Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giovanna Cerami

Autovalori di un problema ellittico dipendente da un parametro in modo non lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 135-141
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__135_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 65 (1981)

Autovalori di un problema ellittico dipendente da un parametro in modo non lineare.

Giovanna Cerami (*)

1. Questa nota tratta un problema atipico di autovalori per un operatore fortemente ellittico dipendente in modo non lineare da un parametro reale.

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbf{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe $\mathscr{C}^2$. Si considera in Ω l'operatore ellittico del secondo ordine

$$\mathscr{L}(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi(\lambda)$$

e si suppone che

(h_1) $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\lambda) \geqslant \lambda^2$ $\forall \lambda$,

(h_2) $a_{ij}(x)$ e $b_i(x)$ siano funzioni Holderiane in $\bar{\Omega}$, la matrice $(a_{ij}(x))$ sia reale, definita positiva e simmetrica $\forall x \in \bar{\Omega}$, e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma^2|\xi|^2 \qquad \gamma \in \mathbf{R} - \{0\}$$
$$\forall x \in \bar{\Omega} \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n .$$

L'obiettivo che ci si propone è di determinare l'esistenza di soluzioni positive per il problema di Dirichlet omogeneo per $\mathscr{L}(\lambda)$ in Ω,

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università, via Archirafi 34, 90123 Palermo.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del G.N.A.F.A.

estendendo così in modo naturale il problema delle autosoluzioni positive per un operatore uniformemente ellittico.

I risultati che si ottengono sono sintetizzati nel seguente

TEOREMA 1.1. *Se valgono le ipotesi* (h_1) *ed* (h_2) *ed è soddisfatta la condizione*

(h_3) *esiste una palla $B(x_0, \varrho)$, la cui chiusura sia contenuta in Ω, ed un numero reale $\alpha > 0$ tale che*

$$\alpha(|\xi|^2 + \eta^2) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j + \eta \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\xi_i + \eta^2$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall \eta \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall x \in B(x_0, \varrho)$$

allora esistono due numeri $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tali che per l'operatore $\mathscr{L}(\lambda)$ vale il principio di massimo debole se $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ e il problema

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \mathscr{L}(\lambda)u = 0 & \text{in } \Omega \\ u \quad\;\; = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione non banale se $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2$, e tale soluzione è positiva in Ω. Inoltre esiste un intervallo limitato al di fuori del quale non vale il principio di massimo per $\mathscr{L}(\lambda)$ (1).

Nella letteratura vi sono numerosi studi su problemi analoghi, limitatamente però al caso in cui $\varphi(\lambda)$ sia di tipo quadratico (cf. per esempio [3], [4], [7]), ricordiamo, in particolare, che, nel caso in cui $\varphi(\lambda) = \lambda^2$, Papi Frosali e Del Pace in [1] hanno provato l'esistenza di due soli valori di λ in corrispondenza ai quali esistono, ovviamente uniche, soluzioni positive per (1.1).

Il risultato che si ottiene nel presente lavoro è, per quel che riguarda l'esistenza di autosoluzioni positive per $\mathscr{L}(\lambda)$, più generale di quelli noti: le ipotesi del Teorema 1.1 sono infatti alquanto più deboli di quelle del citato lavoro [1] non soltanto per quanto concerne $\varphi(\lambda)$, ma anche nella parte relativa ai coefficienti a_{ij} e b_i del-

(1) Per « validità del principio di massimo debole per $\mathscr{L}(\lambda)$ » si intende il seguente fatto: se u è soluzione regolare in Ω della equazione omogenea $\mathscr{L}(\lambda)u = 0$, allora si ha $\max\limits_{\Omega} u \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} u$, dunque il problema di Dirichlet omogeneo con dati nulli al bordo ammette soluzione unica (banale) (cf. [8] e [6]).

l'operatore $\mathscr{L}(\lambda)$, mancano tuttavia informazioni circa il numero esatto di valori di λ in relazione ai quali esistono soluzioni positive del problema (1.1).

Si noti, infine, che il metodo di dimostrazione del Teorema 1.1, che sarà sviluppato nel seguente paragrafo, è del tutto diverso da quelli usati nei lavori prima ricordati ed è fondato sullo studio del comportamento degli autovalori di opportuni operatori positivi.

Ringrazio il prof. G. Prodi per avermi suggerito il problema e per gli utili colloqui sull'argomento.

2. Indichiamo con L_λ l'operatore

$$L_\lambda = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e con $\mu(\lambda)$ il più piccolo autovalore positivo (reale) di $-L_\lambda$ relativo ad Ω con condizioni di annullamento al bordo. Se i coefficienti a_{ij} e b_i soddisfano l'ipotesi (h_2) l'esistenza di $\mu(\lambda)$ segue dalla teoria degli operatori positivi (vedi Krasnosel'skii [6]). La medesima teoria mostra che

(*a*) $\mu(\lambda)$ è un autovalore semplice nel senso di Riesz e ad esso corrisponde una (unica) autofunzione positiva in Ω,

(*b*) se $\bar{\mu}$ è un qualsiasi altro autovalore per il medesimo problema, allora $\mu(\lambda) < |\bar{\mu}|$.

Protter e Weinberger in [9] hanno migliorato la (*b*) mostrando che vale la relazione $\mu(\lambda) \leqslant \mathscr{Re}\, \bar{\mu}$. Inoltre l'applicazione $\mu(\lambda)$ gode della seguente proprietà

(*c*) $\mu(\lambda) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ [vedi Kato [5]] e $\mu(0) > 0$.

L'idea che si vuole sfruttare per dimostrare il Teorema 1.1 è quella di provare che i grafici di $\mu(\lambda)$ e $\varphi(\lambda)$ hanno almeno due punti di intersezione; a tal fine si rende necessario dare una stima asintotica di $\mu(\lambda)$. Per ottenere ciò utilizzeremo metodi simili a quelli introdotti da Friedman, Ellis e Devinatz in [2] per studiare il comportamento asintotico del più piccolo autovalore positivo di operatori ellittici del secondo ordine aventi un parametro piccolo nei termini contenenti le derivate di ordine più alto.

I seguenti Lemmi 2.1 e 2.2 sono dimostrati in [2], la tecnica usata per dimostrare il Teorema 2.3 è ispirata da quella usata per la dimostrazione del Teorema 4.3 in [2].

Sia N_ε la famiglia di operatori ellittici

$$N_\varepsilon = \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e sia ν_ε il più piccolo autovalore positivo di $-N_\varepsilon$ relativo ad Ω con condizioni di annullamento alla frontiera. Se i coefficienti a_{ij} e b_i soddisfano l'ipotesi (h_2) l'esistenza di ν_ε è assicurata dalla teoria degli operatori positivi (cf. [6]), nelle medesime ipotesi valgono i seguenti lemmi:

LEMMA 2.1. *Sia Ω' un sottodominio di Ω con frontiera di classe $\mathscr{C}^2$ e $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Se ν'_ε è il primo autovalore positivo di $-N_\varepsilon$ corrispondente al problema di autovalori in Ω' con dati di Dirichlet nulli sulla frontiera, allora*

$$\nu_\varepsilon \leqslant \nu'_\varepsilon .$$

LEMMA 2.2. *Sia $\Psi(x)$ una funzione in $\mathscr{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathscr{C}^2(\Omega)$. Se*

$$N_\varepsilon \Psi(x) + A\Psi(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \Omega \,, \ A > 0 \ \textit{costante reale}$$

e

$$\Psi(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \Omega \,,$$

$$\Psi(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega \,,$$

allora $\nu_\varepsilon \leqslant A$.

TEOREMA 2.3. *Se i coefficienti dell'operatore L_λ verificano le ipotesi (h_2) e (h_3) esistono $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ e una costante c: $0 < c < 1$ tali che*

$$\mu(\lambda) \leqslant c|\lambda|^2 \qquad \forall \lambda\colon \ |\lambda| > \bar{\lambda} \,. \tag{2.1}$$

DIM. Osserviamo che, posto $1/|\lambda| = \varepsilon^2$, risulta

$$L_\lambda = |\lambda| \left[\frac{1}{|\lambda|} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (\operatorname{sign} \lambda) \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = |\lambda| N_\varepsilon \,.$$

Detto ν_ε il primo autovalore positivo dell'operatore $-N_\varepsilon$ relativo ad Ω con dati di Dirichlet nulli al bordo proveremo che, purchè ε sia sufficientemente piccolo, se valgono (h_2) e (h_3), risulta

$$(2.2) \qquad \nu_\varepsilon \leqslant c/\varepsilon^2 \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}\,,\ 0 < c < 1\,,$$

ne conseguirà allora che

$$\mu(\lambda) = |\lambda| \nu_\varepsilon \leqslant c|\lambda|^2$$

per ogni λ maggiore in valore assoluto di $\bar{\lambda}$ opportunamente grande.

Dimostriamo dunque la (2.2).

In quanto segue supporremo per semplicità che il punto x_0 di cui si parla nell'ipotesi (h_3) sia l'origine e indicheremo con B la palla $B(0, \varrho)$ e con $\bar{B}$ la sua chiusura.

Detto $\bar{\nu}_\varepsilon$ il più piccolo autovalore positivo di $-N_\varepsilon$ relativo a B con condizione di annullamento al bordo, per il Lemma 2.1 risulta

$$\nu_\varepsilon \leqslant \bar{\nu}_\varepsilon\,.$$

Quindi per provare la maggiorazione (2.2) per ν_ε, basta provarla per $\bar{\nu}_\varepsilon$. A tal fine vogliamo applicare il Lemma 2.2. Scegliamo

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= -\Phi(x) \exp\left[-M\Phi(x)/\varepsilon^2\right], \\ \Phi(x) &= \|x\|^2 - \varrho^2\,, \\ A &= c/\varepsilon^2\,, \end{aligned}$$

dove c ed M sono costanti positive tali che

$$1 - \alpha < c < 1 \qquad M > \left(\frac{1-\alpha}{4\alpha\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chiaramente Ψ soddisfa su B le ipotesi del Lemma 2.2. Verifichiamo che

$$N_\varepsilon \Psi(x) + A\Psi(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in B\,.$$

Si ha che

$$\exp\left[M\Phi(x)/\varepsilon^2\right]\left[N_\varepsilon\Psi(x) + A\Psi(x)\right] =$$

$$= -\Phi\left[A + \frac{M^2}{\varepsilon^2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} - M\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Phi_{x_i x_j} - \frac{M}{\varepsilon^2}(\operatorname{sign}\lambda)\sum_{i=1}^n b_i\Phi_{x_i}\right] +$$

$$+ 2M \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Phi_{x_i} \Phi_{x_j} - (\operatorname{sign} \lambda) \sum_{i=1}^{n} b_i \Phi_{x_i} - \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Phi_{x_i x_j} \geqslant$$

$$\geqslant -\Phi \left[A - M\gamma_1 + \frac{M^2}{\varepsilon^2} \alpha \left(|\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{M^2} \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} \right] +$$

$$+ 2M\alpha \left[|\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{4M^2} \right] - \frac{1}{2M} - \varepsilon^2 \gamma_1 .$$

Esaminiamo prima il caso $\|x\|^2 > \varrho^2/4$, risulta allora

$$\exp [M\Phi(x)/\varepsilon^2][N_\varepsilon \Psi(x) + A\Psi(x)] \geqslant$$

$$\geqslant -\Phi \left[\frac{c + \alpha - 1}{\varepsilon^2} - M\gamma_1 \right] + 2M\alpha\varrho^2 + \frac{\alpha - 1}{2M} - \varepsilon^2 \gamma_1$$

ora sia

$$\frac{c + \alpha - 1}{\varepsilon^2} - M\gamma_1$$

sia

$$2M\alpha\varrho^2 + \frac{\alpha - 1}{2M} - \varepsilon^2 \gamma_1$$

risultano non negative purchè sia $c > 1 - \alpha$, $M > \left((1-\alpha)/4\alpha\varrho^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ed ε sufficientemente piccolo.

Consideriamo ora il caso $\|x\|^2 \leqslant \varrho^2/4$.

In questo caso $-\Phi(x) \geqslant \frac{3}{4}\varrho^2$, allora

$$\exp [M\Phi(x)/\varepsilon^2][N_\varepsilon \Psi(x) + A\Psi(x)] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{4} \varrho^2 \frac{c + \alpha - 1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{4} \varrho^2 M\gamma_1 - \frac{1 - \alpha}{2M} + \varepsilon^2 \gamma_1$$

ed anche questa quantità se $c > 1 - \alpha$ risulta non negativa, purchè ε sia abbastanza piccolo.

Dai Lemmi 2.1 e 2.2 segue allora

$$\nu_\varepsilon \leqslant \bar{\nu}_\varepsilon \leqslant c/\varepsilon^2$$

come si voleva. ■

Siamo ora in grado di procedere alla

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.1. In virtù della proprietà (c) di $\mu(\lambda)$, della (2.1) e dell'ipotesi (h_1) si ha

$$\mu(\lambda)-\varphi(\lambda)\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) ,$$

$$\mu(0)-\varphi(0)>0$$

$$\mu(\lambda)-\varphi(\lambda)<0 \qquad \forall\lambda\colon\ |\lambda|>\bar{\lambda}>0 ,$$

la tesi risulta allora conseguenza delle proprietà (a) e (b) di $\mu(\lambda)$ e del teorema di esistenza degli zeri applicato alla funzione $\mu(\lambda)-\varphi(\lambda)$. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] C. DEL PACE - G. PAPI FROSALI, *Principio di massimo ed autofunzioni positive per una famiglia di operatori ellittici quadratica nel parametro,* Analisi Funzionale e Applicazioni, suppl. B.U.M.I., **1** (1980), pp. 219-237.

[2] A. DEVINATZ - R. ELLIS - A. FRIEDMAN, *The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of second order elliptic operators with a small parameter in the highest derivatives II,* Indiana Univ. Math. J., **23** (1974), pp. 991-1011.

[3] J. EISENFELD, *On simmetrization and roots of quadratic eigenvalue problems,* J. Functional Analysis, **9** (1972), pp. 410-422.

[4] I. C. GOHBERG - M. G. KREIN, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* American Mathematical Society, Providence R.I., 1969.

[5] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, New York, 1966.

[6] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Positive solutions of operator equations,* Nordhoff, Groningen, 1966.

[7] M. G. KREIN - H. LANGER, *A contribution to the theory of quadratic pencils of selfadjoint operators,* Soviet. Math. Dokl., **5**-1 (1964), pp. 266-268.

[8] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type,* Springer-Verlag, New York, 1970.

[9] M. PROTTER - H. WEINBERGER, *On the spectrum of general second order operators,* Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), pp. 251-255.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 novembre 1980.