 + (b_6 - b_9)t^3 - b_4t^2 + b_3t + b_1, \\
G_{\mathcal{G}}(t, t^3, t^4) &= -2b_{18}t^9 + (2b_{16} + 3b_{15})t^8 + b_{13}t^7 + (b_{11} + 2b_{17})t^6 + \\
&\quad + (b_{12} - b_{14})t^5 + (b_8 + 2b_7)t^4 - b_{10}t^3 + b_9t^2 + b_4t + b_2.
\end{aligned}$$

Ricordiamo ora che \mathcal{C} non può essere luogo di punti singolari per \mathcal{F} nè per \mathcal{G} , quest'ultimo fatto essendo dovuto alla circostanza che \mathcal{C} ammette infinite trisecanti che sono un sistema di generatrici della quadrica \mathcal{Q} di cui si è parlato sopra: ognuna di tali trisecanti incontrando la \mathcal{G} in almeno 6 punti, deve appartenere alla \mathcal{G} la quale risulterebbe quindi riducibile in \mathcal{Q} ed in un'altra quadrica che deve necessariamente coincidere con \mathcal{Q} . Come si vede facilmente non può aversi inoltre $F_{\mathcal{F}}(t, t^3, t^4) = 0$ o F sarebbe il polinomio nullo. Quindi la molteplicità di intersezione di \mathcal{F} e del cilindro $\Gamma: Z - X^4 = 0$ (proiettante \mathcal{C} da Y_{∞}) lungo \mathcal{C} deve essere eguale ad 1: se dunque \bar{X} e \bar{Z} denotano le proiezioni canoniche di X e di Z nell'anello locale \mathcal{R} di \mathcal{F} in \mathcal{C} e $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ la valutazione di \mathcal{R} , $u = \bar{X} - \bar{Z}^4$ è un parametro uniformizzante di \mathcal{R} .

Consideriamo infine le equazioni di \mathcal{F} e \mathcal{G} ordinate secondo le potenze decrescenti di Y :

$$(3) \quad \mathcal{F}: F = C_3 Y^3 + C_2 Y^2 + C_1 Y + C_0 = 0,$$

$$(4) \quad \mathcal{G}: G = D_4 Y^4 + D_3 Y^3 + D_2 Y^2 + D_1 Y + D_0$$

ove si ha:

$$C_3 = -a_7;$$

$$C_2 = a_5 - a_4 X;$$

$$C_1 = a_1 - a_2 X + a_4 Z - a_6 XZ - a_3 X^2;$$

$$C_0 = a_2 Z + a_3 XZ + a_6 Z^2 - a_5 X^2 Z + a_7 XZ^2 - a_1 X^3;$$

$$D_4 = -(b_{16} + b_{15});$$

$$D_3 = b_{14} - (b_{17} + b_{11})X + b_{18}Z;$$

$$D_2 = b_6 + b_{10}X + b_{11}Z - b_{13}XZ - (b_8 + b_7)X^2;$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= b_1 + b_3 X + b_5 Z + b_8 XZ - b_4 X^2 + b_{13} Z^2 + \\
 &\quad + b_{16} XZ^2 - (b_{14} + b_{12}) X^2 Z - (b_9 + b_6) X^3 ; \\
 D_0 &= b_2 Z + b_4 XZ + b_7 Z^2 + b_9 X^2 Z + b_{12} XZ^2 - b_1 X^3 + b_{15} Z^3 + \\
 &\quad + b_{17} X^2 Z^2 - (b_{10} + b_5) X^3 Z - b_{18} XZ^3 - (b_2 + b_3) X^4 .
 \end{aligned}$$

Ora supponiamo che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathcal{C}$ e deduciamone un assurdo, col che la prima parte della proposizione risulterà provata.

Riferendoci alle equazioni (1) e (2) di \mathcal{F} e \mathcal{G} cominciamo con l'osservare che dovrà essere

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_6 & a_7 \\ b_{15} & -b_{18} \end{vmatrix} = 0 .$$

La (5) è evidente se $Z_\infty(0, 0, 1, 0) \in \mathcal{C}$ è doppio per $\tilde{\mathcal{F}}$ o $\tilde{\mathcal{G}}$; se è semplice per entrambe, essendo anche $\tilde{\mathcal{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 3\mathcal{C}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ devono avere lo stesso piano tangente in Z_∞ . Poichè i piani tangenti in Z_∞ ad $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ sono rispettivamente quelli di equazioni omogenee $a_6 X_4 + a_7 X = 0$, e $b_{15} X_4 - b_{18} X = 0$, la (5) ne segue ancora.

Supponiamo allora che Z_∞ sia punto doppio per $\tilde{\mathcal{F}}$ e cioè che

$$\boxed{a_6 = a_7 = 0} .$$

Poichè, se $a_7 = 0$, la forma di grado massimo di F è

$$X(-a_6 YZ - a_5 XZ - a_3 XY - a_4 Y^2 - a_1 X^2) ,$$

ciò comporta che $\tilde{\mathcal{F}} \cap \{X_4 = 0\} \supset \{\widetilde{X = 0}\} \cap \{X_4 = 0\}$; quindi si ha che $\tilde{\mathcal{G}} \not\equiv Y_\infty \in \tilde{\mathcal{F}}$ perchè $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \cap \{X_4 = 0\} = \{Z_\infty\}$. $Y_\infty \notin \tilde{\mathcal{G}}$ implica che $D_4 = -(b_{16} + b_{15}) \neq 0$. D'altra parte dalla $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathcal{C}$ discende in particolare che \mathcal{F} e \mathcal{G} hanno in ogni loro punto $P \in \mathcal{C}$, semplice per entrambe, lo stesso piano tangente: questo comporta in particolare

$$(6) \quad \begin{vmatrix} F_x(t, t^3, t^4) & G_x(t, t^3, t^4) \\ F_r(t, t^3, t^4) & G_r(t, t^3, t^4) \end{vmatrix} = 0 .$$

Da (6) discende subito che $b_{18} = 0$ o F sarebbe di nuovo il polinomio

nullo. Per brevità il determinante in (6) sarà indicato con $D(t)$. Se fosse allora $a_4 \neq 0$ si troverebbe

$$0 = D(t) = 4a_4(b_{16} + b_{15})t^{15} + H_1(t)$$

ove $H_1(t)$, se non è nullo, è un polinomio di grado inferiore a 15: assurdo. Quindi

$$\boxed{a_4 = 0}.$$

Ora, poichè $Y_\infty \notin \mathfrak{G}$ e $\mathcal{F} \cdot \mathfrak{G} = 3\mathcal{C}$, il risultante di F e G rispetto a Y , che denoteremo con $\text{Res}_Y(F, G)$, deve coincidere, a meno di una costante $c \in k - \{0\}$, con una potenza di $Z - X^4$, primo membro dell'equazione di Γ , cilindro proiettante \mathcal{C} da Y_∞ . D'altra parte è noto che esistono opportuni polinomi A e B tali che

$$(7) \quad \text{Res}_Y(F, G) = AF + BG = c(Z - X^4)^r,$$

$$(A, B \in k[X, Y, Z]; c \in k - \{0\}).$$

Passando alle proiezioni canoniche nell'anello locale \mathfrak{R} di \mathcal{F} in \mathcal{C} , la (7) dà luogo alla

$$(8) \quad \bar{B}\bar{G} = c(\bar{Z} - \bar{X}^4)^r.$$

Valutando secondo $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ entrambi i membri di (8) e ricordando quanto sopra detto per $u = \bar{Z} - \bar{X}^4$, cioè che u è un parametro uniformizzante per \mathfrak{R} , si trova che

$$3 \leq \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(\bar{B}) + \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(\bar{G}) = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(c) + \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(u^r) = 0 + r = r.$$

Non è d'altro canto difficile rendersi conto col calcolo diretto che il polinomio $\text{Res}_Y(F, G)$ non può in nessun caso avere un grado > 12 e pertanto si conclude che $r = 3$.

Supponiamo ora che $a_5 \neq 0$. Posto $\text{Res}_Y(F, G) = R(X, Z)$, calcolando $R(0, Z)$ si trova, tenuto conto di (8),

$$R(0, Z) = b_{15}^2 a_5^4 Z^6 + \Phi_1$$

ove Φ_1 , se non è nullo, è un polinomio in Z di grado minore di 6: si ha dunque $b_{15} = 0$. Ora, dalla (6) si trova

$$0 = D(t) = 4a_5 b_{16} t^{14} + H_2(t)$$

ove $H_2(t)$, se non è nullo, è un polinomio in t di grado minore di 14: perciò $b_{16} = 0$. Ma allora $D_4 = -(b_{16} + b_{15}) = 0$, contro quanto sopra riconosciuto. Si conclude che l'ipotesi $a_5 \neq 0$ è impossibile. È quindi

$$\boxed{a_5 = 0}.$$

Dalla (6) troviamo allora

$$0 = D(t) = 4a_3(b_{16} + b_{15})t^{13} + 4a_2(b_{16} + b_{15})t^{12} + H_3(t)$$

dove $H_3(t)$, se non è nullo, è un polinomio di grado minore di 12. Ne segue

$$\boxed{a_2 = a_3 = 0}.$$

A questo punto è $\mathcal{F}: F = a_1(Y - X^3) = 0$ con $a_1 \in k - \{0\}$. Si ha allora

$$\text{Res}_Z(F, G) = dG(X, X^3, Z) = c(Z - X^4)^3, \quad d \in k - \{0\}.$$

Come si può subito vedere però, $G(X, X^3, Z)$ ha il coefficiente di X^8Z che è nullo, mentre $(Z - X^4)^3$, se la caratteristica è $p \neq 3$, ha codesto coefficiente non nullo. Questa contraddizione riduce all'assurdo l'ipotesi che $\tilde{\mathcal{F}}$ abbia Z_∞ come punto doppio.

Passiamo allora a considerare il caso in cui Z_∞ è punto semplice per $\tilde{\mathcal{F}}$ e quindi (cfr. (1)) $(a_6, a_7) \neq (0, 0)$. Per la (5) è allora

$$(b_{15}, -b_{18}) = (\rho a_6, \rho a_7) \quad \text{con } \rho \in k.$$

Sia allora $\mathcal{G}': G' = G - \rho ZF = 0$. Il divisore definito su \mathcal{F} dal polinomio G' è ancora $3\mathcal{C}$. Questo significa che \mathcal{G}' è una superficie irriducibile del quarto ordine, che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}' = 3\mathcal{C}$ e che $\tilde{\mathcal{G}}'$, come si deduce subito da (2) e dalla definizione di G' , ha un punto almeno doppio

in Z_∞ . Per comodità notativa indicheremo la nuova quartica ancora con \mathfrak{G} , la sua equazione essendo la (2), dove attualmente si ha

$$\boxed{b_{15} = b_{18} = 0}.$$

Supponiamo ora che sia $a_7 = 0$, e dunque $a_6 \neq 0$. Come in precedenza si conclude allora che $\tilde{\mathcal{F}} \supset \widetilde{\{X = 0\}} \cap \{X_4 = 0\} \ni Y_\infty$, donde $\tilde{\mathfrak{G}} \not\equiv Y_\infty$ e quindi $b_{16} \neq 0$. Troviamo, nelle ipotesi attuali, e sussistendo sempre la (6),

$$(10) \quad 0 = D(t) = 4a_6 b_{16} t^{16} + H_3(t)$$

ove $H_3(t)$, se non è nullo, è un polinomio in t di grado minore di 16. Ma la (10) è assurda, essendo attualmente $4a_6 b_{16} \neq 0$. Dunque si ha

$$\boxed{a_7 \neq 0}.$$

In tale situazione $Y_\infty \notin \tilde{\mathcal{F}}$: con considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza, si conclude che anche ora il $\text{Res}_Y(F, G)$ deve coincidere a meno di una costante non nulla $c \in k$ con il polinomio $(Z - X^4)^3$. Si consideri allora la superficie

$$\mathfrak{G}' : G'' = G + \frac{1}{a_7} [b_{14} - (b_{17} + b_{11})X - b_{16}Y]F = 0.$$

Il divisore definito su \mathcal{F} dal polinomio G'' è ancora $3\mathcal{C}$, dunque \mathfrak{G}' è una superficie quartica irriducibile, con $\mathcal{F} \cdot \mathfrak{G}' = 3\mathcal{C}$; $\tilde{\mathfrak{G}}'$ ha inoltre un punto almeno doppio in Z_∞ e un altro punto almeno doppio in Y_∞ . Procediamo come sopra e chiamiamo \mathfrak{G}'' ancora \mathfrak{G} : la sua equazione sia ancora la (2), o la (4), ove si ha attualmente

$$\boxed{b_{15} = b_{18} = b_{16} = b_{14} = b_{17} + b_{11} = 0}.$$

In tale situazione la (6) fornisce

$$(11) \quad 0 = D(t) = (-4a_7 b_{13}) t^{16} + (-4a_{711}) t^{15} + \\ + (-4a_7 b_{12} + 4a_6 b_{17}) t^{14} + [-4a_7 (b_8 + 2b_7) + 4(a_4 b_{17} + a_5 b_{13})] t^{13} + H_4(t)$$

ove $H_4(t)$, se non è nullo, ha grado inferiore a 13. Dalla (11) si ricava

$$\boxed{b_{11} = b_{13} = 0}$$

e, dalla $b_{17} + b_{11} = 0$, deduciamo anche

$$\boxed{b_{17} = 0} ;$$

dalla (11), ora, si trae

$$\boxed{b_{12} = b_8 + 2b_7 = 0} .$$

Supponiamo, a questo punto, che sia $b_8 + b_7 \neq 0$, quindi (cfr. (4)) $D_2 \neq 0$.

L'equazione di \mathcal{G} risulta dunque attualmente di grado 2 rispetto a Y , mentre quella di \mathcal{F} è di grado 3. La matrice risultante di F e G rispetto a Y è ora una matrice 5×5 e il suo determinante, $\text{Res}_Y(F, G)$, deve essere, come visto in precedenza, $(Z - X^4)^3$ a meno di una costante non nulla di k , che chiameremo ancora c : posto ancora $\text{Res}_Y(F, G) = R(X, Z)$, calcolando si trova

$$(12) \quad R(0, Z) = c(Z - 0^4)^3 = cZ^3 = a_7^2 b_7^2 Z^6 + \Phi_2$$

ove Φ_2 è un polinomio in Z che, se non è nullo, ha ordine minore di 6. Dalla (12) si trae $b_7 = 0$. Dalla $b_8 + 2b_7 = 0$ si deduce allora che $b_8 = 0$. Dunque si conclude che $b_8 + b_7 = 0$, contro l'assunto iniziale. Questa contraddizione prova che $b_8 + b_7 = 0$. Questa eguaglianza, assieme alla $b_8 + 2b_7 = 0$, dedotta in precedenza, implica

$$\boxed{b_7 = b_8 = 0} .$$

Supponiamo ora che sia $(b_{10}, b_6) \neq (0, 0)$.

Calcolando $\text{Res}_Y(F, G)$ si trova

$$(13) \quad \begin{aligned} \text{Res}_Y(F, G) &= \\ &= \alpha X^{12} + \beta X^{11} Z + \gamma X^{10} Z^2 + \delta X^9 Z^3 + \Psi = c(Z - X^4)^3 \end{aligned}$$

ove si ha

$$\alpha = a_1 a_7 (b_9 + b_6)^3 + a_4 a_7 (b_2 + b_3)^2 (b_9 + b_6) - \\ - a_7^2 (b_2 + b_3)^3 - a_3 a_7 (b_2 + b_3) (b_9 + b_6)^2 ;$$

$$\beta = a_7 a_5 (b_9 + b_6)^3 + 2 a_7 a_4 (b_{10} + b_5) (b_9 + b_6) (b_2 + b_3) - \\ - 3 a_7^2 (b_{10} + b_5) (b_2 + b_3)^2 - a_7 a_6 (b_2 + b_3) (b_9 + b_6)^2 - a_7 a_3 (b_{10} + b_5) (b_9 + b_6)^2 ;$$

$$\gamma = - a_7^2 (b_9 + b_6)^3 + a_4 a_7 (b_{10} + b_5)^2 (b_9 + b_6) - \\ - 3 a_7^2 (b_{10} + b_5)^2 (b_2 + b_3) - a_7 a_6 (b_{10} + b_5) (b_9 + b_6)^2 ;$$

$$\delta = - a_7^2 (b_{10} + b_5)^3 ;$$

e \mathcal{Y} è un polinomio di $k[X, Z]$ che non contiene alcun monomio a coefficiente non nullo in X^{12} , $X^{11}Z$, $X^{10}Z^2$, X^9Z^3 . Dalla (13), poichè il polinomio $c(Z - X^4)^3$ ha i coefficienti di X^9Z^3 e $X^{10}Z^2$ nulli, si deduce allora che $\gamma = \delta = 0$. Ma

$$\{\delta = 0\} \Rightarrow \{b_{10} + b_5 = 0\} \Rightarrow \{-a_7^2(b_9 + b_6) = \gamma = 0\} \Rightarrow \{b_9 + b_6 = 0\}.$$

Dalla (6) si trae quindi

$$(14) \quad 0 = D(t) = -4a_7(b_{10} + 2b_5)t^{12} - \\ - 4[a_7(b_9 + 2b_6) + a_6(b_5 + b_{10})]t^{11} + H_5(t)$$

ove $H_5(t)$ è un polinomio che, se non è nullo, ha ordine minore di 11.

Dalla (14) segue che $b_{10} + 2b_5 = 0$ che, assieme alla $b_{10} + b_5 = 0$, implica

$$b_5 = b_{10} = 0.$$

Dalla (14) segue ora $b_9 + 2b_6 = 0$ che, assieme alla $b_9 + b_6 = 0$, implica

$$b_6 = b_9 = 0.$$

In particolare si è ottenuto che

$$(b_{10}, b_6) = (0, 0)$$

che è una contraddizione rispetto all'ipotesi di partenza $(b_{10}, b_8) \neq (0,0)$. Questa è dunque impossibile e dunque necessariamente si ha

$$\boxed{b_8 = b_{10} = 0} .$$

Torniamo ora alla (6): tenendo presente l'attuale situazione si trova, calcolando,

$$(15) \quad 0 = D(t) = -8a_7b_5t^{12} - 4(a_7b_9 + a_6b_5)t^{11} - \\ - 4(a_7b_4 + a_4b_5)t^{10} + H_6(t)$$

ove $H_6(t)$ è un polinomio in t che, se non è nullo, ha grado minore di 10. Dalla (15) si ricava che

$$\boxed{b_5 = b_9 = b_4 = 0} .$$

Supponiamo ora che sia $(b_1, b_3) \neq (0, 0)$. $\text{Res}_Y(F, G)$ è ora il determinante di una matrice 4×4 e, calcolando, si trova

$$(16) \quad \text{Res}_Y(F, G) = \\ = -a_7(b_2 + b_3)^3 X^{12} - 3a_7b_1(b_2 + b_3)^2 X^{11} + \Phi_3 = c(Z - X^4)^3$$

ove Φ_3 è un polinomio in X e Z che non contiene alcun monomio a coefficiente non nullo in X^{12} e X^{11} . Dalla (16) si deduce che deve essere

$$b_2 + b_3 \neq 0$$

e quindi che

$$b_1 = 0 ;$$

allora $b_3 \neq 0$. Calcolando di nuovo ora $\text{Res}_Y(F, G)$ troviamo

$$(17) \quad \text{Res}_Y(F, G) = -a_7(b_2 + b_3)^3 X^{12} - b_3a_4(b_2 + b_3)^2 X^{10} + \\ + b_3a_5(b_2 + b_3)^2 X^9 + \Phi_4 = c(Z - X^4)^3 ,$$

ove Φ_4 è un polinomio in X e Z che non contiene alcun monomio a coefficiente non nullo in X^{12} , X^{10} e X^9 . Da (17) segue dunque

$$a_4 = a_5 = 0.$$

Ricalcolando ancora $\text{Res}_Y(F, G)$ tenendo conto di queste ultime eguaglianze troviamo

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{Res}_Y(F, G) = & -a_7(b_2 + b_3)^3 X^{12} + \\ & + 3a_7 b_2 (b_2 + b_3)^2 X^8 Z - b_3^2 a_3 (b_2 + b_3) X^8 - \\ & - b_3^2 a_6 (b_2 + b_3) X^7 Z - b_3^2 a_2 (b_2 + b_3) X^7 + \Phi_5 = c(X - Z^4)^3 \end{aligned}$$

ove Φ_5 è un polinomio che, se non è nullo, ha grado minore di 7. Da (18) discende allora che

$$a_2 = a_3 = a_6 = 0$$

mentre deve essere $b_2 \neq 0$.

Una verifica diretta fa riconoscere che in $\text{Res}_Y(F, G)$ il coefficiente di $X^2 Z$ è uguale a $-b_3^2 b_2 a_1$. Poichè b_2 e b_3 sono diversi da 0, attualmente, si dovrà avere anche

$$a_1 = 0.$$

Calcoliamo infine ancora una volta $\text{Res}_Y(F, G)$: troviamo

$$(19) \quad \begin{aligned} \text{Res}_Y(F, G) = & \\ = a_7 [& b_2^3 Z^3 + (b_3^3 - 3b_2^3 - 3b_2^2 b_3) X^4 Z^2 + 3b_2 (b_2^2 + 2b_2 b_3 + b_3^2) X^8 Z - \\ & - (b_2 + b_3)^3 X^{12}] = c(Z - X^4)^3 = c(Z^3 - 3X^4 Z^2 + 3X^8 Z - X^{12}). \end{aligned}$$

Da (19) segue che deve essere

$$\text{rango} \begin{vmatrix} b_2^3 & b_3^3 - 3b_2^3 - 3b_2^2 b_3 & 3b_2 (b_2^2 + 2b_2 b_3 + b_3^2) & -(b_2 + b_3)^3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Quest'ultima condizione implica in particolare

$$0 = \begin{vmatrix} b_2^3 & 3b_2 (b_2^2 + 2b_2 b_3 + b_3^2) \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3b_2 b_3 (2b_2 + b_3) = 0;$$

essendo nelle attuali ipotesi, $b_2 b_3 \neq 0$ ciò implica $2b_2 + b_3 = 0$. Ora consideriamo che, dalla (6), si ottiene

$$(20) \quad 0 = D(t) = -4a_7(2b_3 + 3b_2)t^9 + H_7(t)$$

ove H_7 è un polinomio in t che, se non è nullo, ha un grado inferiore a 9. Da (20) si trae $2b_3 + 3b_2 = 0$ che, assieme alla $2b_2 + b_3 = 0$, implica, in particolare, $b_2 = 0$ e ciò è in contrasto con quanto stabilito più sopra. Dunque l'ipotesi $(b_1, b_3) \neq (0, 0)$ è assurda. Nel polinomio G si ha dunque necessariamente

$$\boxed{b_1 = b_3 = 0} .$$

Dalla (6) si deduce allora

$$(21) \quad 0 = D(t) = -12a_7 b_2 t^9$$

il che implica

$$\boxed{b_2 = 0} ;$$

ma con ciò G sarebbe il polinomio nullo. Questa conclusione assurda mostra che l'ipotesi iniziale $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathcal{C}$ non può essere vera e termina così la prova della prima parte dell'enunciato.

Quanto alla seconda, si osservi che $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_1$, che $\mathcal{C} \in \mathcal{G}_1$ e che $\tilde{\mathcal{F}}_1$ e $\tilde{\mathcal{G}}_1$ hanno in comune, sul piano $X_4 = 0$, soltanto il punto $Z_\infty (\in \tilde{\mathcal{C}})$; ora, se (x', y', z') è un punto di \mathbb{A}_k^3 comune ad \mathcal{F}_1 e \mathcal{G}_1 , risulta $y' = x'^3$ e $y'^4 = (x'^3)^4 = x'^{12} = z'^3$; essendo la caratteristica di k $p = 3$, ne deriva che $x'^{12} - z'^3 = (x'^4 - z')^3 = 0$, cioè $z' = x'^4$. Il punto (x', y', z') è dunque il punto $(x', x'^3, x'^4) \in \mathcal{C}$. Con ciò è provato che $\tilde{\mathcal{F}}_1 \cap \tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathcal{C}}$ e, per il teorema di Bézout, che $\tilde{\mathcal{F}}_1 \cdot \tilde{\mathcal{G}}_1 = 3\tilde{\mathcal{C}}$ e che, naturalmente, anche $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{G}_1 = 3\mathcal{C}$.

OSSEVAZIONE. R. Hartshorne in [3] ha dimostrato, in particolare, che la quartica razionale $\tilde{\mathcal{C}}$ di cui qui si tratta, è sottoinsieme intersezione completa di due superficie $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ in caratteristica p , qualunque sia $p > 0$. Gli ordini di $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$, però, dipendono da p e sono

in ogni caso entrambi > 4 . Inoltre che in caratteristica 3 \mathcal{C} fosse sottoinsieme intersezione completa di una cubica e di una quartica era noto: cfr. [4].

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. GODEAUX, *Sur le contact de surfaces le long de courbes*, Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège, 2, pp. 46-58.
- [2] D. GALLARATI, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Genova, N. 88.
- [3] R. HARTSHORNE, *Complete intersections in characteristic p* , American J. Math., **101** (1979), pp. 380-383.
- [4] E. STAGNARO, *Su quintiche di Vahlen ed altre curve razionali che sono sottoinsieme intersezione completa di P_k^3 in caratteristica positiva*, Bollettino dell'Unione matematica italiana, (5) **17-B** (1980), pp. 278-285.
- [5] K. KENDIG, *Elementary Algebraic Geometry*, Springer Verlag.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 novembre 1980.