RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

# Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 65 (1981), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__163_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 65 (1981)

# Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles.

Gabriele H. Greco (*)

## Introduction.

Dans cette introduction et dans la suite on désignera par les symboles $X$, $\mathcal{P}(X)$, $[0, +\infty]^X$, $\overline{\mathbb{R}}^X$, N respectivement un ensemble non vide, la classe des sousensembles de $X$, la classe des fonctions définies dans $X$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, la classe des fonctions définies dans $X$ à valeurs dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble des nombres entiers $n > 0$. En suivant les notations établies par P. A. Meyer in [5], on appellera *pavage* sur $X$ toute famille d'ensembles $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ qui contient l'ensemble vide; on appellera *ensemble pavé* le couple $(X, \mathcal{E})$ constitué par un ensemble $X$ et un pavage $\mathcal{E}$ sur $X$; la phrase « $\mathcal{E}$ est stable pour $(\cup f, \cap d)$ » (et de même les phrases analogues) signifie que $\mathcal{E}$ est stable pour réunions finies et pour intersections dénombrables. On emploiera en outre les lettres de l'alphabet grec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ pour désigner des fonctions d'ensemble monotones, c'est-à-dire des fonctions définies dans $\mathcal{P}(X)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que $\alpha(\emptyset) = 0$ et $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$ si $A \subset B$. Par $\int_X f\, d\alpha$ on désignera le nombre réel fini ou non, appelé *intégrale de $f$ sur $X$ par rapport à la fonction d'ensemble monotone $\alpha$*, défini par la position $\int_X f\, d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}\, dt$ si $f \in [0, +\infty]^X$, et par la position $\int_X f\, d\alpha = \int_X f^+\, d\alpha - \int_X f^-\, d\alpha$ si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento).

et si $\int_X f^+ d\alpha < +\infty$ ou $\int_X f^- d\alpha < +\infty$; si $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose $\int_A f\, d\alpha = \int_X f\varphi_A\, d\alpha$, où $\varphi_A$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $A$. Ces intégrales ont été étudiées indépendamment dans [1] et dans [3]; pour leurs propriétés on fera référence à [3]. Si $\mathcal{F}$ est un filtre de $\mathcal{P}(X)$ on désignerà par $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ les fonctions d'ensemble ainsi définies: « $\alpha_{\mathcal{F}}(A) = 1$ si et seulement si $A \in \mathcal{F}$ » et « $\beta_{\mathcal{F}}(A) = 1$ si et seulement si $A \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ »; pour tout filtre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ et pour toute $f \in [0, +\infty]^X$ il résulte $\int_X f\, d\alpha_{\mathcal{F}} = \operatorname{minlim}_{\mathcal{F}} f$ et $\int_X f\, d\beta_{\mathcal{F}} = \operatorname{maxlim}_{\mathcal{F}} f$ (voir exemple 3° dans [3]). On pose $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$ et $\inf \emptyset = +\infty$. Si $(X, \mathcal{E})$ est un ensemble pavé, on désignera par $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$ la classe des fonctions $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{H_i}$, où $a_i \in [0, +\infty]$, $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $H_i \supset H_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Dans cet article on propose et on étudie une définition de mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ qui répond à cette exigence: « déterminer les fonctions numériques $f$ telles que l'intégrale $\int_X f\, d\alpha$ dépend seulement des valeurs de $\alpha$ sur $\mathcal{E}$, quelle que soit la fonction d'ensemble monotone $\alpha$: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ »; c'est-à-dire on dit qu'une fonction $f \in [0, +\infty]^X$ est $\mathcal{E}$-mesurable si on a toujours $\int_X f\, d\alpha = \int_X f\, d\beta$, lorsque les fonctions d'ensemble monotones $\alpha$, $\beta$ sont telles que $\alpha(H) = \beta(H)$ pour tout $H \in \mathcal{E}$. La fonction $f$ est alors $\mathcal{E}$-mesurable si et seulement si pour chaque couple $a, b \in (0, +\infty)$ avec $a > b$, il existe un ensemble $H \in \mathcal{E}$ tel que $\{f \geqslant a\} \subset H \subset \{f > b\}$ (voir Th. 1). Cette définition permet d'associer à chaque ensemble pavé $(X, \mathcal{E})$ la classe $\mathcal{M}(X, \mathcal{E})$ des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables, qui peut être la classe bien connue des fonctions mesurables par rapport à une $\sigma$-algèbre (si $\mathcal{E}$ est une $\sigma$-algèbre), la classe des fonctions dépourvues de discontinuités oscillatoires (si $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}$ est l'algèbre d'ensembles engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$; voir Remarque 2), la classe des fonctions continues (si $X$ est un espace topologique de Hausdorff compact et totalement discontinu et si $\mathcal{E}$ est l'algèbre des ensembles qui sont ouverts et fermés), la classe des fonctions qui sont presque partout continues (si $X = [0, 1]$ et $\mathcal{E}$ est l'algèbre des ensembles qui sont Jordan-Peano mesurables), la classe des fonctions $\alpha$-mesurables au sens de Carathéodory par rapport à une fonction d'ensemble $\alpha$ (si $\mathcal{E}$ est l'algèbre des ensembles $\alpha$-mesurables au sens de Carathéodory; voir Remarque 5); dans le cas où $\mathcal{E}$ est une algèbre, il résulte qu'une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est $\mathcal{E}$-mesurable si et seulement si $f$ se prolonge par continuitè à l'espace de Stone, associé a l'algèbre $\mathcal{E}$.

Dans cet article on remarque en outre des analogies entre les espaces topologiques pseudocompacts et les ensembles pavés semicompacts (voir s. 2), entre les espaces topologiques normaux et les ensembles sur lesquels il y a deux bons pavages (voir s. 3).

## 1. Fonctions $\mathcal{E}$-mesurables.

*Soit* $(X, \mathcal{E})$ *un ensemble pavé. On dit qu'une fonction* $f \in [0, +\infty]^X$ *est* $\mathcal{E}$-*mesurable si on a toujours* $\int\limits_X f\, d\alpha = \int\limits_X f\, d\beta$, *dans les cas où* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont des fonctions d'ensemble monotones telles que* $\alpha(H) = \beta(H)$ *pour tout* $H \in \mathcal{E}$. *On dit en outre que* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *est* $\mathcal{E}$-*mesurable si* $f^+$ *et* $f^-$ *sont* $\mathcal{E}$-*mesurables.*

On désignera par $\mathcal{M}(X, \mathcal{E})$ la classe des fonctions $f \in \mathbb{R}^X$ qui sont $\mathcal{E}$-mesurables et on pose $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{E}) = \mathcal{M}(X, \mathcal{E}) \cap [0, +\infty]^X$.

Les plus simples fonctions $\mathcal{E}$-mesurables sont les fonctions qui appartiennent à $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$; en effet si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty]$; $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $H_{i+1} \subset H_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\int\limits_X \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{H_i}\right) d\alpha = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \alpha(H_i)$ quelle que soit la fonction d'ensemble monotone $\alpha$.

Lemme 1. *Soit* $(X, \mathcal{E})$ *un ensemble pavé et* $f \in [0, +\infty]^X$. *Les conditions suivantes sont equivalentes:*

i) $f$ *est* $\mathcal{E}$-*mesurable,*

ii) *pour chaque couple* $\alpha, \beta$: $\mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ *de fonctions d'ensemble monotones telles que* $\alpha(H) = \beta(H)$ *pour tout* $H \in \mathcal{E}$, *on a*

$$\int\limits_X f\, d\alpha = \int\limits_X f\, d\beta\,.$$

Démonstration. i) $\Rightarrow$ ii): la condition ii) est un cas particulier de la condition i). ii) $\Rightarrow$ i): posons d'abord, pour toute fonction d'ensemble monotone $\alpha$: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ et pour tout $s \in (0, +\infty)$ et $H \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha_s(H) = 1$ ou $0$ si on a respectivement $\alpha(H) > s$ ou $\alpha(H) \leqslant s$. Si $\alpha, \beta$: $\mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ sont deux fonctions d'ensemble monotones telles que $\alpha(H) = \beta(H)$ pour tout $H \in \mathcal{E}$, on a aussi $\alpha_s(H) = \beta_s(H)$

pour tout $s \in (0, +\infty)$. D'après ii), on a donc $\int_X f\,d\alpha_s = \int_X f\,d\beta_s$ pour tout $s \in (0, +\infty)$. On en déduit alors que

$$\int_X f d\alpha = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_X f d\alpha_{i/2^n} = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_X f d\beta_{i/2^n} = \int_X f d\beta .$$

LEMME 2. *Soit* $(X, \mathcal{E})$ *un ensemble pavé. Si la fonction* $f \in [0, +\infty]^X$ *est* $\mathcal{E}$*-mesurable, alors les fonctions* $af$, $f \wedge a$, $f \vee a - a$ *sont aussi* $\mathcal{E}$*-mesurables pour tout* $a \in [0, +\infty)$.

DÉMONSTRATION. Pour toute fonction d'ensemble monotone $\alpha$ définie dans $\mathcal{P}(X)$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ il resulte que

$$\int_X (f \wedge a)\, d\alpha = \Big(\int_X f\, d\alpha\Big) \wedge a \qquad \text{et} \qquad \int_X (f \vee a - a)\, d\alpha = \Big(\int_X f\, d\alpha\Big) \vee a - a$$

pour tout $a \in [0, +\infty)$ et $f \in [0, +\infty]^X$. On en déduit donc le Lemme 2, d'après le Lemme 1. ∎

THÉORÈME 1. *Soit* $(X, \mathcal{E})$ *un ensemble pavé et* $f \in [0, +\infty]^X$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) $f$ *est* $\mathcal{E}$*-mesurable*,

ii) *pour chaque couple* $a, b \in (0, +\infty)$ *tel que* $a > b$, *il existe un ensemble* $H \in \mathcal{E}$ *tel que* $\{f \geqslant a\} \subset H \subset \{f > b\}$,

iii) *il existe une suite* $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$ *telle que* $g_n \leqslant f$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et la suite* $\{g_n \wedge a\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $f \wedge a$ *pour tout* $a \in (0, +\infty)$.

DÉMONSTRATION. i) $\Rightarrow$ ii): raisonnons par absurde. Si $f$ ne vérifie pas la condition ii), il existe deux nombres réels $a, b \in (0, +\infty)$ avec $a > b$ tels que

(1) $$\nexists H \in \mathcal{E} \quad \text{tel que } \{f \geqslant a\} \subset H \subset \{f > b\} .$$

Définissons alors les deux fonctions d'ensemble $\tau_1, \tau_2 \colon \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ par les positions

$$\tau_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = X \\ \sup \{g(x) : x \notin A\} & \text{si } A \neq X \end{cases}$$

et

$$\tau_2(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = \emptyset \\ \inf\{g(x) : x \in A\} & \text{si } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

où $g = (f\wedge a - f\wedge b)/(a-b)$. D'après cette définition de $\tau_1$, $\tau_2$, en vertu de (1) il résulte que

(2) $\tau_1(\emptyset) = \tau_2(\emptyset) = 1$ et les fonctions $\tau_1$, $\tau_2$ sont décroissantes;

(3) $\tau_1(H) < t$ et $\tau_2(H) = 0$, si $H \in \mathcal{E}$, $H \subset \{g > t\}$ et $t \in (0, 1)$;

(4) $\tau_1(H) = 1$ et $\tau_2(H) > t$, si $H \in \mathcal{E}$, $H \subset \{g > t\}$ et $t \in (0, 1)$.

Or les deux fonctions d'ensemble monotones $\alpha, \beta\colon \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$, ainsi définies

$$\alpha(A) = \sup\{2 - \tau_1(H) - \tau_2(H)\colon H \in \mathcal{E} \text{ et } H \subset A\},$$

$$\beta(A) = \inf\{2 - \tau_1(H) - \tau_2(H)\colon H \in \mathcal{E} \text{ et } H \supset A\},$$

sont donc égales sur $\mathcal{E}$ et $\beta \geqslant \alpha$, d'après (2). En outre on a $\beta\{g > t\} > > 1 > \alpha\{g > t\}$ pour tout $t \in (0, 1)$, d'après (3) et (4); ceci prouve que $\int_X g\,d\beta > \int_X g\,d\alpha$, c'est-à-dire la fonction $g = (f\wedge a - f\wedge b)/(a-b)$ n'est pas $\mathcal{E}$-mesurable, d'après la définition de $\mathcal{E}$-mesurabilité. Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $f$ soit $\mathcal{E}$-mesurable; en effet de la $\mathcal{E}$ mesurabilité de $f$ on doit déduire que $g$ doit être $\mathcal{E}$-mesurable, d'après le Lemme 2. On achève ainsi la démonstration de i) $\Rightarrow$ ii).

ii) $\Rightarrow$ iii): si $f \in [0, +\infty]^X$ vérifie la condition ii), pour tout $i, n \in \mathbf{N}$ il existe un ensemble $H_{i,n} \in \mathcal{E}$ tel que

$$\left\{f \geqslant \frac{i+1}{2^n}\right\} \subset H_{i,n} \subset \left\{f > \frac{i}{2^n}\right\} \quad \text{et} \quad H_{i+1,n} \subset H_{i,n}.$$

On a alors

$$f \geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{H_{i,n}} \geqslant f \vee \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, où $g_n = 1/2^n \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{H_{i,n}}$, vérifie la condition iii).

iii) $\Rightarrow$i): la $\mathcal{E}$-mesurabilité de toute $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$ et les propriétés de l'intégrale $\int_X - d\alpha$ (voir [3], Prop. 1) entraînent la $\mathcal{E}$-mesurabilitè de $f$. ■

REMARQUE 1. Soit $(X, \mathcal{E})$ un ensemble pavé, soit $\delta$: $\mathcal{E} \to [0, +\infty]$ une fonction d'ensemble telle que $\delta(\emptyset) = 0$ et $\delta(A) \leqslant \delta(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ avec $A \subset B$. Le théorème précédent permet de définir de façon satisfaisante l'intégrale $\int_X - d\delta$; on la définit en posant $\int_X f\, d\delta = \int_X f\, d\alpha$, où $\alpha$: $\mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ est une fonction d'ensemble monotone telle que $\alpha(H) = \delta(H)$ pour tout $H \in \mathcal{E}$, lorsque $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{E})$ et $\int_X f^+\, d\alpha < +\infty$ ou $\int_X f^-\, d\alpha < +\infty$. D'après cette définition d'intégrale on peut analyser des propriétés de $\delta$ au moyen des propriétés de $\int_X - d\delta$. Par example soit $(X, \mathcal{E})$ un ensemble pavé stable pour $(\cap f, \cup f)$; on verra dans la Proposition 2 que la famille des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ est un cône convexe de fonctions stable pour $(\wedge f, \vee f)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) $\delta(A \cap B) + \delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B), \ \forall A, B \in \mathcal{E}$,

ii) $\int_X (f + g)\, d\delta = \int_X f\, d\delta + \int_X g\, d\delta, \ \forall f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$,

iii) $\int_X (f \wedge g)\, d\delta + \int_X (f \vee g)\, d\delta = \int_X f\, d\delta + \int_X g\, d\delta, \ \forall f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$.

Si dans i), ii) et iii) on change « $=$ » avec « $\leqslant$ » ou « $\geqslant$ », on obtient encore l'équivalence de i), ii) et iii) (voir [4]).

## 2. Propriétés des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables.

D'après la définition de $\mathcal{E}$-mesurabilité et la propriété ii) du Théorème 1 on obtient ces propositions sur les propriétés des fonctions mesurables.

PROPOSITION 1. *Soit* $(X, \mathcal{E})$ *un ensemble pavé et* $\psi$: $[0, +\infty] \to [0, +\infty]$ *une fonction continue et croissante. On a*

i) *si* $\psi(0) = 0$, $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$, *alors* $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ (*on remarque qu'on peut effacer l'égalité* $\psi(0) = 0$ *si* $X \in \mathcal{E}$);

ii) *si la suite* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ *converge uniformément vers* $f$, *alors* $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$. ■

PROPOSITION 2. *Soit* $(X, \mathcal{E})$ *un ensemble pavé. Alors*

i) *pour que* $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ *soit stable pour* $(\wedge f)$ (*resp. pour* $(\vee f)$) *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}$ *soit stable pour* $(\cap f)$ (*resp. pour* $(\cup f)$);

ii) *pour que* $f + g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ *pour toute* $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \in)$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}$ *soit stable pour* $(\cap f, \cup f)$;

iii) *pour que* $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ *soit stable pour* $(\wedge d)$ (*resp. pour* $(\vee d)$), *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}$ *soit stable pour* $(\cap d)$ (*resp. pour* $(\cup d)$); *dans ce cas, pour que* $f \in [0, +\infty]^X$ *soit* $\mathcal{E}$*-mesurable il faut et il suffit que l'ensemble* $\{f \geqslant t\} \in \mathcal{E}$ (*resp.* $\{f > t\} \in \mathcal{E}$) *por tout* $t \in (0, +\infty)$.

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer seulement la propriété ii). Si $f + g$ est $\mathcal{E}$ mesurable pour tout couple de fonctions $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$, on a que $\varphi_A + \varphi_B$ est $\mathcal{E}$ mesurable pour tout $A, B \in \mathcal{E}$; il résulte donc que $A \cap B$ et $A \cup B \in \mathcal{E}$, d'après la ii) du Théorème 1; c'est-à-dire $\mathcal{E}$ est stable pour $(\cap f, \cup f)$. D'autre part supposons que $\mathcal{E}$ soit stable pour $(\cap f, \cup f)$, allons vérifier que $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ est stable par l'opération de somme. Si $g_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}$ et $g_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_B$ appartiennent à $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$, la fonction $g_1 + g_2$ appartient à $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$, parce qu'on a pour tout $t \in (0, +\infty)$ l'égalité

$$\{g_1 + g_2 > t\} = \bigcup_{(a,b)\in Z} (\{g_1 \geqslant a\} \cap \{g_2 \geqslant b\}),$$

où $Z$ est l'ensemble fini

$$\{(g_1(x), g_2(x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in X \text{ et } g_1(x) + g_2(x) > t\}.$$

Si $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ sont bornées, il existe deux suites de fonctions bornées $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ $\mathcal{E}$-mesurables, qui convergent uniformément, respectivement, vers $g$ et $f$ (voir Th. 1, propriété iii)); puisque $\{g_n + f_n\}_n \subset \mathcal{S}^+(X, \mathcal{E})$ converge uniformément vers $g + f$, on a donc que $f + g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$, d'après la propriété ii) de la Proposition 1. Enfin en tenant compte de l'égalité $\int_X (f + g)\, d\alpha = \lim_n \int_X (f \wedge n + g \wedge n)\, d\alpha$, vraie pour toute $f, g \in [0, +\infty]^X$ et pour toute $\alpha \colon \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ fonction d'ensemble monotone, il résulte alors que $f + g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$, aussi si $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ ne sont pas bornées. ■

Dans des cas particuliers, la classe $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ a des propriétés nouvelles. Par exemple, si $X$ est un espace topologique dans lequel tout recouvrement ouvert dénombrable de $X$ contient un recouvrement ouvert fini de $X$, toute fonction $f \in [0, +\infty)^X$ mesurable par rapport au pavage des ensembles fermés de $X$ (autrement dit $f \in [0, +\infty)^X$ est semicontinue supérieurement) est bornèe; ou si $X$ est un espace topologique pseudocompact (c'est-à-dire toute fonction $g\colon X \to \mathbb{R}$ continue est bornée), toute fonction $f \in [0, +\infty)^X$ mesurable par rapport au pavage constitué par les ensembles du type $\{g = 0\}$, où $g\colon X \to \mathbb{R}$ est continue, est aussi bornée. Ceci dépend de la *semi-compacité* des pavages en question (voir [8]); on rappelle qu'on dit que le pavage $\mathcal{E}$ sur $X$ est semi-compact (voir [5]), si $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \emptyset$ entraînent qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n=1}^{n_0} H_n = \emptyset$.

THÉORÈME 2. *Soit $X$ un ensemble muni d'un pavage $\mathcal{E}$ stable pour $(\cap f)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$\mathcal{E}$ est semi-compact,*

ii) *toute fonction $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E}) \cap \mathbb{R}^X$ est bornée,*

iii) *toute fonction $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ a un maximum,*

iv) *toute suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante vers zéro, converge uniformément vers zéro, si toute $f_n$ est $\mathcal{E}$-mesurable,*

v) *pour toute suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$, décroissante vers zéro, et pour toute $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ monotone telle que $\int_X f_1\, d\alpha < +\infty$, on a $\lim_n \int_X f_n\, d\alpha = 0$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'adapter convenablement la démonstration d'un théorème analogue de I. Glicksberg [2]. i) $\Rightarrow$iii): d'après la propriété ii) du Théorème 1, il existe des ensembles $H_n \in \mathcal{E}$ tels que $\{f \geqslant a_{n+1}\} \subset H_n \subset \{f > a_n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$, $a_{n+1} > a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_n a_n = \sup\{f(x)\colon x \in X\}$ (on suppose que $f \neq 0$); puisque $\bigcap_{n=1}^{m} H_n \supset \{f \geqslant a_{m+1}\} \neq \emptyset$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on déduit de la semi-compacité de $\mathcal{E}$ que $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset$; si $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, on a donc $f(x_0) \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $f(x_0) = \sup(f)$.

iii) $\Rightarrow$ ii): est une conséquence immédiate de iii).

ii) $\Rightarrow$ i): soit $\{H_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset \mathcal{E}$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset$. Les ensembles $G_n = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ appartiennent à $\mathcal{E}$ et la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_{G_n} \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E}) \cap \mathbf{R}^X$; d'après la hypothèse ii) la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_{G_n}$ est bornée; il existe alors un nombre $n_0 \in \mathrm{N}$ tel que $G_{n_0} = \emptyset$, c'est-à-dire $\bigcap_{n=1}^{n_0} H_n = \emptyset$.

i) $\Rightarrow$ iv): soit $\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{E})$ une suite décroissante vers zéro. Démontrons que $\{f_n\}_n$ converge vers zéro uniformément, c'est-à-dire pour tout nombre réel $a > 0$ il existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tel que $f_{n_0} \leqslant a$. Choisissons une suite $\{a_n\}_n \subset (0, +\infty)$ telle que $a_n < a$ et $\lim_n a_n = a$. D'après la mesurabilité de toute $f_n$ et de la propriété ii) du Théorème 1, il existe pour tout $n \in \mathrm{N}$ un ensemble $H_n \in \mathcal{E}$ tel que $\{f_n \geqslant a\} \subset H_n \subset$ $\subset \{f > a_n\}$. On a donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \emptyset$, parce que $\lim_n f_n = 0$; on en déduit alors qu'il existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tel que $\bigcap_{n=1}^{n_0} H_n = \emptyset$, d'après l'hypothèse i). Donc $\{f_{n_0} \geqslant a\} \subset \bigcap_{n=1}^{n_0} H_n = \emptyset$, c'est-à-dire la suite $\{f_n\}_n$ converge uniformément vers zéro.

iv) $\Rightarrow$ v): c'est une conséquence des propriétés de l'integrale $\int_X - d\alpha$ (voir [3], Prop. 1, propriété (4)).

v) $\Rightarrow$ i): il suffit de démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tel que $H_{n_0} = \emptyset$, si $\{H_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset \mathcal{E}$ et $H_{n+1} \subset H_n$ pour tout $n \in \mathrm{N}$. Raisonnons par absurde; si $H_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathrm{N}$, la fonction d'ensemble monotone $\alpha_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ qui est égale à 1 seulement sur les ensembles du filtre $\mathcal{F}$ engendré par les $H_n$, est telle que $\alpha_{\mathcal{F}}(H_n) = 1$ pour tout $n \in \mathrm{N}$; ce qui est contraire à l'hypothèse v), parce que la suite $\{\varphi_{H_n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ décroisse vers zéro. ■

Lorsque le pavage $\mathcal{E}$ sur $X$ est une algèbre d'ensembles on a la caractérisation suivante de la $\mathcal{E}$-mesurabilité.

THÉORÈME 3. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un ensemble pavé,* $\mathcal{A}$ *une algèbre d'ensemble,* $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) $f$ *est* $\mathcal{A}$-*mesurable*,

ii) *pour tout ultrafiltre* $\mathcal{F}$ *de l'algèbre* $\mathcal{A}$ *il existe la limite* $\lim_{\mathcal{F}} f \in \overline{\mathbf{R}}$,

iii) *pour tout nombre réel* $a > 0$, *il existe une partition* $\{H_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ *finie de* $X$ *telle que pour tout* $i$ *on a*

$$f(x) \leqslant a + f(y) \quad \text{si } x, y \in H_i$$

*ou*

$$f(x) \geqslant \frac{1}{a} \quad \text{si } x \in H_i$$

*ou*

$$f(x) \leqslant -\frac{1}{a} \quad \text{si } x \in H_i .$$

Démonstration. i) $\Rightarrow$ii): on peut se borner à vérifier que pour tout $f \in [0, +\infty]^X \cap \mathcal{M}(X, \mathcal{E})$ il existe la limite $\lim_{\mathcal{F}} f \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{T}(X)$ le filtre de $\mathcal{T}(X)$ engendré par l'ultrafiltre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, et soient $\alpha_{\mathcal{F}'}$ et $\beta_{\mathcal{F}'}$ les fonctions d'ensemble monotones, définies dans l'introduction. Pour ces fonctions d'ensemble on a $\int_X f \, d\alpha_{\mathcal{F}'} = \operatorname{minlim}_{\mathcal{F}} f$ et $\int_X f \, d\beta_{\mathcal{F}'} = \operatorname{maxlim}_{\mathcal{F}} f$; puisque $\alpha_{\mathcal{F}'}(H) = \beta_{\mathcal{F}'}(H)$ pour tout $H \in \mathcal{A}$, il résulte que $\operatorname{maxlim}_{\mathcal{F}} f = \operatorname{minlim}_{\mathcal{F}} f$, d'après la définition de $\mathcal{A}$-mesurabilitè; ceci prouve que $\lim_{\mathcal{F}} f$ existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}$.

ii) $\Rightarrow$iii): d'après ii), pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ il existe un ensemble $H_{\mathcal{F}} \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) - f(y) \leqslant a$ ou $f(x) \geqslant 1/a$ ou bien $f(x) \leqslant -1/a$ pour $x, y \in H_{\mathcal{F}}$. La famille $\{X - H_{\mathcal{F}}: \mathcal{F}$ ultrafiltre de $\mathcal{A}\}$ ne peut être contenue dans aucun ultrafiltre de $\mathcal{A}$; il existe donc un nombre fini $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ d'ultrafiltres de $\mathcal{A}$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X - H_{\mathcal{F}_i}) = \emptyset ;$$

la démonstration de l'implication ii) $\Rightarrow$iii) est ainsi achevée.

iii) $\Rightarrow$i): il suffit de vérifier cette implication lorsque $f \in [0, +\infty]^X$ est bornée. Dans ce cas la construction d'une suite $\{g_n\}_n \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ telle que $\{g_n\}_n$ converge uniformément vers la fonction $f$ est immédiate; c'est pour quoi qu'on peut déduire que $f$ est $\mathcal{A}$-mesurable, d'après les propriétés des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables. ∎

Remarque 2. Soit $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ l'algèbre engendrée par les intervalles bornès ou non de $\mathbb{R}$. Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_{x^+}$, $\mathcal{F}_{x^-}$, $\mathcal{F}_{+\infty}$, $\mathcal{F}_{-\infty}$, les ultrafiltres de $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ engendrés, respectivement, par l'ensemble $\{x\}$, par les intervalles $(x, x+a)$, où $a \in (0, +\infty)$, par les intervalles $(x - a, x)$, où $a \in (0, +\infty)$, par les intervalles $(a, +\infty)$, où $a \in \mathbb{R}$, par les intervalles $(-\infty, a)$, où $a \in \mathbb{R}$; tous les ultrafiltres de $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sont de ces types. D'après le Théorème 3, il résulte qu'une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$-mesurables si et seulement si les limites suites existent: $\lim_{y\to x^+} f(y)$, $\lim_{y\to x^-} f(y)$, $\lim_{y\to+\infty} f(y)$, $\lim_{y\to-\infty} f(y)$; c'est-à-dire $f$ est dépourvue de discontinuités oscillatoires. Cet exemple peut facilment être adapté lorsque $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée par les intervalles semi-ouverts à droite (ou à gauche), et lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée par les pluriintervalles de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE 3. Le Théorème 3 on peut le présenter de façon plus suggestive. Si on désigne par $[\mathcal{A}]$ l'espace de Stone (l'espace des ultrafiltres de $\mathcal{A}$) (voir [6]), associé à l'algèbre $\mathcal{A}$, pour qu'une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ soit $\mathcal{A}$-mesurable il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\bar{f}: [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ continue telle que $\bar{f}(\mathcal{F}_x) = f(x)$ pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}_x = \{H \in \mathcal{A}: x \in H\}$, où $x \in X$. La classe des fonctions bornées et $\mathcal{A}$-mesurables est donc une algèbre de fonctions, isomorphe à l'algèbre des fonctions continues de $[\mathcal{A}]$ dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE 4. Dans le cas particulier où l'algèbre $\mathcal{A}$ est une $\sigma$-algèbre, on a que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si $f + g$ est définie sur $X$ et $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{E})$. Cette propriété n'est pas vraie si $\mathcal{A}$ est seulement une algèbre. En effet si on considère l'algèbre $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties finies et cofinies de $\mathbb{N}$, pour qu'une fonction $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ soit $\mathcal{A}$-mesurable il faut et il suffit qu'il existe la limite $\lim_n f(n)$; dans ce cas on peut donc choisir facilement deux fonctions $f, g: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f + g$ est definie, mais la fonction $f + g$ n'est pas $\mathcal{A}$-mesurable.

REMARQUE 5. Soit $\mu: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ une fonction d'ensemble monotone ou non et soit $\mu(\emptyset) = 0$. On sait que la famille d'ensembles qui sont $\mu$-mesurables au sens de Charathéodory, est une algèbre d'ensemble $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$. Soit $\delta: \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty]$ la fonctions d'ensemble monotone, définie par $\delta(H) = \mu(H)$ pour tout $H \in \mathcal{A}_\mu$; on dit qu'une fonction $f$ est $\mu$-mesurable si $f$ est $\mathcal{A}_\mu$-mesurable. Pour ces fonctions $\mu$-mesurables on a la linéarité, c'est-à-dire $\int_X (f + g)\, d\delta = \int_X f\, d\delta + \int_X g\, d\delta$ (voir Remarque 1 pour la définition de l'intégrale $\int_X - d\delta$) pour toute $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A}_\mu)$. En outre on a que les ensembles $\{t \in \mathbb{R}: \{f > f\} \notin \mathcal{A}_\mu\}$ et $\{t \in \mathbb{R}: \{f \geq t\} \notin \mathcal{A}_\mu\}$ sont dénombrables, si $f \in \mathcal{M}\cdot$

$\cdot(X, \mathcal{A}_\mu)$ et $\int\limits_X |f|\, d\delta < +\infty$. La classe des fonctions $f \in \mathbb{R}^X$, qui sont $\mu$-mesurables, telles que $\int\limits_X |f|\, d\delta < +\infty$ est un espace de Riesz (voir [4]).

## 3. Fonctions mesurables par rapport à deux pavages.

Dans ce paragraphe on considère deux pavages $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ sur $X$ stables pour $(\cap f, \cup f)$; on définit sur $\mathcal{P}(X)$ la relation « $\ll$ » de cette façon: « $A \ll B$ si et seulement si il existe un couple $(K, U) \in \mathcal{K}\times\mathcal{U}$ tel que $A \subset K \subset U \subset B$ ». Soit $D$ l'ensemble des nombres diadiques de l'intervalle $[0, 1]$; soit $\{H_t\}_{t\in D} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille d'ensembles telle que $H_0 = X$ et $H_t \gg H_s$ pour tout $t, s \in D$ avec $t < s$; alors la fonction $f\colon X \to [0, 1]$, définie par la position $f(x) = \sup\{t \in D\colon x \in H_t\}$, est soit $\mathcal{K}$-mesurable soit $\mathcal{U}$-mesurable. En effet pour tout $a, b \in \in (0, +\infty)$ avec $a > b$, soient $t$ et $s$ deux nombres $\in D$ tels que $a > t > r > b$, il résulte donc que $\{f \geqslant a\} \subset H_t \ll H_r \subset \{f > b\}$; puisque il existe un couple $(K, U) \in \mathcal{K}\times\mathcal{U}$ tel que $H_t \subset K \subset U \subset H_r$, on a enfin $\{f \geqslant a\} \subset K \subset U \subset \{f > b\}$, c'est-à-dire $f$ est $\mathcal{K}$-mesurable et $\mathcal{U}$-mesurable.

On dit que le couple de pavages $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$ vérifie la *propriété* $(N)$, si pour tout couple $(K, U) \in \mathcal{K}\times\mathcal{U}$ avec $K \subset U$, il existe un couple $(K', U') \in \mathcal{K}\times\mathcal{U}$ tel que $K \subset U' \subset K' \subset U$.

LEMME 3. *Soient $k, u \in [0, +\infty]^X$, soit $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$ un couple de pavages sur $X$ qui vérifie la propriété $(N)$. Si $k \leqslant u$ et si pour tout $t \in (0, +\infty)$ $\{k \geqslant t\} \in \mathcal{K}$ et $\{u > t\} \in \mathcal{U}$, il existe alors une fonction $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{K}) \cap \mathcal{M}^+(X, \mathcal{U})$ telle que $k \leqslant f \leqslant u$.*

DÉMONSTRATION. D'après la propriété i) de la Proposition 1 on peut supposer que $u \leqslant 1$. Pour tout $t \in D$, où $D$ est l'ensemble des nombres diadiques de l'intervalle $[0, 1]$, on pose $K_t = \{k \geqslant t\}$ et $U_t = \{u > t\}$. On construit une famille d'ensembles $\{F_t\}_{t\in D} \subset \mathcal{P}(X)$, jouissant des propriétés suivantes:

$$(1) \qquad F_0 = X\,, \quad F_1 = \emptyset\,,$$

$$(2) \qquad F_r \ll F_t\,, \quad F_r \ll G_t\,, \quad H_r \ll F_t\,, \quad \text{si } t, r \in D \text{ et } t < r\,;$$

en effet si on suppose d'avoir défini les ensembles $F_t$ pour tout $t = i/2^n$, où $0 \leqslant i \leqslant 2^n$, qui vérifient (1) et (2), on peut alors choisir un ensemble

$F_{t_0}$ pour $t_0 = (2i+1)/2^{n+1}$, où $0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$, qui satisfait ces relations: $F_{i/2^n} \gg F_{t_0}$, $F_{t_0} \gg F_{(i+1)/2^n}$, $U_{i/2^n} \gg F_{t_0}$, $F_{t_0} \gg K_{(i+1)/2^n}$, d'après les relations (vraies par hypothèse ou par construction):

$$F_{i/2^n} \gg F_{(i+1)/2^n}\,, \quad F_{i/2^n} \gg K_{(i+1)/2^n}\,, \quad U_{i/2^n} \gg F_{(i+1)/2^n}\,, \quad U_{i/2^n} \gg K_{(i+1)/2^n}\,.$$

La fonction $f: X \to [0, +\infty]$, définie par $f(x) = \sup\{t \in D\colon\ x \in F_t\}$, résulte $\mathcal{K}$-mesurable et $\mathcal{U}$-mesurable et $k \leqslant f \leqslant u$. ■

D'après le Lemme 3 et la propriété iii) de la Proposition 2 on en déduit les théorèmes suivants:

THÉORÈME 4. *Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{U}$ deux pavages sur $X$ stables pour $(\cap f, \cup f)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *le couple $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$ vérifie la propriété $(N)$*,

ii) *pour tout couple $(K, U) \in \mathcal{K} \times \mathcal{U}$ il existe une fonction $f \in \mathcal{M}^+ \cdot$ $\cdot (X, \mathcal{K}) \cap \mathcal{M}^+(X, \mathcal{U})$ telle que $\varphi_K \leqslant f \leqslant \varphi_U$, si $K \subset U$.* ■

THÉORÈME 5. *Soit $\mathcal{K}$ un pavage stable pour $(\cap d, \cup f)$, $\mathcal{U}$ un pavage stable pour $(\cap f, \cup d)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *le couple $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$ vérifie la propriété $(N)$*,

ii) *pour tout $(k, u) \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{K}) \times \mathcal{M}^+(X, \mathcal{U})$ il existe une fonction $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{K}) \cap \mathcal{M}^+(X, \mathcal{U})$ telle que $k \leqslant f \leqslant u$, si $k \leqslant u$.* ■

Soit $X$ un espace topologique et soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{U}$) le pavage sur $X$ des ensembles fermés (resp. ouverts); le couple de pavages $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$ vérifie la propriété $(N)$ si et seulement si $X$ est normal. Dans ce cas le Théorèmes 4 et 5 sont des bien connus théorèmes sur les espaces normaux (voir [7]).

## BIBLIOGRAPHIE


[1] E. DE GIORGI - G. LETTA, *Une notion général de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, Ann. Sc. Nor. Pisa, **4** (IV) (1977), pp. 61-99.

[2] I. GLICKSBERG, *The representation of functionals by integrals*, Duke Math. J., **19** (1952), pp. 253-261.

[3] G. H. GRECO, *Integrale monotono*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 149-166.
[4] G. H. GRECO, R. C. BASSANEZI, *Sull'additività di alcuni funzionali definiti su coni di funzioni* (*preprint*).
[5] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1966.
[6] R. SIKORSKI, *Boolean algebras*, Springer-Verlag, 1969.
[7] H. TONG, *Some characterizations of normal and perfectly spaces*, Duke Math. J., **19** (1952), pp. 289-292.
[8] V. S. VARADARAYAN, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl., ser. II, **48** (1965), pp. 161-228.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 novembre 1980.