RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

Sugli zeri delle soluzioni di una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 64 (1981), p. 247-270

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__247_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 64 (1981)

Sugli zeri delle soluzioni di una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - Using appropriate comparison theorems, lower and upper bounds are founded for the distance of conjugate points and τ-points with respect to the equation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ belonging to a certain class. Further, if $\lim_{t\to+\infty} a(t) = h$, $\lim_{t\to+\infty} b(t) = k$, $4k - h^2 > 0$, some asymptotic formulae for the distance between conjugate points and τ-points are given.

1. Introduzione.

Si consideri l'equazione

$$\mathcal{L}[x] \equiv x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{1}$$

dove $a(t), b(t)$ sono funzioni a valori reali e localmente sommabili sulla semiretta $[c, +\infty)$; richiamando queste ipotesi su $a(t), b(t)$ si scriverà: $a(t), b(t) \in L_{\text{loc}}([c, +\infty))$.

Seguendo le usuali definizioni (1) si dirà che l'equazione (1) è oscillante su una semiretta se una sua soluzione (non triviale) ammette infiniti zeri sulla semiretta stessa; generalmente per brevità si dirà soltanto che l'equazione (1) è oscillante.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

(1) Si vedano ad esempio: Coppel [3], Reid [15], Willet [17].

Si dirà che l'equazione (1) è disconiugata in un intervallo I se nessuna soluzione di (1) si annulla più di una volta in I.

Si dirà invece che il punto t_2 è il coniugato di t_1 rispetto all'equazione (1) se esiste una soluzione $x(t)$ dell'equazione (1) tale che: $x(t_1) = x(t_2) = 0$, $x(t) \neq 0$ per $t \in]t_1, t_2[$; verrà quindi qui tralasciata una più puntigliosa locuzione: il punto t_2 è il primo punto coniugato destro di t_1 rispetto all'equazione (1). Seguendo sostanzialmente Leighton [7] si dirà che τ_1 è il τ-punto di t_1 rispetto all'equazione (1) se esiste una soluzione $x(t)$ dell'equazione (1) tale che: $x(t_1) = x'(\tau_1) = 0$, $x'(t) \neq 0$ per $t \in [t_1, \tau_1[$.

Si dirà anche che t_2 è il punto focale di τ_1 rispetto all'equazione (1) se esiste una soluzione $x(t)$ dell'equazione (1) tale che: $x'(\tau_1) = x(t_2) = 0$, $x(t) \neq 0$ per $t \in [\tau_1, t_2[$.

Nell'ipotesi che $a(t), b(t) \in L_{\mathrm{loc}}([c, +\infty))$ e che soddisfino le condizioni

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} b(t) = 1\,, \tag{1'}$$

è stato dimostrato da Richard in [16] che l'equazione (1) è oscillante e che, detti t_n gli zeri di una sua soluzione non triviale $x(t)$, τ_n gli zeri di $x'(t)$ in una opportuna semiretta dove $t_n < \tau_n < t_{n+1}$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = \pi \tag{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\tau_n - t_n) = \frac{\pi}{2}\,. \tag{2'}$$

Questo risultato è stato ottenuto in [16] associando all'equazione (1) particolari equazioni di confronto, non più precisamente lineari, contenendo il valore assoluto della derivata prima.

In questo lavoro si estende il risultato, ottenuto in [16], al caso in cui

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = h\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} b(t) = k\,, \qquad 4k - h^2 > 0 \;(^2)\,. \tag{1''}$$

(2) Tralasciando l'ipotesi $4k - h^2 > 0$ è ovvio che la (1) può non essere oscillante.

Si trova così che

$$\lim_{n\to+\infty}(t_{n+1}-t_n)=\frac{2\pi}{\sqrt{4k-h^2}}\,, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\tau_n-t_n)=\frac{2}{\sqrt{4k-h^2}}\operatorname{arccotg}\frac{h}{\sqrt{4k-h^2}}\,, \tag{3'}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(t_{n+1}-\tau_n)=\frac{2}{\sqrt{4k-h^2}}\left\{\pi-\operatorname{arccotg}\frac{h}{\sqrt{4k-h^2}}\right\}. \tag{3''}$$

Le equazioni di confronto usate in [16] non servono e ne sono state qui introdotte altre che sono lineari a coefficienti discontinui. Oltre a determinare i limiti (3), (3′), (3″) in questo lavoro si calcolano anche delle approssimazioni per difetto e per eccesso delle differenze $t_{n+1}-t_n$ e τ_n-t_n, (si vedano le formule (6), (7) del Teorema 1). Per il confronto fra l'approssimazione per difetto qui ottenuta di $t_{n+1}-t_n$ e quella di De La Vallée Poussin si veda l'Osservazione 1ª.

I risultati ottenuti sono noti quando $a(t)$ sia identicamente nulla. In luogo del metodo diretto, usato nei paragrafi 3, 4, si potrebbe pensare ad una trasformazione dell'equazione (1) che muti il problema in quello corrispondente per una equazione del tipo

$$\frac{d^2u}{ds^2}+p(s)u=0\,.$$

A questa questione ed ai problemi che solleva è dedicato il paragrafo 5.

2. Lemmi preliminari di confronto.

Lemma 1. Si considerino le due equazioni differenziali

$$\mathcal{L}[x]\equiv x''+a(t)x'+b(t)x=0\,, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_1[y]\equiv y''+a_1(t)y'+b_1(t)y=0\,, \tag{2}$$

con $a(t)$, $b(t)$, $a_1(t)$, $b_1(t)$ a valori reali e sommabili in un intervallo I. Considerati $\alpha\in I$, $\alpha+\omega_1\in I$, si supponga che valgano le diseguaglianze ([3])

$$(3)\qquad \begin{cases} a(t) < a_1(t) & \text{q.o. in } [\alpha, \alpha + \eta_1[\\ a(t) > a_1(t) & \text{q.o. in }]\alpha + \eta_1, \alpha + \omega_1] \end{cases}$$

$$(3')\qquad b(t) < b_1(t) \qquad \text{q.o. in } [\alpha, \alpha + \omega_1] .$$

L'equazione (2) ammetta una soluzione $y(t)$ soddisfacente le condizioni

$$(4)\qquad y(t) > 0 \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_1[, \qquad y(\alpha) = y(\alpha + \omega_1) = 0 ,$$

$$(4')\qquad y'(t) > 0 \quad \text{in } [\alpha, \alpha + \eta_1[, \qquad y'(\alpha + \eta_1) = 0 , \qquad y'(t) < 0 \quad \text{in }]\alpha + \eta_1, \alpha + \omega_1] ,$$

allora l'equazione (1) è disconiugata in $[\alpha, \alpha + \omega_1]$ e α non ammette τ-punti in $[\alpha, \alpha + \eta_1]$ rispetto all'equazione (1); scelte le soluzioni dell'equazione (1) e dell'equazione (2) soddisfacenti le condizioni

$$(5)\qquad x(\alpha) = y(\alpha) = 0 , \qquad x'(\alpha) = y'(\alpha) = D > 0 ,$$

allora si ha

$$(6)\qquad x(t) > y(t) \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_1] , \qquad x'(t) > y'(t) \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \eta_1] .$$

Dimostrazione. Scelte le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ soddisfacenti le (5), (4), (4'), le ipotesi fatte assicurano che

$$(7)\qquad \mathcal{L}[y](t) < \mathcal{E}_1[y](t) \equiv 0 \qquad \text{q.o. in } [\alpha, \alpha + \omega_1] .$$

Poichè $x(\alpha) = 0$, $x'(\alpha) > 0$ ed $x(t)$, $x'(t)$ sono assolutamente continue in I esiste un intorno destro di α in cui $x(t) > 0$. Se $x(t)$ ammette uno zero successivo ad α in I, sia $\alpha + \omega$ tale valore, altrimenti si ponga $\alpha + \omega = \sup I$. In ogni caso si ha

$$(8)\qquad x(t) > 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega[.$$

([3]) È chiaro che, essendo le diseguaglianze verificate quasi ovunque, non ha alcuna importanza il confronto fra $a(t)$ ed $a_1(t)$ nel punto $\alpha + \eta_1$.

Posto

$$u(t) = x'(t)y(t) - x(t)y'(t)\,, \tag{9}$$

sussiste l'identità

$$u'(t) + a(t)u(t) \equiv y(t)\mathfrak{L}[x](t) - x(t)\mathfrak{L}[y](t) \qquad \text{q.o. in } I\,.$$

Detto $\delta = \min(\omega, \omega_1)$, le condizioni (7), (8) e $\mathfrak{L}[x](t) \equiv 0$ q.o. in I, assicurano che

$$u'(t) + a(t)u(t) > 0 \qquad \text{q.o. in }]\alpha, \alpha + \delta[\,, \tag{10}$$

e perciò

$$\frac{d}{dt}\left\{u(t)\cdot\exp\left[\int_\alpha^t a(\tau)\,d\tau\right]\right\} > 0 \qquad \text{q.o. in }]\alpha, \alpha + \delta[\,. \tag{10'}$$

Dalla condizione $u(\alpha) = 0$ e dalla assoluta continuità di

$$u(t)\cdot\exp\left[\int_\alpha^t a(\tau)\,d\tau\right],$$

seguono allora

$$u(t) > 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \delta]\,, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x(t)}{y(t)}\right] > 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \delta[\,. \tag{11'}$$

D'altra parte

$$\lim_{t\to\alpha^+}\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x'(\alpha)}{y'(\alpha)} = 1$$

e perciò

$$x(t) > y(t) \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \delta[\,.$$

Se fosse $\min(\omega, \omega_1) = \omega < \omega_1$ si avrebbe allora una contraddizione.

Nè può essere $x(\alpha + \omega_1) = 0$ perchè in tal caso si avrebbe $u(\alpha + \omega_1) = 0$ in contrasto con la (11). Da ciò segue

$$x(t) > y(t) \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_1]\,, \qquad x(t) > 0 \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_1]\,. \tag{12}$$

Le condizioni $x(\alpha) = 0$, $x(t) > 0$ in $]\alpha, \alpha + \omega_1]$, verificate da una soluzione dell'equazione (1), assicurano che questa equazione è disconiugata in $[\alpha, \alpha + \omega_1]$. Infatti, se una soluzione $\bar{x}(t)$ di (1) si annullasse due volte in $[\alpha, \alpha + \omega_1]$, sarebbe necessariamente linearmente indipendente da $x(t)$ in I e quindi $\bar{x}(t)$ dovrebbe annullarsi due volte in $]\alpha, \alpha + \omega_1]$. L'applicazione del teorema di Sturm ([4]) porterebbe allora alla contraddizione che anche $x(t)$ dovrebbe annullarsi in $]\alpha, \alpha + \omega_1]$.

Inoltre dalla condizione $u(t) > 0$ in $]\alpha, \alpha + \omega_1]$ segue

$$\frac{x'(t)}{y'(t)} - \frac{x(t)}{y(t)} > 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \eta_1[$$

e quindi

$$\frac{x'(t)}{y'(t)} > \frac{x(t)}{y(t)} > 1 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \eta_1[\,,$$

da cui

$$x'(t) > y'(t) \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \eta_1[\,.$$

Nè può essere $x'(\alpha + \eta_1) = y'(\alpha + \eta_1) = 0$ perchè si avrebbe allora $u(\alpha + \eta_1) = 0$ in contrasto con la (11). Si conclude che

$$x'(t) > y'(t) \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \eta_1]\,, \tag{13}$$

e che $x'(t) > 0$ in $[\alpha, \alpha + \eta_1]$; quindi $x = \alpha$ non ha τ-punti rispetto all'equazione (1) in $[\alpha, \alpha + \eta_1]$.

Lemma 2. Si considerino l'equazione (1)

$$\mathfrak{L}[x] \equiv x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

([4]) Poichè $a(t)$, $b(t) \in L(I)$ il teorema di Sturm è applicabile all'equazione (1) scritta in forma autoaggiunta. Per la validità del teorema di Sturm in condizioni molto generali si veda [2]. Del resto si potrebbe applicare alle funzioni differenziabili $x(t)$, $\bar{x}(t)$ il Lemma 1 di pag. 4 di [3].

Si noti che la sola condizione $x(t) > 0$ in $]\alpha, \alpha + \omega_1]$ assicura che l'equazione (1) è disconiugata in $]\alpha, \alpha + \omega_1]$ ma non in $[\alpha, \alpha + \omega_1]$. Alla stessa conclusione condurrebbero le condizioni $\mathfrak{L}[y](t) < 0$ q.o. in $[\alpha, \alpha + \omega_1]$, $y(t) > 0$ in $]\alpha, \alpha + \omega_1[$ cfr. [3], cap. I, pag. 5-6 e anche par. 10 di [4].

e l'equazione

$$(2') \qquad \mathcal{E}_2[z] \equiv z'' + a_2(t)z' + b_2(t)z = 0 \,,$$

con $a(t)$, $b(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$ a valori reali e sommabili in un intervallo I. Considerati $\alpha \in I$, $\alpha + \omega_2 \in I$, si supponga che valgano le diseguaglianze

$$(14) \qquad \begin{cases} a(t) > a_2(t) & \text{q.o. in } [\alpha, \alpha + \eta_2[\\ a(t) < a_2(t) & \text{q.o. in }]\alpha + \eta_2, \alpha + \omega_2] \,, \end{cases}$$

$$(14') \qquad b(t) > b_2(t) \qquad \text{q.o. in } [\alpha, \alpha + \omega_2] \,.$$

L'equazione (2') ammetta una soluzione $z(t)$ soddisfacente le condizioni

$$(15) \qquad z(t) > 0 \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_2[\,, \qquad z(\alpha) = z(\alpha + \omega_2) = 0 \,,$$

$$(15') \qquad z'(t) > 0 \quad \text{in } [\alpha, \alpha + \eta_2[\,, \qquad z'(\alpha + \eta_2) = 0 \,, \quad z'(t) < 0 \quad \text{in }]\alpha + \eta_2, \alpha + \omega_2] \,,$$

allora l'equazione (1) non è disconiugata in $[\alpha, \alpha + \omega_2[$ ed ammette τ-punti di $x = \alpha$ in $[\alpha, \alpha + \eta_2[$. Scelte le soluzioni dell'equazione (1) e dell'equazione (2') soddisfacenti le condizioni

$$(16) \qquad x(\alpha) = z(\alpha) = 0 \,, \qquad x'(\alpha) = z'(\alpha) = D > 0 \,,$$

si ha

$$(17) \qquad x(t) < z(t) \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega] \,, \qquad x'(t) < z'(t) \quad \text{in }]\alpha, \alpha + \delta_2] \,,$$

dove $\alpha + \omega$ è il punto coniugato di α rispetto all'equazione (1) e $\delta_2 = \min(\omega, \eta_2)$.

Dimostrazione. Scelte le soluzioni $x(t)$, $z(t)$ soddisfacenti le (16), (15), (15'), le ipotesi fatte assicurano che

$$(18) \qquad \mathcal{L}[z](t) > \mathcal{E}_2[z](t) \equiv 0 \qquad \text{q.o. in } [\alpha, \alpha + \omega_2] \,.$$

Definito $\alpha + \omega$ come nel Lemma 1, e introdotta la funzione

$$(19) \qquad v(t) = x'(t)z(t) - x(t)z'(t) \,,$$

si ha

$$(19') \qquad v(t) < 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \delta^*] \, , \qquad \delta^* = \min(\omega, \omega_2) \, .$$

Considerazioni del tutto analoghe a quelle del Lemma 1, assicurano che la soluzione $x(t)$ si annulla nel punto $\alpha + \omega < \alpha + \omega_2$ e che vale la prima delle (17). Ne segue poi l'esistenza di $\alpha + \eta \in]\alpha, \alpha + \omega[$, τ-punto di $x = \alpha$ rispetto all'equazione (1). Considerazioni sui rapporti $x(t)/z(t)$ ed $x'(t)/z'(t)$, analoghe a quelle del Lemma 1, conducono infine alla seconda delle (17). Conducono anche alla diseguaglianza

$$(20) \qquad \alpha + \eta < \alpha + \eta_2$$

se $\alpha + \eta_2 < \alpha + \omega$. È poi evidente che la (20) è verificata anche se [5] $\alpha + \eta_2 > \alpha + \omega$ in quanto $\alpha + \eta < \alpha + \omega$.

3. Costruzione di particolari equazioni di confronto.

Si consideri l'equazione

$$(1) \qquad \mathfrak{L}[x] \equiv x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \, .$$

Relativamente all'equazione (1) si ammetta l'ipotesi seguente:

IPOTESI H. Le funzioni $a(t)$, $b(t)$ appartengano ad $L_{\text{loc}}([c, +\infty))$. Indicato con J un insieme soddisfacente le condizioni

$$J \subset [c, +\infty) \, , \qquad \mu([c, +\infty) \setminus J) = 0 \, ,$$

si abbia per $t \in J$

$$(1') \qquad \lim_{t \to +\infty} a(t) = h \, , \qquad \lim_{t \to +\infty} b(t) = k \, , \qquad 4k - h^2 > 0 \, .$$

Vale allora il teorema seguente.

[5] Si noti che non può essere $\eta_2 = \omega$ perchè si avrebbe $v(\alpha + \omega) = 0$ in contrasto con la (19').

TEOREMA 1. Si supponga che per l'equazione (1) valga l'ipotesi H e si scelga ε tale che $0 < \varepsilon < -(|h| + 2) + \sqrt{(|h| + 2)^2 + 4k - h^2}$. Si considerino le equazioni

$$\mathcal{E}_1[y] \equiv y'' + a_1(t)y' + b_1(t)y = 0 \,, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_2[z] \equiv z'' + a_2(t)\,z' + b_2(t)\,z = 0 \,, \tag{2'}$$

con

$$a_1(t) = \begin{cases} h + \varepsilon & \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \eta_1] \\ h - \varepsilon & \text{per } t \in\,]\alpha + \eta_1\ \alpha + \omega_1] \,, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b_1(t) = k + \varepsilon \\ \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \omega_1] \,, \end{array} \tag{3}$$

dove

$$\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{4(k + \varepsilon) - (h + \varepsilon)^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h + \varepsilon}{\sqrt{4(k + \varepsilon) - (h + \varepsilon)^2}} \,, \tag{4}$$

$$\omega_1 = \eta_1 + \frac{2}{\sqrt{4(k + \varepsilon) - (h - \varepsilon)^2}} \operatorname{arccotg} \frac{-(h - \varepsilon)}{\sqrt{4(k + \varepsilon) - (h - \varepsilon)^2}} \,, \tag{5}$$

e con

$$a_2(t) = \begin{cases} h - \varepsilon & \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \eta_2] \\ h + \varepsilon & \text{per } t \in\,]\alpha + \eta_2, \alpha + \omega_2], \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b_2(t) = k - \varepsilon \\ \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \omega_2], \end{array} \tag{3'}$$

dove

$$\eta_2 = \frac{2}{\sqrt{4(k - \varepsilon) - (h - \varepsilon)^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h - \varepsilon}{\sqrt{4(k - \varepsilon) - (h - \varepsilon)^2}} \,, \tag{4'}$$

$$\omega_2 = \eta_2 + \frac{2}{\sqrt{4(k - \varepsilon) - (h + \varepsilon)^2}} \operatorname{arccotg} \frac{-(h + \varepsilon)}{\sqrt{4(k - \varepsilon) - (h + \varepsilon)^2}} \,. \tag{5'}$$

Allora per α « sufficientemente grande » [6] esiste il punto $\alpha + \omega$, coniugato di α rispetto all'equazione (1), che verifica la doppia limitazione

$$\alpha + \omega_1 < \alpha + \omega < \alpha + \omega_2 \,. \tag{6}$$

[6] Si deve supporre $\alpha > c^*$, con c^* dipendente da ε, tale che

$$h - \varepsilon < a(t) < h + \varepsilon \,, \qquad k - \varepsilon < b(t) < k + \varepsilon \,, \qquad t \in J \,,\ t > c^* \,.$$

Esiste anche il punto $\alpha + \eta$, che è il τ-punto di α rispetto all'equazione (1), che verifica la doppia limitazione

$$\alpha + \eta_1 < \alpha + \eta < \alpha + \eta_2 \,. \tag{7}$$

Dimostrazione. Per l'ipotesi H, considerato ε con la condizione $0 < \varepsilon < -(|h| + 2) + \sqrt{(|h| + 2)^2 + 4k - h^2}$, esiste c^* tale che

$$h - \varepsilon < a(t) < h + \varepsilon \,, \qquad k - \varepsilon < b(t) < k + \varepsilon \qquad \text{per } t \in J \cap [c^*, +\infty) \,. \tag{8}$$

Fissato $\alpha > c^*$, la dimostrazione si riduce a provare che le equazioni (1) e (2) verificano le ipotesi del Lemma 1 nell'intervallo $[\alpha, \alpha + \omega_1]$ e le equazioni (1) e (2′) quelle del Lemma 2 nell'intervallo $[\alpha, \alpha + \omega_2]$, pertanto in sostanza a verificare le due proposizioni seguenti.

Proposizione 1ª. L'equazione (2) definita dalle (3), (4), (5) ammette una soluzione $y(t)$ che soddisfa le seguenti relazioni

$$y(\alpha) = y(\alpha + \omega_1) = 0 \,, \qquad y(t) > 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_1[\,, \tag{9}$$

$$y'(t) > 0 \quad \text{in } [\alpha, \alpha + \eta_1[\,, \qquad y'(\alpha + \eta_1) = 0 \,, \qquad y'(t) < 0 \quad \text{in }]\alpha + \eta_1, \alpha + \omega_1] \,. \tag{10}$$

Proposizione 2ª. L'equazione (2′) definita dalle (3′), (4′), (5′) ammette una soluzione $z(t)$ che soddisfa le seguenti relazioni

$$z(\alpha) = z(\alpha + \omega_2) = 0 \,, \qquad z(t) > 0 \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_2[\,, \tag{9'}$$

$$z'(t) > 0 \quad \text{in } [\alpha, \alpha + \eta_2[\,, \qquad z'(\alpha + \eta_2) = 0 \,, \qquad z'(t) < 0 \quad \text{in }]\alpha + \eta_2, \alpha + \omega_2] \,. \tag{10'}$$

Verifica della proposizione 1ª. I coefficienti dell'equazione (2) sono costanti a tratti. Considerata la « equazione caratteristica »

$$\varrho^2 + a_1(t)\varrho + b_1(t) = 0$$

si ha

$$\varrho(t) = \frac{-a_1(t) \pm \sqrt{a_1^2(t) - 4b_1(t)}}{2}$$

e quindi

$$\varrho(t) = \frac{-(h+\varepsilon) \pm i\sqrt{4(k+\varepsilon)-(h+\varepsilon)^2}}{2} \quad \text{per } t \in [\alpha, \alpha+\eta_1], \tag{11}$$

$$\varrho(t) = \frac{-(h-\varepsilon) \pm i\sqrt{4(k+\varepsilon)-(h-\varepsilon)^2}}{2} \quad \text{per } t \in]\alpha+\eta_1, \alpha+\omega_1]. \tag{12}$$

Posto

$$\lambda_1 = -\frac{h+\varepsilon}{2}, \qquad \mu_1 = \frac{\sqrt{4(k+\varepsilon)-(h+\varepsilon)^2}}{2}, \tag{13}$$

$$\lambda_1^* = -\frac{h-\varepsilon}{2}, \qquad \mu_1^* = \frac{\sqrt{4(k+\varepsilon)-(h-\varepsilon)^2}}{2}, \tag{14}$$

la funzione

$$\begin{cases} y(t) = A\exp[\lambda_1(t-\alpha-\eta_1)]\cdot \\ \qquad \cdot\{\mu_1\cos[\mu_1(t-\alpha-\eta_1)] - \lambda_1\sin[\mu_1(t-\alpha-\eta_1)]\} \\ \qquad\qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha+\eta_1] \\ y(t) = A\dfrac{\mu_1}{\mu_1^*}\exp[\lambda_1^*(t-\alpha-\eta_1)]\cdot \\ \qquad \cdot\{\mu_1^*\cos[\mu_1^*(t-\alpha-\eta_1)] - \lambda_1^*\sin[\mu_1^*(t-\alpha-\eta_1)]\} \\ \qquad\qquad \text{per } t \in [\alpha+\eta_1, \alpha+\omega_1] \end{cases} \tag{15}$$

dove A è una costante positiva, è una soluzione dell'equazione (2) che verifica (9), (10). Infatti si ha $y(\alpha) = y(\alpha+\omega_1) = 0$ perchè la (4) si può leggere

$$\mu_1\eta_1 = \operatorname{arccotg}\frac{-\lambda_1}{\mu_1}$$

e la (5)

$$\mu_1^*(\omega_1-\eta_1) = \operatorname{arccotg}\frac{\lambda_1^*}{\mu_1^*}.$$

Le (10) seguono dalla formula

$$\begin{cases} y'(t) = -A(\lambda_1^2+\mu_1^2)\exp[\lambda_1(t-\alpha-\eta_1)]\sin[\mu_1(t-\alpha-\eta_1)] \\ \qquad\qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha+\eta_1] \\ y'(t) = -A\dfrac{\mu_1}{\mu_1^*}[(\lambda_1^*)^2+(\mu_1^*)^2]\exp[\lambda_1^*(t-\alpha-\eta_1)]\cdot \\ \qquad \cdot\sin[\mu_1^*(t-\alpha-\eta_1)] \qquad \text{per } t \in [\alpha+\eta_1, \alpha+\omega_1] \end{cases} \tag{16}$$

e dall'osservazione che per $t \in [\alpha, \alpha + \eta_1]$ si ha

$$(17) \qquad -\pi < -\mu_1\eta_1 \leqslant \mu_1(t-\alpha-\eta_1) \leqslant 0\,,$$

e per $t \in [\alpha + \eta_1, \alpha + \omega_1]$ si ha

$$(18) \qquad 0 \leqslant \mu_1^*(t-\alpha-\eta_1) \leqslant \mu_1^*(\omega_1-\eta_1) < \pi\,.$$

È ovvio che $y(t), y'(t)$ risultano assolutamente continue in $[\alpha, \alpha+\omega_1]$ (anche $y''(t)$ è continua ivi) e da tutto ciò segue che $y(t) > 0$ in $]\alpha, \alpha+\omega_1[$.

Verifica della proposizione 2ª. I coefficienti dell'equazione (2′) sono costanti a tratti. Considerata la « equazione caratteristica »

$$\varrho^2 + a_2(t)\varrho + b_2(t) = 0\,,$$

si ha

$$(11') \qquad \varrho(t) = \frac{-(h-\varepsilon) \pm i\sqrt{4(k-\varepsilon)-(h-\varepsilon)^2}}{2} \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha+\eta_2]\,,$$

$$(12') \qquad \varrho(t) = \frac{-(h+\varepsilon) \pm i\sqrt{4(k-\varepsilon)-(h+\varepsilon)^2}}{2} \qquad \text{per } t \in\,]\alpha+\eta_2, \alpha+\omega_2]\,.$$

Posto

$$(13') \qquad \lambda_2 = -\frac{h-\varepsilon}{2}\,, \qquad \mu_2 = \frac{\sqrt{4(k-\varepsilon)-(h-\varepsilon)^2}}{2}$$

$$(14') \qquad \lambda_2^* = -\frac{h+\varepsilon}{2}\,, \qquad \mu_2^* = \frac{\sqrt{4(k-\varepsilon)-(h+\varepsilon)^2}}{2}\,,$$

a funzione

$$(15') \qquad \begin{cases} z(t) = B\exp[\lambda_2(t-\alpha-\eta_2)]\cdot \\ \qquad \cdot\{\mu_2\cos[\mu_2(t-\alpha-\eta_2)] - \lambda_2\sin[\mu_2(t-\alpha-\eta_2)]\} \\ \qquad\qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha+\eta_2] \\ z(t) = B\dfrac{\mu_2}{\mu_2^*}\exp[\lambda_2^*(t-\alpha-\eta_2)]\cdot \\ \qquad \cdot\{\mu_2^*\cos[\mu_2^*(t-\alpha-\eta_2)] - \lambda_2^*\sin[\mu_2^*(t-\alpha-\eta_2)]\} \\ \qquad\qquad \text{per } t \in [\alpha+\eta_2, \alpha+\omega_2]\,, \end{cases}$$

dove B è una costante positiva, è una soluzione di (2′) che verifica (9′), (10′).

COROLLARIO. Considerata la soluzione dell'equazione (1), determinata dalle condizioni iniziali

$$x(\alpha) = 0 \,, \quad x'(\alpha) = D > 0 \,, \quad \alpha > c^* \,, \tag{19}$$

si scelgano le costanti A, B nelle (15), (15′) in modo che risulti

$$y'(\alpha) = z'(\alpha) = x'(\alpha) = D \,. \tag{20}$$

Si può allora concludere che per le soluzioni di (1), (2), (2′) così determinate valgono le doppie diseguaglianze

$$y(t) < x(t) < z(t) \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \omega_1] \,, \tag{21}$$

$$y'(t) < x'(t) < z'(t) \qquad \text{in }]\alpha, \alpha + \eta_1] \,. \tag{22}$$

OSSERVAZIONE 1ª. La formula (6)

$$\alpha + \omega_1 < \alpha + \omega < \alpha + \omega_2$$

fornisce delle approssimazioni per difetto e per eccesso della distanza ω fra due zeri successivi di una soluzione $x(t)$ dell'equazione (1). È spontaneo confrontare l'approssimazione per difetto ω_1 di ω con quella notissima fornita da De La Vallée Poussin in [4]. Mostreremo che per $h > 0$ oppure per $h < 0$ quella fornita da ω_1 è migliore, mentre per $h = 0$ le due approssimazioni coincidono.

Infatti se $h > 0$ dalle (8) si ottiene

$$|a(t)| < h + \varepsilon \,, \quad |b(t)| < k + \varepsilon \,, \quad t \in J \cap [c^*, +\infty) \tag{23}$$

e l'approssimazione (7) fornita in [4] risulta

$$\frac{4}{\sqrt{4(k+\varepsilon) - (h+\varepsilon)^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h+\varepsilon}{\sqrt{4(k+\varepsilon) - (h+\varepsilon)^2}}$$

(7) Ovviamente in [4] la (23) dovrebbe essere verificata per $\forall t > c^*$.

che coincide con $2\eta_1$ (si veda la (4)). Si tratta di dimostrare che per ogni ε, con $0<\varepsilon<-(|h|+2)+\sqrt{(|h|+2)^2+4k-h^2}$, si ha $\omega_1>2\eta_1$ cioè che $\omega_1-\eta_1>\eta_1$.

Posto $(h+\varepsilon)/(2\sqrt{k+\varepsilon})=f$, dalla (4) si ha

$$\sqrt{k+\varepsilon}\,\eta_1=\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\operatorname{arccotg}\frac{f}{\sqrt{1-f^2}}, \qquad 0<f<1 .$$

Posto $(h-\varepsilon)/2\sqrt{k+\varepsilon}=g$, dalla (5) si ha

$$\sqrt{k+\varepsilon}\,(\omega_1-\eta_1)=\frac{1}{\sqrt{1-g^2}}\operatorname{arccotg}\frac{-g}{\sqrt{1-g^2}}, \qquad 0\leqslant|g|<f<1 .$$

La decrescenza della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arccotg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

in $[0,1)$ e la relazione

$$\operatorname{arccotg}\frac{|g|}{\sqrt{1-g^2}}<\operatorname{arccotg}\frac{-|g|}{\sqrt{1-g^2}},$$

conducono alla conclusione.

Se $h<0$ dalle (8) si ottiene

$$(24)\qquad |a(t)|<-(h-\varepsilon)\,,\qquad |b(t)|<k+\varepsilon\,,\qquad t\in J\cap[c^*,+\infty)$$

e l'approssimazione fornita in [4] coincide con $2(\omega_1-\eta_1)$. La verifica che $\omega_1>2(\omega_1-\eta_1)$ è strettamente analoga alla precedente.

Infine se $h=0$ dalle (8) si ottiene

$$(25)\qquad |a(t)|<\varepsilon\,,\qquad |b(t)|<k+\varepsilon\,,\qquad t\in J\cap[c^*,+\infty)\,,$$

l'approssimazione fornita in [4] diviene $2\eta_1=\omega_1$ come è evidente dalle (4), (5).

OSSERVAZIONE 2ª. Alle conclusioni del Teorema 1 e del relativo Corollario, cioè a formule analoghe alle (6), (7), (21), (22), si può giungere anche se i coefficienti di (1), sommabili in un intervallo I, verificano quasi ovunque in I le condizioni

$$(1'') \qquad l_1 < a(t) < L_1\,, \qquad m_1 < b(t) < M_1\,, \qquad \sqrt{m_1} > \max\left\{\frac{|L_1|}{2}, \frac{|l_1|}{2}\right\},$$

purchè la lunghezza dell'intervallo I non sia minore dell'attuale valore di ω_2 (analogo a quello di (5')) cioè di

$$\frac{2}{\sqrt{4m_1 - l_1^2}} \operatorname{arccotg} \frac{l_1}{\sqrt{4m_1 - l_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{4m_1 - L_1^2}} \operatorname{arccotg} \frac{-L_1}{\sqrt{4m_1 - L_1^2}}\,.$$

4. Conclusione.

TEOREMA 2. L'equazione

$$(1) \qquad \mathfrak{L}[x] \equiv x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

nell'ipotesi H del paragrafo 3 è oscillante sulla semiretta $[c, +\infty)$; detti t_n gli zeri di una sua soluzione $x(t)$ e τ_n gli zeri di $x'(t)$ in una opportuna semiretta, [8] in cui $t_n < \tau_n < t_{n+1}$, si ha:

$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = \frac{2\pi}{\sqrt{4k - h^2}}\,,$$

$$(3) \qquad \lim_{n\to+\infty} (\tau_n - t_n) = \frac{2}{\sqrt{4k - h^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h}{\sqrt{4k - h^2}}\,,$$

e di conseguenza

$$(4) \qquad \lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - \tau_n) = \frac{2}{\sqrt{4k - h^2}} \left[\pi - \operatorname{arccotg} \frac{h}{\sqrt{4k - h^2}}\right],$$

$$(4') \qquad \lim_{n\to+\infty} (\tau_{n+1} - \tau_n) = \frac{2\pi}{\sqrt{4k - h^2}}\,.$$

[8] Ovviamente, per l'ipotesi H, se $t_n > c^*$ (si veda la (8) del paragrafo 3) fra due zeri successivi di $x(t)$ esiste uno ed un solo valore τ_n in cui si annulla $x'(t)$. Infatti basta scrivere la (1) sotto forma autoaggiunta $\mathfrak{L}_1[x] = 0$ ed integrare $\mathfrak{L}_1[x](t) \equiv 0$ fra due zeri successivi di $x'(t)$.

Dimostrazione. L'affermazione che l'equazione (1) è oscillante segue dall'ipotesi H, si veda 6.4 di [16], ed è anche implicita nelle considerazioni che seguiranno.

Consideriamo la soluzione $x(t)$ dell'equazione (1) definita dalle condizioni iniziali

$$x(t_0) = 0\,, \qquad x'(t_0) = D > 0\,, \qquad t_0 > c^*\,. \tag{5}$$

Il Teorema 1 ci assicura che la soluzione $x(t)$ si annulla in un punto successivo t_1 verificante la condizione

$$t_0 + \omega_1 < t_1 < t_0 + \omega_2\,, \tag{6}$$

con ω_1, ω_2 dati dalle (5), (5′) del paragrafo 3. Se ora consideriamo la soluzione $-x(t)$ in un intorno destro di t_1 (è ovvio che $-x'(t_1) > 0$) ed applichiamo il Teorema 1, otteniamo l'esistenza di un successivo zero t_2 di $x(t)$ verificante la condizione

$$t_1 + \omega_1 < t_2 < t_1 + \omega_2\,.$$

Resta così definito l'insieme discreto degli zeri della soluzione $x(t)$ a conferma del carattere oscillante dell'equazione (1).

Analogo discorso può essere fatto per i punti in cui si annulla $x'(t)$ verificanti le diseguaglianze

$$\eta_1 < \tau_n - t_n < \eta_2\,. \tag{7}$$

Si può a questo punto osservare che per $\varepsilon \to 0$ le quantità $\eta_2 - \eta_1$ ed $\omega_2 - \omega_1$ tendono a zero mentre ω_1 ed η_1 tendono ad un numero positivo, sicchè i punti τ_n e t_n sono separati per ε abbastanza piccolo e quindi n abbastanza grande [9]. Inoltre il passaggio al limite per $\varepsilon \to 0$ nella (7) e nella

$$\omega_1 < t_{n+1} - t_n < \omega_2$$

fornisce le formule (3), (2), (4), (4′).

[9] In altre parole si ha:

$$t_n + \omega_1 < t_{n+1} < t_n + \omega_2 < t_{n+2}\,, \qquad t_n + \eta_1 < \tau_n < t_n + \eta_2 < \tau_{n+1}\,.$$

5. Commenti.

Vista la vastissima bibliografia relativa agli zeri delle soluzioni (e delle loro derivate) dell'equazione differenziale

$$\mathcal{L}[x] \equiv x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{1}$$

nel caso ([10]) $a(t) \equiv 0$, $b(t) \in C([c, +\infty))$, ci si può chiedere se i risultati del Teorema 2, nell'ipotesi aggiuntiva che le funzioni $a(t)$, $b(t)$ siano continue in $[c, +\infty)$, si possano ottenere trasformando l'equazione (1) in una equazione del tipo

$$\frac{d^2u}{ds^2} + p(s)u = 0\,. \tag{1'}$$

La risposta è affermativa per quanto riguarda la formula

$$\lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = \frac{2\pi}{\sqrt{4k - h^2}}, \tag{2}$$

soltanto però in uno dei casi:

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = h > 0\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} a(t) = h < 0\,.$$

Se $h = 0$ non sembra possibile dare una risposta generale con questo metodo.

Del tutto scoraggiante la situazione se si cerca di ottenere la formula (3) del Teorema 2 cioè

$$\lim_{n\to+\infty} (\tau_n - t_n) = \frac{2}{\sqrt{4k - h^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h}{\sqrt{4k - h^2}}\,. \tag{3}$$

Mostriamo ora come si possa riottenere la (2) per $h \neq 0$ mediante una trasformazione che muta (1) in (1'). Per far ciò è necessario distinguere il caso $h > 0$ da quello $h < 0$.

([10]) Si vedano ad esempio [7], [8], [13], [14], [18].

I° caso ($h > 0$). Si suppone che l'equazione (1) abbia i coefficienti continui in $[c, +\infty)$ e che si abbia

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = h > 0\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} b(t) = k\,, \qquad 4k - h^2 > 0\,. \tag{4}$$

Scritta l'equazione (1) in forma autoaggiunta

$$\left(\exp\left[\int_c^t a(\vartheta)\,d\vartheta\right]x'\right)' + b(t)\cdot\exp\left[\int_c^t a(\vartheta)\,d\vartheta\right]x = 0\,, \tag{1''}$$

posto

$$r(t) = \exp\left[\int_c^t a(\vartheta)\,d\vartheta\right], \tag{5}$$

dalla prima delle (4) si ottiene

$$\int^{+\infty} \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)} < +\infty\,. \tag{6}$$

Posto ancora

$$\bar{R}(t) = \left\{\int_t^{+\infty} \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)}\right\}^{-1}, \qquad \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\bar{R}(t)}}\,, \tag{7}$$

la trasformazione di Kummer

$$\begin{cases} s = \varphi(t) \\ x(t) = \psi(t)u(s) \end{cases} \tag{8}$$

dove

$$\varphi(t) = \int_c^t \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)\psi^2(\vartheta)} = \log\frac{\bar{R}(t)}{\bar{R}(c)} \tag{9}$$

muta la semiretta $[c, +\infty)$ nella semiretta $[0, +\infty)$ e l'equazione (1) nella (1′) con

$$p(\varphi(t)) = b(t)\,\frac{r^2(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{1}{4}\,. \tag{10}$$

Si ha poi

$$\lim_{s\to+\infty} p(s) = \lim_{t\to+\infty} p(\varphi(t)) = \frac{k}{h^2} - \frac{1}{4} > 0\,. \tag{11}$$

È noto il risultato (11): se

$$\lim_{s \to +\infty} p(s) = M > 0 \,, \tag{12}$$

l'equazione (1′) è oscillante e, detti s_n gli zeri successivi di una soluzione non triviale $u(s)$, con $s_n < s_{n+1}$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} (s_{n+1} - s_n) = \frac{\pi}{\sqrt{M}} \,. \tag{13}$$

Dalla (10) segue quindi

$$\lim_{n \to +\infty} (s_{n+1} - s_n) = \frac{\pi}{\sqrt{k/h^2 - \frac{1}{4}}} \,. \tag{14}$$

Detta $x(t)$ la soluzione della (1) corrispondente, mediante (8), ad $u(s)$, per gli zeri successivi t_n di $x(t)$ vale la relazione $s_n = \varphi(t_n)$. Ne deriva facilmente la (2).

II° caso ($h < 0$). Si suppone che l'equazione (1) abbia i coefficienti continui sulla semiretta $[c, +\infty)$ e che si abbia

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = h < 0 \,, \qquad \lim_{t \to +\infty} b(t) = k \,, \qquad 4k - h^2 > 0 \,. \tag{4′}$$

Scritta l'equazione (1) nella forma (1″), in luogo della (6) si ha

$$\int^{+\infty} \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)} = +\infty \,. \tag{6′}$$

Posto

$$R(t) = \int_c^t \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)} \,, \qquad \psi(t) = \sqrt{R(t)} \,, \tag{7′}$$

la trasformazione di Kummer

$$\begin{cases} s = \varphi(t) \\ x(t) = \psi(t)\, u(s) \end{cases}$$

(11) Si veda ad esempio Hartman [5], Es. 3.2 pag. 336

dove

$$\varphi(t) = \int_{c_1}^{t} \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)\,\psi^2(\vartheta)} = \log \frac{R(t)}{R(c_1)}, \qquad c_1 > c\,,$$

muta la semiretta $[c_1, +\infty)$ nella semiretta $[0, +\infty)$ e l'equazione (1) nella (1′) con

$$(10') \qquad p(\varphi(t)) = b(t) r^2(t) R^2(t) - \tfrac{1}{4}\,,$$

da cui segue ancora

$$\lim_{s \to +\infty} p(s) = \frac{k}{h^2} - \frac{1}{4}$$

e quindi la conclusione.

La difficoltà di cui si è detto per estendere questo tipo di dimostrazione sia al caso $h = 0$, sia al comportamento degli zeri della derivata prima di una soluzione mi confermano nell'opinione che non sempre sia conveniente trasformare l'equazione (1) nella (1′). Possiamo qui citare l'autorevole parere di A. Ju. Levin [11]:

« In view of the possibility that terms containing $\dot{x}$ may be excluded, it is often averred that the " complete " equation $\ddot{x} + p\dot{x} + q = 0$ it is not needed. It is difficult to concur with this notion since there are a number of theorems that make essential use of the dissipation term $p(t)\dot{x}$ and that have no direct analogue for the case $p(t) \equiv 0$; attempts to prove these theorems by going over to the « abbreviated » equation $\ddot{y} + fy = 0$ having not simplified the task, but have instead complicated it ».

6. Esempi.

Esempio I. Consideriamo l'equazione [12]

$$(1) \qquad x'' + (h\,\mathrm{th}\,t)x' + kx = 0\,, \qquad t \in [0, +\infty)$$

e supponiamo si abbia $4k - h^2 > 0$.

[12] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea P. Co., New York, 1948; formula 2.64, pag. 418.

Le formule (2), (3) del Teorema 2 sono applicabili, e per gli zeri t_n, τ_n di una soluzione $x(t)$ e della sua derivata $x'(t)$ si trova

$$(2) \qquad t_{n+1}-t_n \sim \frac{2\pi}{\sqrt{4k-h^2}} \qquad (n \to +\infty),$$

$$(3) \qquad \tau_n - t_n \sim \frac{2}{\sqrt{4k-h^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h}{\sqrt{4k-h^2}} \qquad (n \to +\infty).$$

Le soluzioni dell'equazione (1) si possono esprimere per mezzo di funzioni elementari quando h è un'intero pari non negativo ([13]). Nel caso particolare $h = 2$ l'equazione (1) si riduce alla forma semplicissima

$$(\operatorname{ch} t \cdot x)'' + \alpha^2 \operatorname{ch} t \cdot x = 0, \qquad \alpha = \sqrt{k-1}.$$

Ne deriva l'integrale generale

$$x(t) \operatorname{ch} t = C \sin(\alpha t + \gamma),$$

da cui la seguente espressione esplicita di t_n

$$(4) \qquad t_n = \frac{n\pi - \gamma}{\alpha}, \qquad t_n \in [0, +\infty).$$

In questo caso la (2) è quindi una uguaglianza, perchè si ha

$$(2') \qquad t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{k-1}}.$$

La determinazione di τ_n è affidata alla soluzione dell'equazione ([14])

$$\operatorname{tg}(\alpha t + \gamma) = \alpha \coth t.$$

Poichè il secondo membro tende ad α per $t \to +\infty$ si ottiene una prima espressione asintotica di τ_n

$$(5) \qquad \tau_n \sim \tau_n^* = \frac{\operatorname{arctg} \alpha + n\pi - \gamma}{\alpha} \qquad (n \to +\infty)$$

([13]) E. Kamke, *op. cit.*, equazioni 2.64, 2.297, 2.298.

([14]) Si ricordi che $\tau_n > t_n \geqslant 0$.

e da questa discende il valore asintotico previsto dalle (3); si ha infatti

$$(3') \qquad \tau_n - t_n \sim \frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{k-1}} \qquad (n \to +\infty) .$$

L'approssimazione fornita dalla (5) o dalla (3′) è molto buona; posto infatti

$$\tau_n = \tau_n^* + \varepsilon_n = \frac{\operatorname{arctg}\alpha + n\pi - \gamma}{\alpha} + \varepsilon_n ,$$

si trova facilmente

$$\varepsilon_n \sim \frac{2 \exp[-2\tau_n^*]}{\alpha^2 + 1} \qquad (n \to +\infty) .$$

Esempio II. Consideriamo l'equazione

$$(6) \qquad \frac{d^2u}{ds^2} + \left[l + \frac{1}{2} m^2 \operatorname{ch}(2s)\right] u = 0 , \qquad s \in [0, +\infty), \ m > 0 ,$$

ottenuta dall'equazione di Mathieu

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - \left[l + \frac{1}{2} m^2 \cos(2\xi)\right] u = 0$$

per mezzo del cambiamento di variabile $s = i\xi$.

La sostituzione $t = m \operatorname{sh} s$ trasforma la (6) nell'equazione

$$(7) \qquad (m^2 + t^2) \frac{d^2u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} + \left[l + \frac{m^2}{2} + t^2\right] u = 0 , \qquad t \in [0, +\infty) ,$$

alla quale sono applicabili le formule (2), (3) del Teorema 2.

Si ha quindi, con il solito significato dei simboli,

$$(8) \qquad t_{n+1} - t_n \sim \pi \qquad (n \to +\infty) ,$$

$$(9) \qquad \tau_n - t_n \sim \frac{\pi}{2} \qquad (n \to +\infty) .$$

Ciò significa che per gli zeri corrispondenti s_n, σ_n di una soluzione

$u(s)$ dell'equazione (6) e della sua derivata $u'(s)$ si trova

$$\operatorname{sh} s_{n+1} - \operatorname{sh} s_n \sim \frac{\pi}{m} \qquad (n \to +\infty)\,, \tag{8'}$$

$$\operatorname{sh} \sigma_n - \operatorname{sh} s_n \sim \frac{\pi}{2m} \qquad (n \to +\infty)\,. \tag{9'}$$

Queste formule permettono una valutazione diretta delle differenze $s_{n+1} - s_n$, $\sigma_n - s_n$. Si ha infatti, per la formula di Lagrange

$$\frac{t_{n+1} - t_n}{\sqrt{m^2 + t_{n+1}^2}} < s_{n+1} - s_n < \frac{t_{n+1} - t_n}{\sqrt{m^2 + t_n^2}}\,.$$

Inoltre per il teorema di Cesaro si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) = \pi\,,$$

e finalmente

$$s_{n+1} - s_n \sim \frac{1}{n} \qquad (n + \to \infty)\,.$$

In modo del tutto analogo si ha

$$\sigma_n - s_n \sim \frac{1}{2n} \qquad (n \to +\infty)\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] J. H. Barret, da *Lectures on ordinary differential equations,* Edited by R. McKelvey, Academic Press (1970).

[2] G. Butler - J. W. Macki, *Oscillation and comparison theorems for second order linear differential equations with integrable coefficients,* Can. J. Math., **26** (2) (1974), pp. 294-301.

[3] W. A. Coppel, *Disconjugacy,* Lecture Notes in Math., Vol. 220, Springer (1971).

[4] C. De La Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'un intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n,* J. Math. Pures Appl., **8** (1929), pp. 125-144.

[5] PH. HARTMAN, *Ordinary differential equations*, J. Wiley and Sons, New York (1964).

[6] K. KREITH, *Oscillation theory*, Lecture Notes in Math., Vol. 324, Springer (1973).

[7] W. LEIGHTON, *On approximating conjugate, focal, σ-points for linear differential equations of second order*, Ann. Mat. Pura Appl., **107** (4) (1975), pp. 373-381.

[8] W. LEIGHTON, *Some comparison theorems for conjugate and σ-points*, Can. J. Math., **28** (6) (1976), pp. 1172-1179.

[9] A. JU. LEVIN, *On the stability of solutions of equations of second order*, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), pp. 1642-1646.

[10] A. JU. LEVIN, *Linear differential equations of second order*, Soviet Math. Dokl., **4** (1963), pp. 1814-1817.

[11] A. JU. LEVIN, *Behavior of the solutions of the equation* $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0$ *in the nonoscillatory case*, Math. USSR Sbornik, **4** (1968), n. 1, pp. 33-55.

[12] R. T. LEWIS, *The existence of conjugate points for selfadjoint differential equations of even order*, Proc. Amer. Math. Soc., **56** (1976), pp. 162-166.

[13] F. NEUMAN, *Relation between the distribution of the zeros of the solutions of a second order linear differential equation and the boundedness of these solutions*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **19** (1968), pp. 1-6.

[14] W. T. PATULA, *On the distance between zeroes*, Proc. Amer. Math. Soc., **52** (1975), pp. 247-251.

[15] W. T. REID, *Ordinary differential equations*, J. WILEY and Sons, New York (1971).

[16] U. RICHARD, *Teoremi di confronto e di oscillazione per equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, in corso di stampa, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.

[17] D. WILLETT, da *Lectures on ordinary differential equations*, Edited by R. McKelvey, Academic Press (1970).

[18] D. WILLETT, *Oscillation on finite or infinite intervals of second order linear differential equations*, Can. Math. Bull., **14** (4) (1971), pp. 539-550.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 giugno 1980.