

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO ZANOVELLO

## **Su un integrale fondamentale di funzioni di Struve**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 65 (1981), p. 13-17

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1981\\_\\_65\\_\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__13_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Su un integrale fondamentale di funzioni di Struve.

RENATO ZANOVELLO (\*)

SUNTO - In questa Nota, esamino, in vista soprattutto dell'analisi numerica, l'integrale (2) per  $a \cong b$ . Le formule ottenute, unite a quelle che si trovano in un mio precedente lavoro sull'integrale (1), permettono la risoluzione di problemi di matematica applicata ove intervengono i suddetti integrali.

ABSTRACT - In this Note, I consider the integral (2) for  $a \cong b$ , especially from the point of view of the numerical analysis. The formulas obtained, together with the formulas that appear in a previous paper I wrote about the integral (1), permit the resolution of problems of applied mathematics where such integrals occur.

In un mio precedente lavoro [1], ho studiato e risolto, con particolare riferimento all'analisi numerica, il problema dell'integrale:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\nu-1}(ax) \mathbf{H}_{\nu}(bx) dx, \quad (a > 0, b > 0, -\frac{1}{2} < \nu < 1),$$

di interesse applicativo oltre che teorico, ove  $\mathbf{H}_{\sigma}(x)$  indica la funzione di Struve d'ordine  $\sigma$ . Tale integrale però, pur essendo importante in questioni di matematica applicata, non risolve alcuni casi che colà si possono presentare. Da qui deriva la necessità di studiare

(\*) Indirizzo dell'A.:- Istituto di Matematica, Informatica e Sistemica, Università, Viale Ungheria 43, 33100 Udine.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

l'integrale:

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) \mathbf{H}_{\nu}(bx) dx, \quad (a > 0, b > 0, |\mu| + |\nu| < 1),$$

che estende i risultati da me ottenuti. È ciò che svolgo nei prossimi paragrafi, supponendo dapprima  $a \neq b$  e distinguendo due casi, a seconda che sia  $\nu \neq \frac{1}{2}$  oppure  $\nu = \frac{1}{2}$ .

§ 1. Per  $a \neq b$ ,  $\nu \neq \frac{1}{2}$ , posso scrivere [2, p. 227 (17)]:

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) \mathbf{H}_{\nu}(bx) dx = \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) \left\{ Y_{\nu}(bx) + \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2} G_{1,3}^{3,1} \left( \frac{b^2}{4} x^2 \left| \begin{array}{c} \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{array} \right. \right) \right\} dx,$$

ove  $Y_{\nu}(x)$  indica la classica funzione di Bessel di seconda specie di ordine  $\nu$  e  $G_{1,3}^{3,1}$  indica una particolare funzione di Meijer  $G_{p,q}^{m,n}(z)$ .

Osservo ora che il problema rappresentato dall'integrale:

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) Y_{\nu}(bx) dx$$

è stato da me risolto, nelle presenti ipotesi, in [3]. In particolare, cito le formule (9) e (13) di [3] per  $a < b$  e le formule (10), (14) sempre di [3] per  $a > b$ .

Inoltre, nelle mie ipotesi, tenuto conto di [4, p. 421 (12)], posso scrivere:

$$(5) \quad \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2} \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) G_{1,3}^{3,1} \left( \frac{b^2}{4} x^2 \left| \begin{array}{c} \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{array} \right. \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2 a} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_\mu(2y^{\frac{1}{2}}) G_{1,3}^{3,1} \left( \begin{matrix} \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{b^2}{a^2} y \\ \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{matrix} \right) dy = \\
 &= \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2 a} G_{4,4}^{4,2} \left( \begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{\mu+1}{2}, \frac{1-\mu}{2} \\ \frac{b^2}{a^2} \\ -\frac{\mu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{matrix} \right).
 \end{aligned}$$

Per il calcolo numerico delle funzioni di Meijer che si presentano nelle formule sopra citate, posso esprimere le stesse mediante funzioni ipergeometriche generalizzate  ${}_pF_q$  magari utilizzando, a seconda dei valori dei parametri, le formule del cap. V di [2]; dopo di che potrò valutare le  ${}_pF_q$  tramite sviluppi in serie o approssimazioni razionali (v. ad es. [5]).

Quanto anzidetto, unito alla (3), permette quindi la soluzione del mio problema, beninteso nelle ipotesi del presente paragrafo.

**§ 2.** Per  $a \neq b$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ , ricordo che, in virtù di [6, p. 39 (64)], certamente posso scrivere:

$$(6) \quad \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(bx) = \left(\frac{2}{\pi b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}}(bx).$$

Sostituisco (6) in (2) e considero l'integrale:

$$(7) \quad \int_0^\infty \mathbf{H}_\mu(ax) Y_{\frac{1}{2}}(bx) dx,$$

per il quale valgono, nelle mie ipotesi, le formule (9), (10) di [3] con  $\nu = \frac{1}{2}$ .

Inoltre è [4, p. 158 (4)]:

$$(8) \quad \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_\mu(ax) dx = \frac{\operatorname{tg}[(\pi/2)(\mu + \frac{1}{2})] \Gamma(\frac{1}{4} + \mu/2)}{2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{3}{4} + \mu/2)}.$$

Quanto sopraddetto porta a concludere che per  $\nu = \frac{1}{2}$ , valgono le

seguenti formule:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(bx) dx = \frac{\operatorname{tg} [(\pi/2)(\mu + \frac{1}{2})]}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \mu/2)}{\Gamma(\frac{3}{4} + \mu/2)} + \\
 & + \frac{a^{\mu} b^{-\mu-1}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\Gamma(\mu/2 + \frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4} - \mu/2)} F\left(\frac{3}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}; \mu + 1; \frac{a^2}{b^2}\right) + \\
 & + \frac{\sin [(\pi/2)(\mu + \frac{1}{2})]}{\pi^2} a^{\mu} b^{-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \\
 & \cdot F\left(\frac{3}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}; 1; 1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + \\
 & + \frac{\cos(\mu\pi)}{b\pi^2} G_{4,4}^{3,3} \left( \frac{a^2}{b^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\mu+1}{2}, \frac{5}{4} \\ \frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}, -\frac{\mu}{2}, \frac{5}{4} \end{array} \right. \right), \quad \left(0 < a < b, |\mu| < \frac{1}{2}\right),
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mu}(ax) \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(bx) dx = \frac{\operatorname{tg} [(\pi/2)(\mu + \frac{1}{2})]}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \mu/2)}{\Gamma(\frac{3}{4} + \mu/2)} + \\
 & + \frac{b^{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu/2 + \frac{3}{4})}{a^{\frac{3}{2}} \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\mu/2 + \frac{1}{4})} F\left(\frac{\mu}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{4} - \frac{\mu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b^2}{a^2}\right) + \\
 & + \frac{\sin [(\pi/2)(\mu + \frac{1}{2})]}{\pi^2} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \\
 & \cdot F\left(\frac{\mu}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{4} - \frac{\mu}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \\
 & + \frac{\cos(\mu\pi)}{b\pi^2} G_{4,4}^{3,3} \left( \frac{a^2}{b^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\mu+1}{2}, \frac{5}{4} \\ \frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}, -\frac{\mu}{2}, \frac{5}{4} \end{array} \right. \right), \quad \left(0 < b < a, |\mu| < \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

**§ 3.** Rimane da esaminare il caso  $a = b$ , cominciando da  $\nu \neq \frac{1}{2}$ . A tal fine, è noto che l'integrale (4) diverge [3]; ciò porta ad affermare, ferma restando la (5) e tenuto conto anche della (3), ancora valida, che l'integrale (2) è divergente.

Per  $\nu = \frac{1}{2}$ , avendo presenti le (6), (8), nonchè il fatto che l'integrale (7) diverge in questo caso [3], posso dire che l'integrale (2) è ancora divergente.

In conclusione, per  $a = b$ , l'integrale (2) diverge sempre.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] R. ZANOVELLO, *Su un integrale definito del prodotto di due funzioni di Struve*, Atti Acc. Scienze, Torino, **112**, I-II (1978), pp. 63-81.
- [2] Y. L. LUKE, *The Special Functions and Their Approximations*, Vol. I, Academic Press, 1969.
- [3] R. ZANOVELLO, *Su un integrale definito del prodotto di funzioni di Bessel e di Struve*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **64** (1981).
- [4] A. ERDELYI - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, Mac Graw-Hill, 1954.
- [5] Y. L. LUKE, *Algorithms for the Computation of Mathematical Functions*, Academic Press, 1977.
- [6] A. ERDELYI, - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, Mac Graw-Hill, 1953.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 giugno 1980.